электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 629.113 : 629.11.012

Вынужденные колебания нелинейных систем

Петров И.П., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Колесные машины»

Петухов А.И., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Колесные машины»

Научный руководитель: Смирнов В.Ф., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kafsm10@sm.bmstu.ru

Вынужденные колебания – колебания, существующие в системе под действием переменных внешних возмущений. Наличие внешней переменной силы - необходимое условие возбуждения и существования таких колебаний. Например, «тряска» автомобиля, движущегося по неровной дороге, вибрации силовой установки (валов гребных винтов) судна под действием гидродинамических сил, связанных с работой винтов – всё это вынужденные колебания. Наиболее просты вынужденные колебания в линейных системах [1]. Так, при действии периодической внешней силы на линейную систему возбуждаются колебания, которые являются суперпозицией собственных (нормальных) колебаний и вынужденных. По истечении некоторого времени, в результате диссипации, собственные колебания затухают и в системе устанавливаются вынужденные колебания, имеющие ту же частоту, что и внешняя сила.

При действии внешней силы на нелинейную систему характер имеющих место в системе колебаний существенно сложнее. Так, наряду с колебаниями, имеющими частоту внешней силы, здесь могут появиться колебания других частот, возникающих от различных гармоник внешней силы, параметрическое возбуждение субгармоник и даже возбуждение автоколебаний [2]. "Нелинейному резонансу" присуща зависимость резонансной частоты от амплитуды колебаний, возможность скачкообразного изменения амплитуды колебаний при медленном изменения частоты. Спектр колебаний в нелинейной системе может значительно отличаться от спектра внеш. воздействия и даже может стать сплошным, несмотря на монохроматичность внешние воздействия.

Сложность колебаний в нелинейной системе при действии внешних сил даёт возможность выделить в таких системах класс вынужденных колебаний только в простых частных случаях.

Проблема анализа вынужденных колебаний нелинейных систем для этих частных случаев является весьма сложной и многообразной. Поскольку принцип наложения решений (суперпозиция) здесь неприменим, то, вообще говоря, нельзя складывать частные решения при различных внешних воздействиях, найденных по отдельности, а также складывать свободные и вынужденные колебания.

Различные случаи вынужденных колебаний с нелинейной характеристикой исследовал Дуффинг. Один и важных случаев касается колебаний, описываемых дифференциальным уравнением [3]

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \chi^2 q(1+\beta q^2) = P_0\{\cos(\omega t)\}. \quad (1)$$

Следовательно, для данного уравнения, функция неавтономных колебаний, в случае, когда характеристическая поверхность $\omega = -F(q,v,t)$ как жесткое целое совершает периодическое параллельное перемещение в направлении оси ω, из общего случая $F(q,v,t) = F_0(q) + D(q,v) + Z(t)$ принимает частный вид

$$F_0(q) = -\chi^2 q(1+\beta q^2), \quad (2)$$

где $D(q,v) = 0$, $Z(t) = P_0\{\cos(\omega t)\}$. При $\beta = \frac{1}{6}$ дифференциальное уравнение (1) представляет собой второе приближение для уравнения движения маятника, на который действует гармонический момент с круговой частотой ω. Этим уравнением можно пользоваться для представления движения колебательной системы, имеющей нелинейную характеристику $\omega_0 = -F(q)$, симметричную относительно начала координат, и подвергающейся действию гармонической возмущающей силы, в тех случаях, когда при разложении функции $\omega_0 = -F_0(q)$, в ряд Тэйлора по степеням q учитывается второй член ряда.

Дифференциальное уравнение (1) не имеет общего решения в замкнутом виде. Однако оно может быть решено различными приближенными способами. Покажем один из таких способов.

Введем вместо q и t безразмерные переменные $\tau = \chi t$ и $x = \frac{\chi^2 q}{P_0}$. Кроме того, введем безразмерные постоянные $\eta = \frac{\omega}{\chi}$ и $\varepsilon = \frac{\beta P_0^2}{\chi^4}$. Тогда дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1+\varepsilon x^2) = \cos(\eta\tau). \tag{3}$$

Поставим теперь задачу определения вынужденных колебаний, гармонических относительно $F(q, v, t)$. Их можно представить в виде периодического решения уравнения (1) с круговой частотой ω или в виде периодического решения $x(\tau)$ уравнения (3) с круговой частотой η.

Уравнение (3) не изменится, если замёнить τ на $(-\tau)$. Кроме того, характерйстика симметрична относительно начала координат. Следовательно, мы должны ожидать колебаний, симметричных и в пространстве, и во времени и совершающих переход через нулевое положение при $\tau = \frac{(2k+1)\pi}{2\eta}$, где $k = 1, 3, 5 \ldots$ Мы удовлетворим этому условию, если возьмем решение в виде Ряда Фурье

$$x(\tau) = \sum_{n}^{\infty} x_n \cos(n\eta\tau), \tag{4}$$

в котором коэффициенты x_n пока ещё неизвестны.

