

УДК 004.588

Компьютерная модель эффекта Талбота

*Щетинин Г.А., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»*

*Научные руководители: Романова Т.Н., к.ф.-м.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Скуйбин Б.Г., к.ф.-м.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

Приобретение современного оборудования для физических опытов, его отладка, а также поддержание в постоянном рабочем состоянии требует немалых вложений как финансовых, так и организационных. А это не всегда возможно, поэтому возникает необходимость создания симуляторов физических опытов, которые бы позволяли познакомиться с сутью опыта, проверить полученные результаты и проводить вычисления и измерения на сложных для вычисления участках (например, дробные расстояния Талбота).

Компьютерная модель эффекта Талбота позволяет студентам, занимающимся в Студенческой экспериментальной лаборатории физики и в Доме Физики получить информацию об эффекте Талбота. Программа может быть использована с одной из следующих целей:

- 1) Знакомство с эффектом Талбота и построение ковра Талбота.
- 2) Проверка результатов, полученных на дробных расстояниях Талбота с помощью построенной математической модели ковра Талбота.

Программа может быть запущена на любом компьютере под ОС Windows и может быть использована как на лабораторных работах студентами, так и дома при выполнении домашних заданий и подготовки к лабораторным работам.

Студент, получивший задание по эффекту Талбота, например, методическое пособие - инструкцию, прилагаемое к данному симулятору с легкостью задает исходные данные: количество щелей в дифракционной решетке и отношение светлой части решетки к темной. После того как будет построен ковер Талбота студент имеет дополнительную возможность узнать частоту максимумов на дробном расстоянии Талбота.

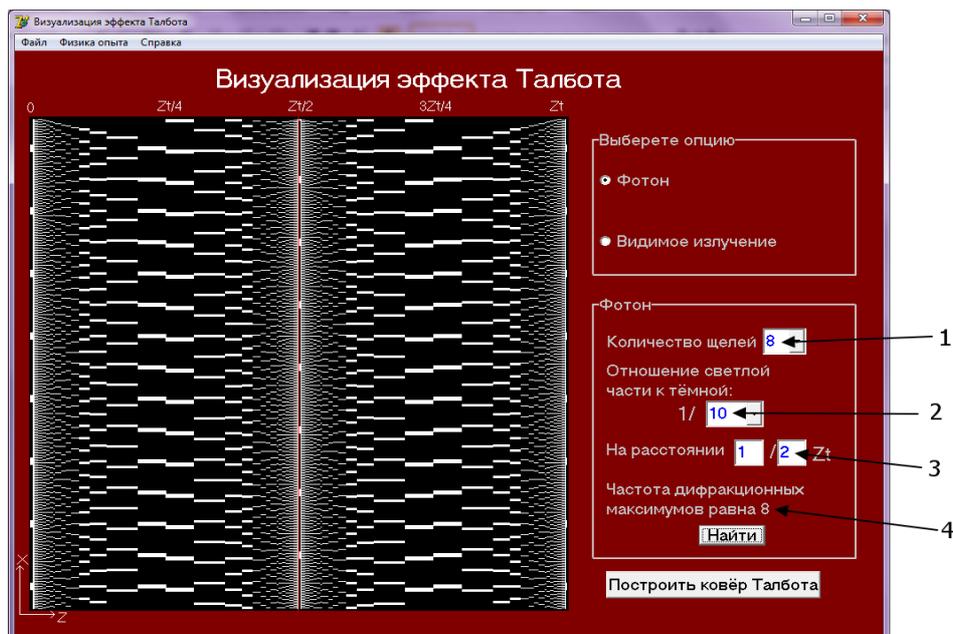


Рис. 1. Ковер Талбота

1. Окно для задания количества щелей решетки.
 2. Окно для задания отношения светлой части дифракционной решетки к темной.
 3. Дробное расстояние Талбота, на котором будет рассчитана частота дифракционных максимумов.
 4. Частота дифракционных максимумов на дробном расстоянии Талбота.
- Построение осуществляется на отрезке $[0; Z_T]$.