Для их определения следовало бы подставить ряд (4) в дифференциальное выражение

$$A = [x, \tau] \equiv \frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1+\varepsilon x^2) - \cos(\eta\tau), \tag{5}$$

нелинейное относительно x, и затем разложить его также в ряд Фурье, который принял бы тогда вид

$$A = \sum_{\nu}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\eta\tau). \tag{6}$$

Для того чтобы величина A тождественно равнялась нулю при любом значении τ, необходимо было бы потребовать, чтобы были равны нулю все коэффициенты a_ν. Эти коэффициенты сами представлялись бы бесконечными рядами, члены которых содержали бы x_n в виде выражений до третьей степени включительно. Таким образом, требование равенства нулю всех a_ν означало бы необходимость решения системы бесконечно большого числа кубических уравнений, причем каждое из этих уравнений содержало бы бесконечно большое число членов. В итоге, задача становится такой, которую при практически допустимой затрате времени на вычисления решить не представляется возможной. Но известные приближенные методы решения не дают высокой точности, что

необходимо для максимально детального анализа поведения вынужденно колеблющейся системы.

Исследования характеристик системы особенно важны при демпфировании [4], пропорциональном скорости. Пусть теперь на систему, движение которой описывается уравнением (1), действует также демпфирование, пропорциональное скорости, следовательно, уравнением движения будет

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2b\frac{dq}{dt} + \chi^2 q(1+\beta q^2) = P_0\{\cos(\omega t + \varphi_0)\}, \tag{7}$$

где b - постоянная демпфирования, φ_0 —фазовый угол. Вопрос о выборе угла остается пока открытым.

Перейдем к безразмерным переменным $\tau = \chi t$ и $x = \frac{\chi^2 q}{\mathrm{P}_0}$ и введем постоянные $\eta = \frac{\omega}{\chi}$ и $\varepsilon = \frac{\beta P_0^2}{\chi^4}$. Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + 2\lambda\frac{dx}{d\tau} + x(1+\varepsilon x^2) = \cos(\eta\tau + \varphi_0). \tag{8}$$

Для приближенного решения этого уравнения опять предположим, что ему удовлетворяет периодическая функция $x = x_1\cos(\eta\tau)$, содержащая только один член. Такое допущение оправдано постольку, поскольку при предыдущем анализе мы убедились, что коэффициент x_3 при члене $x_3\cos(3\eta\tau)$ очень мал, если только $|\varepsilon| \ll 1$, а η несколько больше, чем $\frac{1}{3}$. Подставив это значение x в уравнение (8), получим

$$\begin{gathered}\left[(1-\eta^2)x_1 + \frac{3}{4}\varepsilon\chi_1^3 - cos(\varphi_0)\right]\cos(\eta\tau) - \\ -[2\lambda\eta\chi_1 - sin(\varphi_0)]sin(\eta\tau) + \frac{1}{4}\varepsilon x_1^3\cos(3\eta\tau) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось при всех значениях τ, в любом случае должны быть равны нулю обе квадратные скобки, т.е. должны соблюдаться два равенства

$$(1-\eta^2)x_1 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 = cos(\varphi_0), \tag{10}$$

$$2\lambda\eta x_1 = sin(\varphi_0). \tag{11}$$

Правда, теперь мы уже не можем потребовать, чтобы в соотношении (9) был равен нулю также член, содержащий $\cos(3\eta\tau)$. Кроме того, очевидно, что оба равенства (10) и

(11) будут удовлетворяться лишь в том случае, если, во-первых, пока еще не определенный фазовый угол φ_0 удовлетворяет соотношению

$$tg(\varphi_0) = \frac{2\lambda\eta}{1 - \eta^2 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3} \tag{12}$$

и, во-вторых, удовлетворяется равенство

$$x_1\left[\left(1 - \eta^2 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3\right)^2 + 4\lambda^2\eta^2\right] = 1, \tag{13}$$

получаемое после возведения в квадрат и сложения равенств (10) и (11).

Уравнение (13), дает связь между квадратом амплитуды x_1^2 и квадратом безразмерной частоты η^2. Будучи квадратным уравнением относительно η^2, оно имеет следующее решение:

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 - 2\lambda^2 \pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\varepsilon x_1^2 - 4)}. \tag{14}$$

Если по этой формуле вычислить значение η^2 для заданной амплитуды x_1, то равенство (12) даст угол φ_0, определяющий сдвиг фазы периодической возмущающей силы $P_0\{\cos(\omega t + \varphi_0)\}$ относительно вынужденных колебаний.

Уравнение (14) дает для каждого значения x_1, как и при колебаниях без демпфирования, два значения η^2. Кривая, определяемая этим уравнением в системе (x_1, η^2), проходит по обе стороны от скелетной линии

$$\eta^2 = 1 - 2\lambda^2 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 \tag{15}$$

причем так, что расстояния до этой кривой, измеренные по горизонтали, одинаковы и равны $\sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\varepsilon x_1^2 - 4)}$. Скелетные кривые для мягкой и жесткой характеристики представлены на рисунках 6 и 7. При значении x_1, обращающем подкоренное выражение в нуль, кривая (14) пересекает скелетную линию (15), имея горизонтальную касательную (линии 5 на рисунке 6 и 7). Приближенное значение x_1 безразмерной амплитуды вынужденных колебаний равно одному из значений x_1, определяемых формулой

$$\overline{x_1^2} = \frac{1}{2\lambda^2(1-\lambda^2)\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}}\right)} \tag{16}$$

В данном исследовании проведем моделирование вынужденных колебаний, когда колебания системы происходят с частотой внешнего периодического воздействия.

Исследуется прямолинейное движение автомобиля массой $m = 1000$ кг по твердой опорной поверхности, имеющей синусоидальный профиль с длиной неровностей $A = 0{,}9$м и высотой неровностей $H = 0{,}05$м (рис. 1). Жесткость подвески задается через статический прогиб подвески $\frac{mg}{h_{ст}}$, а демпфирование через силу сопротивления

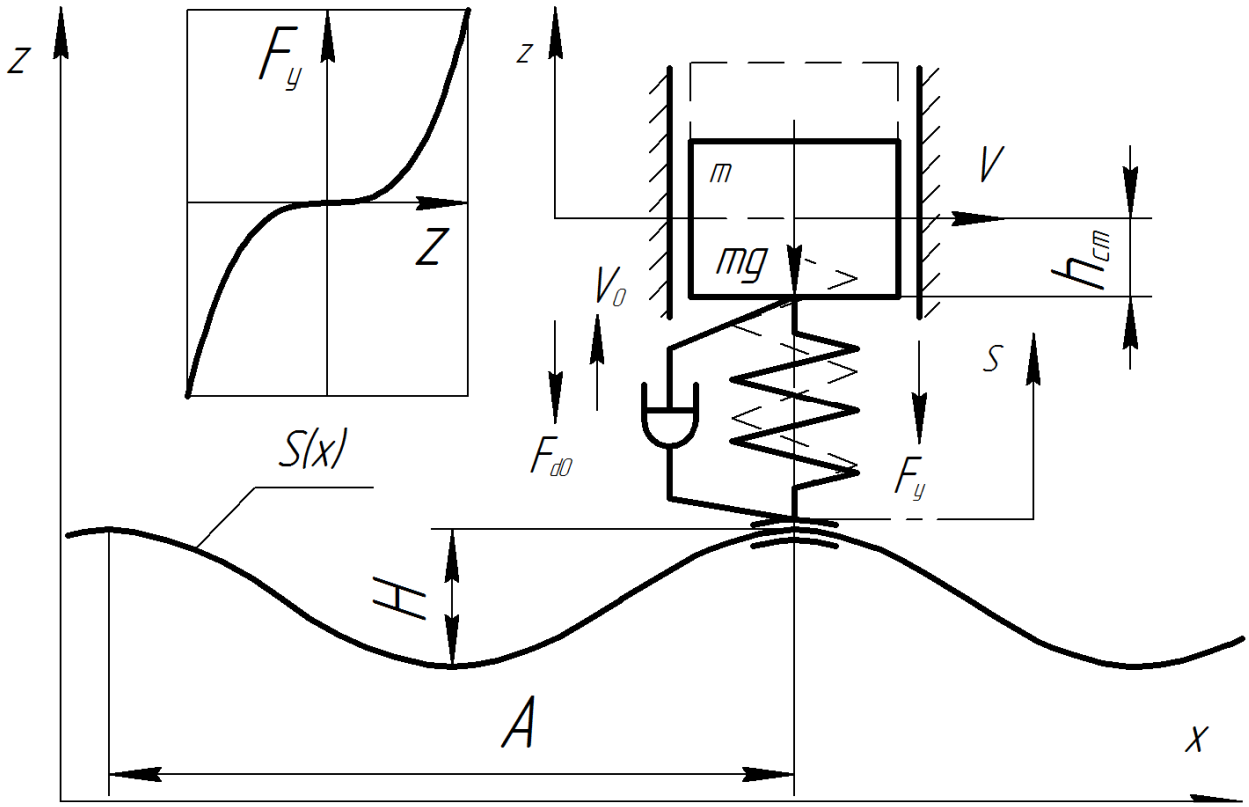

Рис. 1. Расчетная схема

перемещению кузова F_{d0} при заданной характеристике амортизатора, зависящей от перемещения кузова [6].

Возмущающим воздействием является профиль дороги: $S(x) = \frac{H}{2} sin(\frac{2\pi}{A}x)$ или через временную зависимость

$$S(t) = \frac{H}{2} sin(\omega t), \tag{17}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{A}V$ – частота возмущающего воздействия.