Так выглядит физическая установка для изучения эффекта Талбота, собранная в студенческой экспериментальной лаборатории физики:

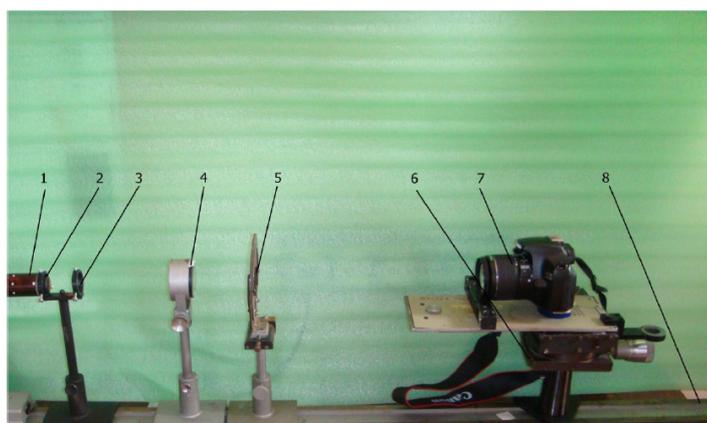


Рис. 2. Физическая установка для изучения эффекта Талбота

Установка состоит из лазера (1), двух линз (2 и 4), светофильтра (3), дифракционной решетки с фильтром (5), стола (6) с фотокамерой (7). Всё это находится на оптической скамье (8). Подробно устройство физической установки для изучения эффекта Талбота рассмотрено в статье [1]. Экспериментально получены фотографии, совпадающие с расчетной моделью из статьи [1] (рис. 3) и компьютерной моделью эффекта Талбота.

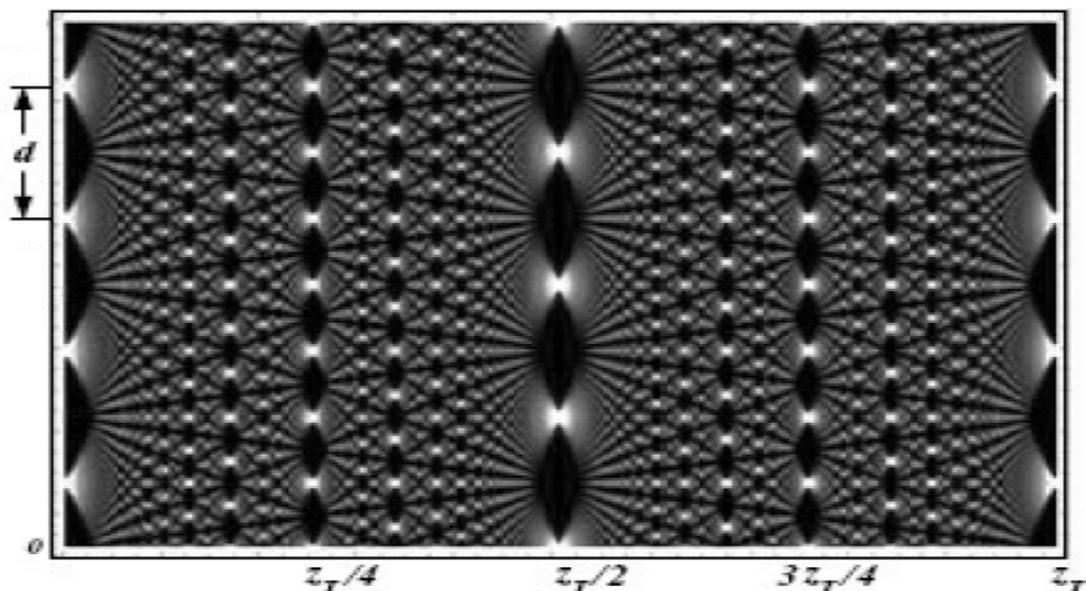


Рис. 3. Расчетная модель ковра Талбота

Для построения ковра Талбота необходимо изучить и понять теорию эффекта Талбота. Впервые эффект саморепродукции на дифракционной решетке наблюдал известный английский физик и химик Генри Фокс Талбот [5]. Явление саморепродукции – явление периодического самовоспроизведения изображения предмета, освещенного плоской монохроматической волной без использования фокусирующих/преломляющих оптических приборов, на некотором расстоянии от предмета.

Это эффект (позже названный эффектом Талбота) изучал Рэлей [6]: он получил формулу для расчета длины Z_T , которую назвали *длиной Талбота*:

$$Z_T = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (1)$$

где d – период решетки, а λ – длина падающей волны.