Дифференциальное уравнение движения системы с нелинейной жесткой характеристикой (7) принимает следующий вид:

$$m\ddot{z} = \frac{mg}{h_{\text{ст}}}\left(h_{\text{ст}} - (z + \gamma z^3) + \frac{H}{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{A}Vt\right)\right) + \\ + \frac{P_{d0}}{V_0}\left(\frac{H}{2}\cdot\frac{2\pi}{A}\cos\left(\frac{2\pi}{A}Vt\right) - \dot{z}\right) - mg. \quad (18)$$

Для мягкой характеристики:

$$m\ddot{z} = \frac{mg}{h_{\text{ст}}}\left(h_{\text{ст}} - (z - \gamma z^3) + \frac{H}{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{A}Vt\right)\right) + \\ + \frac{P_{d0}}{V_0}\left(\frac{H}{2}\cdot\frac{2\pi}{A}\cos\left(\frac{2\pi}{A}Vt\right) - \dot{z}\right) - mg, \quad (19)$$

где γ – коэффициент нелинейности системы. Как видно из уранений (18), (19) модели для жесткой и мягкой характеристики аналогичны и отличаются лишь знаком сумматора на вход γz^3.

```
% Файл данных для модели нелинейной системы подрессоривания
m = 1000;  % Подрессоренна масса, кг
g = 9.81;  % Ускорение свободного падения
f0 = 0.1;  % Статический прогиб подвески, м
y = 3; % Коэффициент нелинейности
V_max = 1.7;  % Максимальная скорость движения, м/с
V_min = 1.4; % Минимальная скорость движения, м/с
A = 0.9;  % Частота неровностей дороги, м
H = 0.05;  % Высота неровностей, м
pd0 = 8000;  % Сила сопротивления в демпфере при скорости v0, Н
v0 = 10;  % Скорость перемещения подвески при силе pd0, м/с
delta_V = 0.002; % Шаг увеличения скорости движения, м/с
delta_t = 5; % Время движения с постоянной скоростью, м/с
T = 2 * (V_max - V_min) / delta_V * delta_t; % Время симуляции, с
```

Рис. 2. Данные для математической модели

Численные данные модели движения автомобиля по твердой синусоидальной опорной поверхности показаны на рис. 2. На рисунке 3 представлена модель, имеющая жесткую характеристику. Принципиальная особенность модели заключается в том, что изменение частоты происходит в процессе симуляции модели и заключается в изменении скорости движения автомобиля $\omega(V) = \frac{2\pi}{A}V$. В качестве блока задающего изменение скорости выступает блок Signal Builder, на выходе из которого получаем значения в диапазоне $[0; 1]$.

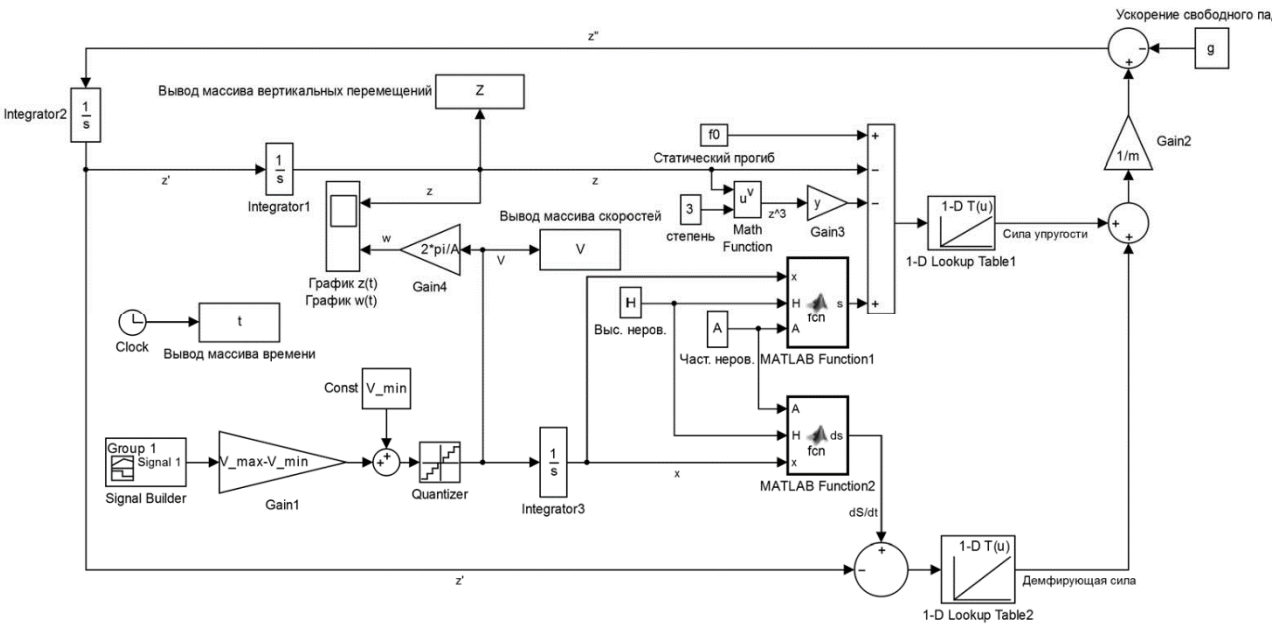

Рис. 3. Математическая модель с жесткой характеристикой

С помощью преобразований получаем:

$$V(h_v) = (V_{max} - V_{min})h_v(t) + V_{min},$$

где $h_v(t)$ – задающая функция на выходе из Signal Builder, V_{max}, V_{min} – максимальная и минимальная скорость автомобиля при симуляции.

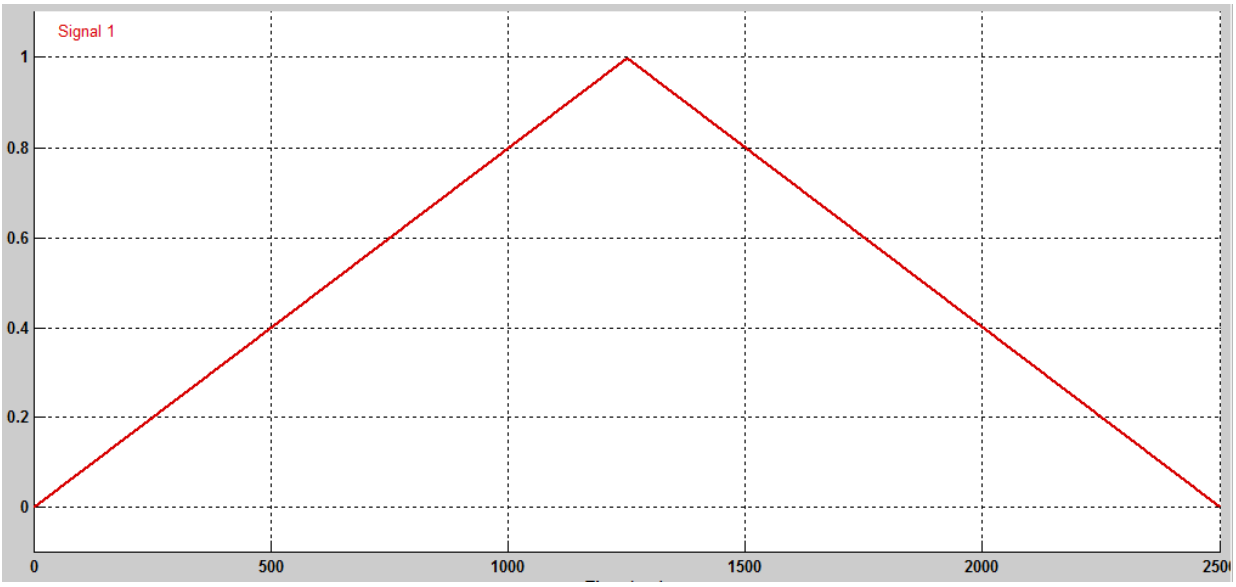

Рис. 4. Сигнал на выходе из блока Signal Builder

Сигнал блока Signal Builder изображен на рисунке 4 и представляет собой линейное возрастание от нуля до единицы и симметричное ему убывание. С помощью блока

Quantizer преобразуем линейное возрастание скорости в ступенчатое с шагом по скорости ΔV и по времени Δt.

С помощью блоков интегрирования Integrator1, Integrator2, Integrator3 на выходе из вертикальных скоростей $\dot{z}$ получаем вертикальные перемещения z, из вертикальных ускорений $\ddot{z}$ вертикальную скорость $\dot{z}$, и горизонтальные перемещения x, из горизонтальной скорости движения автомобиля V. Все начальные условия интеграторов нулевые. Нелинейность задается с помощью ответвления от ветви z и преобразованием блоком Math Function в кубическую зависимость z^3.

В блоках MATLAB Function1 и MATLAB Function2 формируется сигнал изменения профиля дороги $S(t) = \frac{H}{2} sin\left(\frac{2\pi}{A}x\right)$ и его производная $\dot{S}(t) = H\frac{\pi}{A} cos\left(\frac{2\pi}{A}x\right)$ соответственно. На вход в блоки подаются значения H, A, x.

Блок 1-D Lookup Table1 задает линейную либо кусочно-линейную функцию с помощью точек и выполняет аппроксимирующую роль. Задав внутри блока точки $[0; 0]$ и $[h_{\text{ст}}; mg]$, получаем линейную зависимость силы упругости от упругих деформаций пружины. Подавая на вход деформацию пружины, блок аппроксимирует по заданным точкам и выводит значение силы упругости. Блок 1-D Lookup Table2 выполняет аналогичную функцию, но только для силы демпфирования через точки $[0; 0]$ и $[V_0;\ F_{d0}]$. Согласно дифференциальным уравнениям складываем эти силы, делим на массу автомобиля, прибавляем ускорение свободного падения и получаем на выходе вертикальные ускорения кузова $\ddot{z}$.

В блоке графиков ведется построение функции вертикальных перемещений от времени $z(t)$, представляющей собой синусоиду, и функции частоты от времени $\omega(t)$, представляющей собой ступенчато возрастающую функцию (рис. 5 – жесткая нелинейность, рис. 8 – мягкая нелинейность). С помощью блоков вывода массива скоростей, вертикальных перемещений и времени из Simulink выводится на рабочее пространство Matlab названные массивы. С помощью программы массив обрабатывается и строится АЧХ (рис. 6 – жесткая нелинейность, рис. 7 – мягкая нелинейность).