Волновое уравнение для эффекта Талбота имеет вид [1]:

$$\psi(x, z) = A_0 + \sum_{n \neq 0} A_n e^{2\pi i \left(n \frac{x}{d} - n^2 \frac{z}{z_T} \right)} \quad (2)$$

где $A_0 = 1 + \frac{a}{d}(e^{i\varphi_0} - 1)$, φ_0 – фазовый шаг,

A_n – компоненты Фурье-разложения периодической функции пропускания:

$$A_n = \begin{cases} \frac{a}{d} [e^{i\varphi_0} - 1] \operatorname{sinc} \frac{na}{d}, & \text{для фазовых решеток} \\ \operatorname{sinc} \frac{na}{d}, & \text{для амплитудных решеток} \end{cases}$$

z – расстояние от объекта,

x – отклонение по вертикали от края решетки,

n – целое число,

$\operatorname{sinc}(x)$ – кардинальный синус:

$$\operatorname{sinc}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Чтобы определить интенсивность волны в данной конкретной точке нужно умножить волновую функцию $\psi(x; z)$ (имеющую комплексный вид) на сопряженное $\psi^*(x; z)$: получаем интенсивность света в данной конкретной точке.:

$$I(x; z) = \psi(x; z) \cdot \psi^*(x; z) \quad (3)$$

Алгоритм построения компьютерной модели:

1) Пользователь вводит число щелей в решетке (k) и отношение светлой части дифракционной решетки к темной части (a).

2) Выбираем де Бройлевскую длину волны. Ширину щели выбираем такую, чтобы фотон мог проходить через щель (b). Вычисляем Z_T по формуле (1).

3) Вычисляем длину дифракционной решетки: $L = b \cdot (1+a) \cdot k$.

4) Вычисляем масштаб для ковра Талбота: коэффициент масштабирования один из двух $kf = (\text{ширина экрана})/Z_T$ или $kf = (\text{высота экрана})/L$. Выбираем минимальный коэффициент масштабирования.

5) Вычисляем интенсивность света для каждой точки экрана: $x \in [0; L]$ и $z \in [0; Z_T]$, где Z_T и L уже вычислены в пунктах 2 и 3 соответственно.

6) Определяем частоту дифракционных максимумов на дробном расстоянии Талбота ($\frac{p}{q} Z_T$): считаем кол-во светлых точек при $Z = \frac{p}{q} Z_T$, числа p и q вводятся пользователем. Подставляем Z (2) и считаем количество дифракционных максимумов: участков $[x_1, x_2]$, $x \in [0; L]$, у которых интенсивность не равна нулю.

На рис. 4 приведен интерфейс программы: на экране изображен ковер Талбота на расстоянии $Z = 1/3 Z_T$. Светлые точки изображают максимальную интенсивность света, темные точки – минимальную.