Для сравнения с теоретической АЧХ необходимо привести коэффициенты реальной модели к теоретическим коэффициентам по уравнению (14):

$$2\lambda = \frac{F_{d0}}{V_0 m}\frac{g}{h_{\text{ст}}}\sqrt{\left(\frac{mgH}{2h_{\text{ст}}}\right)^2 + \left(\frac{\pi H F_{d0}}{A V_0}\right)^2}$$

$$\varepsilon = c\gamma\left(\frac{h_{\text{ст}}}{g}\right)^3\left[\left(\frac{mgH}{2h_{\text{ст}}}\right)^2 + \left(\frac{\pi H F_{d0}}{AV_0}\right)^2\right]$$

Теоретическая АЧХ по уравнению (14) для построения в Matlab для мягкой характеристики:

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 - 2\lambda^2 \pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 - 3\varepsilon x_1^2 - 4)}.$$

для жесткой характеристики:

$$\eta^2 = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon x_1^3 - 2\lambda^2 \pm \sqrt{\frac{1}{x_1^2} + \lambda^2(4\lambda^2 + 3\varepsilon x_1^2 - 4)}.$$

Анализ жёсткой характеристики. Рассматриваем вертикальные перемещения кузова (рис. 5) и АЧХ жесткой характеристики (рис. 6).

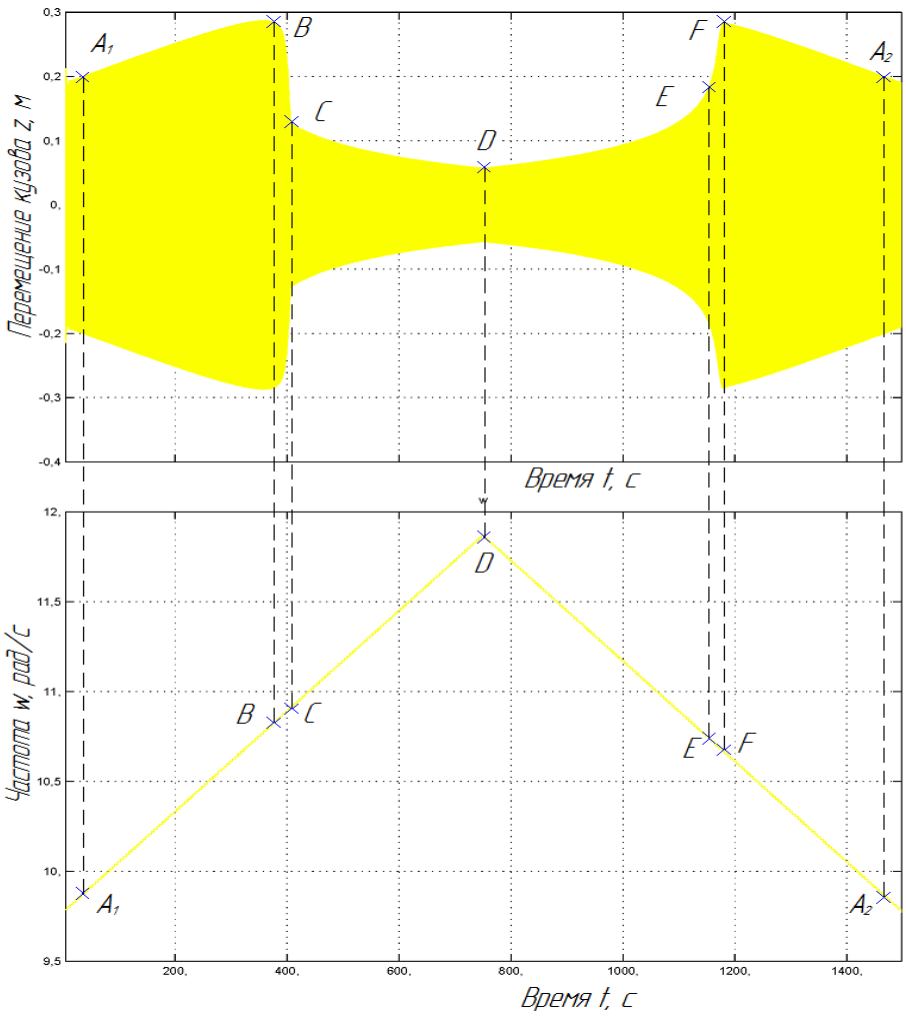

Рис. 5. Графики $z(t)$ и $\omega(t)$ с жесткой характеристикой

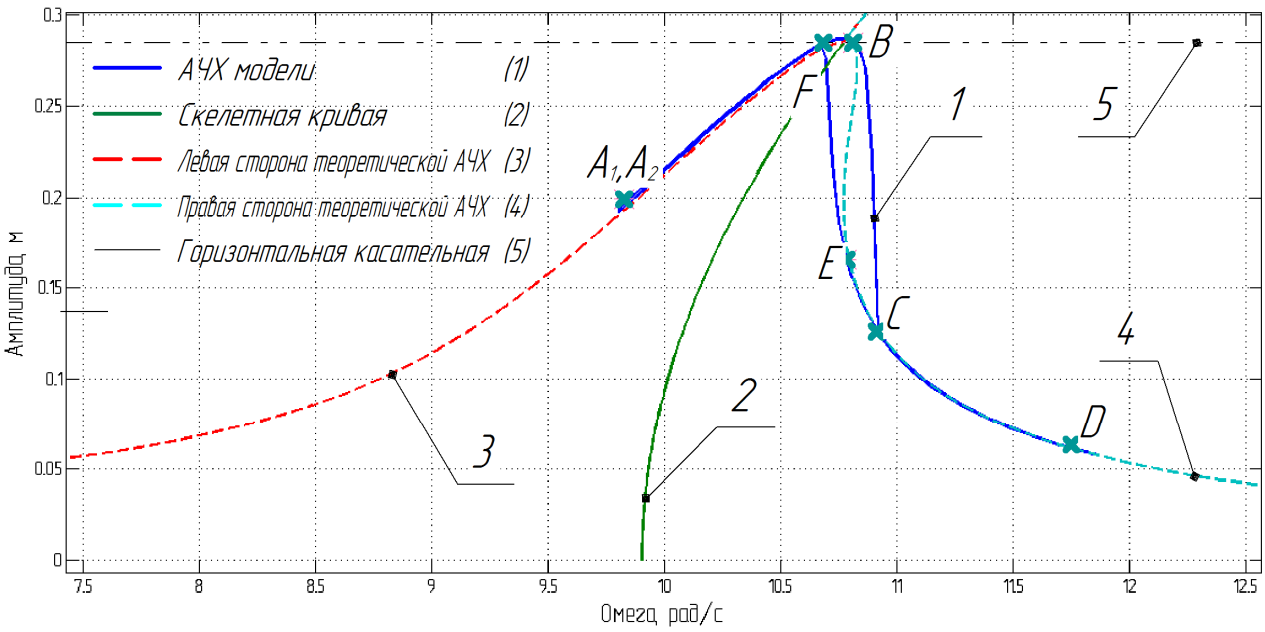

Рис. 6. Жесткая АЧХ

При повышении частоты колебаний на участке A_1BCD амплитуда колебаний возрастает до точки *B*, а затем резко срывается в точку *C* и плавно убывает. С точки D начинается возрастание частоты в обратную сторону, и, как следствие, плавное возрастание амплитуды колебаний. В точке E амплитуда резко повышается до точки F и затем плавно убывает на промежутке FA_2. Таким образом характеристика при повышении и понижении частоты ведет себя не одинаково, что подтверждает теоретический расчет.

Анализ мягкой характеристики. Рассматриваем вертикальные перемещения кузова (рис. 8) и АЧХ жесткой характеристики (рис. 7).

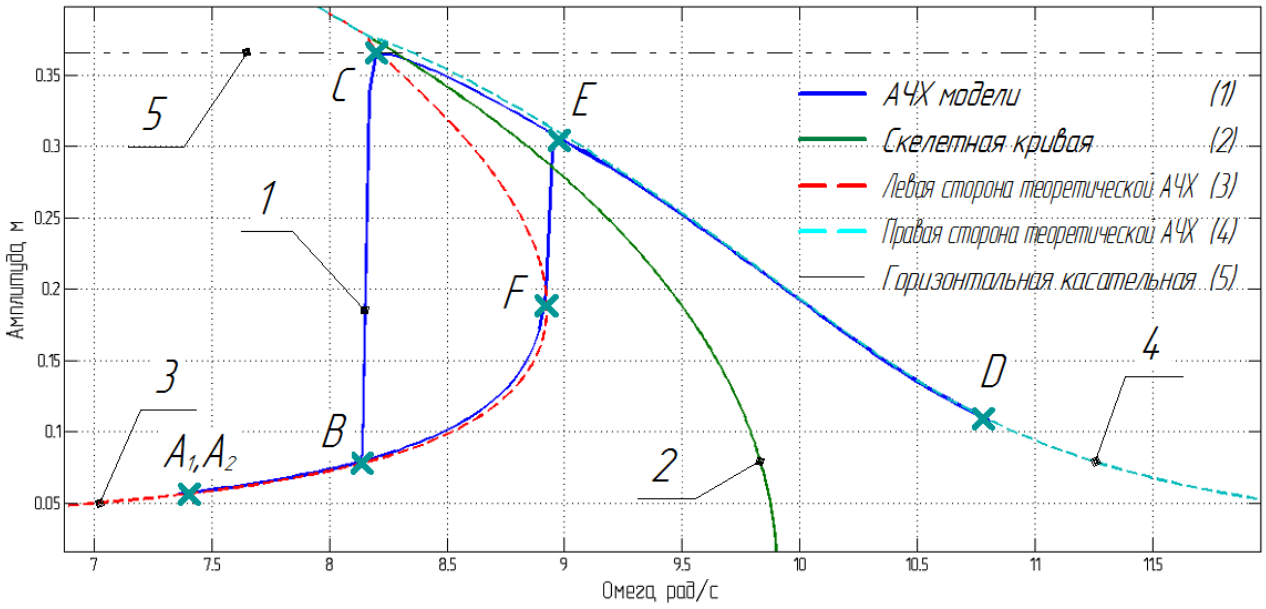

Рис. 7. Мягкая АЧХ

При повышении частоты колебаний на участке A_1BCD амплитуда колебаний возрастает до точки *B*, а затем резко повышается до точки *C* и плавно убывает. С точки D начинается возрастание частоты в обратную сторону, и, как следствие, плавное