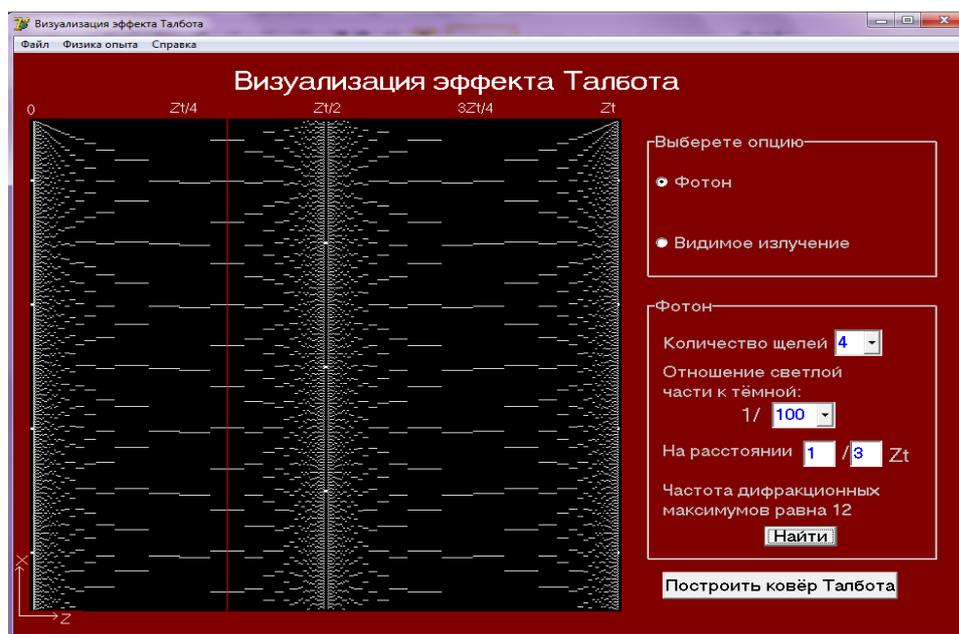


Рис. 4. Частота максимумов на расстоянии $Z = 1/3 Z_T$

На рис. 5 приведен сравнительный график интенсивностей световой волны на расстоянии $1/2 Z_T$. Сплошной линией изображена интенсивность света $I(x)$, полученная с помощью аналитических расчетов в работе [1]. Пунктирной линией изображена интенсивность света, вычисленная с помощью разработанной авторами программы. Различие аналитических и численных расчетов не превышает 1%.

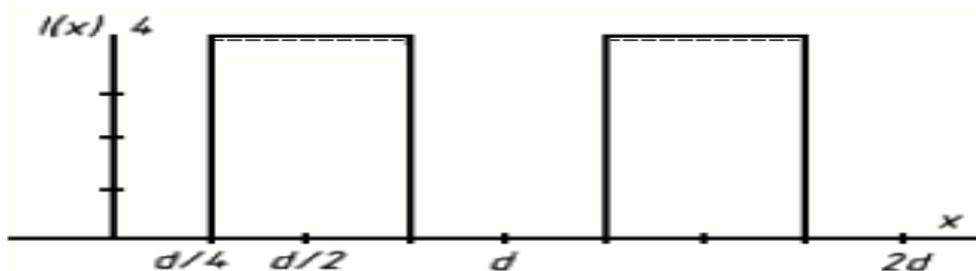


Рис. 5. Сравнительный график интенсивностей световой волны $I(x)$ при различных значениях периодах решетки d (сплошная линия-аналитический расчет, пунктирная-численный расчет)

В Таблице приведены для сравнения значения интенсивности световой волны $I(x)$ при различных расстояниях от дифракционной решетки.

Расстояние от дифракционной решетки (Z)	Интенсивность света I(x) (аналитический расчет [1])	Интенсивность света I(x) (численный расчет)
0	4	4
$\frac{1}{4} Z_T$	2	2
$\frac{1}{2} Z_T$	4	3.(9)
$\frac{3}{4} Z_T$	2	2
Z_T	4	4

Вывод. Построена компьютерная модель эффекта Талбота для случая падения фотона на дифракционную решетку. Адекватность разработанной компьютерной модели подтверждается хорошим совпадением аналитических [1] и численных расчетов интенсивностей световой волны для различных периодов решетки d и различных дробных значениях длины Талбота ($Z = 1/3 Z_T$, $Z = 1/2 Z_T$). Погрешность не превышает 1%. Разработан дружеский интерфейс компьютерного симулятора, который позволит исследовать эффект Талбота при различных значениях параметров, в том числе при таких значениях, при которых физический эксперимент провести будет затруднительно или не возможно. Симулятор может быть использован при проведении лабораторных работ по физике у студентов. При незначительных доработках симулятор может использоваться не только для ковра Талбота, образуемого подающим на дифракционную решетку фотоном, но и любыми другими волнами света.

Список литературы

1. Скуйбин Б.Г., Смирнов Е.В., Евсеенко Е.А., Кременецкий Н.О., Мусихин А.А., Пашков Б.С. Исследование эффекта Талбота на двумерных периодических структурах в студенческой лаборатории // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/603421.html> (дата обращения 07.03.2014).
2. Архангельский А.Я. Программирование в Delphi для Windows. Версии 2006, 2007, Turbo Delphi. М.: Бином, 2007. 1248 с.
3. Фаронов В.В. Delphi Программирование на языке высокого уровня: учебник для вузов. СПб.: Питер, 2010. 640 с.
4. Lohman A.W., Knuppertz H., Jahns J. Fractional Montgomery effect: a self-imaging phenomenon // J.Opt.Soc.Am.A. 2005. Vol. 22, No. 8. P. 1500-1508.

5. Talbot H.F. Facts relating to optical science // Philos. Mag. 1836. No IV. 9. P. 401-407.
6. Lord Rayleigh. On copying diffraction grating and on some phenomenon connected therewith // Philos. Mag. 1881. No. 11. 196-205.