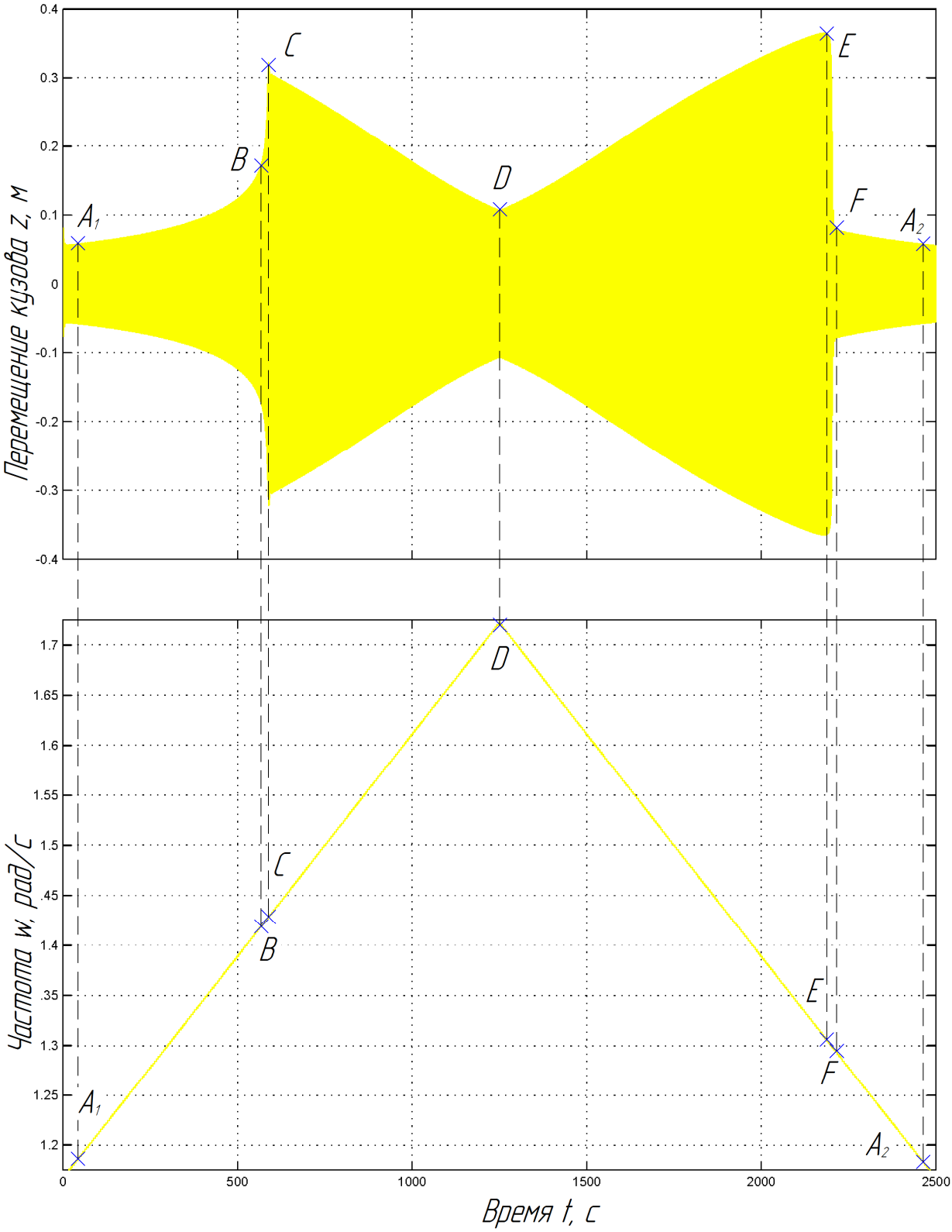

Рис. 8. Графики $z(t)$ и $\omega(t)$ с мягкой характеристикой

возрастание амплитуды колебаний. В точке E амплитуда резко срывается до точки F и затем плавно убывает на промежутке FA_2.

В данной работе рассматривается кубическая характеристика, которая является приближением реальной характеристики [1]. Эллиптические элементы, которые могут применяться в различных конструкциях [5], в действительности дают синусоидальную характеристику $\varphi_1 = \varphi_2 + \gamma \sin \varphi_2$.

Данная методика расчета универсальна и позволяет определять характеристики любой нелинейности, в том числе и синусоидальной. Так же актуальной является задача разработки методики расчета двухмассовой системы и создание экспериментальной установки с эллиптическими элементами в одномассовой системе.

Список литературы

1. Петров И.П., Петухов А.И. Колебания нелинейных систем и построение их амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) // Молодёжный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 9. Режим доступа: http://sntbul.bmstu.ru/doc/618362.html (дата обращения 02.12.2014).
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 777 с.
4. Дербаремдикер В.С. Гидравлические амортизаторы автомобилей. М.: Транспорт, 1969. 237 с.
5. Петров И.П., Петухов А.И. Нелинейные колебания в подвеске транспортных систем с двумя степенями свободы // Молодёжный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 3. Режим доступа: http://sntbul.bmstu.ru/doc/715657.html (дата обращения 02.12.2014).
6. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение, 1972. 392 с.
7. Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М.: ДМКПресс, 2008. 784 с.
8. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 800 с.