### электронный научно-технический ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК

Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

## Продольные колебания пьезокерамического стержня при возбуждении электрическим полем

# 12, декабрь 2014 Сдобников А. Н., Сдобников С. А.

УДК: 629.76/78.002.3

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана ansdobnikov@mail.ru

журнал

### 1. Основные пьезоэлектрические характеристики пьезокерамических стержней преобразователя из пьезокомпозитного материала 1-3 связанности

Пьезоактивные стержни, выполненные из пьезокерамики, используются при создании композитных блоков с пьезоэлектрическими свойствами, которые применяются в датчиках различного назначения, гидроакустических антеннах, актюаторах, трансдьюсерах [1], [2], [3]. В композитных блоках связанности 1-3 пьезокерамические стержни поляризованы вдоль своей продольной оси симметрии, что обеспечивает поляризацию композитного блока в целом по толщине. Основные характеристики пьезокерамического материала стержней, используемые в расчетах, приведены в таблице 1 [4], [5].

Таблица 1. Физические и электрофизические характеристики пьезокерамического материала ЦТС-19 и ЦТС-36

N⁰	Наименование	Обозначение	ЦТС-19	ЦТС-36
1.	Плотность пьезокерамического материала, кг/м <sup>3</sup>	ρ	7510	7910
2.	Пьезоэлектрические модули, Кл/ Н			
		- d <sub>31</sub>	116e-12	89e-12
		d <sub>33</sub>	298e-12	221e-12
3.	Коэффициенты упругой податливости при постоянной индукции, м <sup>2</sup> /Н			
		s <sup>D</sup> <sub>11</sub>	14.0e-12	10.4e-12
		s <sup>D</sup> <sub>12</sub>	-6.6e-12	-4.7e-12
		s <sup>D</sup> <sub>13</sub>	-3.4e-12	-2.4e-12
		s <sup>D</sup> <sub>33</sub>	10.1e-12	7.5e-12

http://engbul.bmstu.ru/doc/742261.html

4. Коэффициенты упругой жесткости					
	при постоянной напряженности электрического поля, Н/м <sup>2</sup>				
		$\mathbf{C}_{11}^{\mathrm{E}}$	12.2e10	15.3e10	
		$C_{12}^E$	7.4e10	8.7e10	
		C <sub>13</sub>	7.1e10	8.7e10	
		C <sup>E</sup> <sub>33</sub>	11.0e10	12.7e10	
5.	Пьезоэлектрические постоянные				
		е <sub>31</sub> , Кл/м <sup>2</sup>	-1.7	-2.1	
		е <sub>33</sub> , Кл/м <sup>2</sup>	16.4	12.4	
		е <sub>15</sub> , Кл/м <sup>2</sup>	10.3	11.3	
		g <sub>33</sub> , В*м/Н	22.9e-3	38.0e-3	
		h <sub>33</sub> , В/м	213e7	458e7	
6.	Относительная диэлектрическая проницаемость при постоянной деформации – (S):при постоянном напряжении – (T)				
		$\epsilon_{33}^{S}/\epsilon_{0}$	873	304	
		$\epsilon_{11}^{S}/\epsilon_{0}$	913	572	
		$\epsilon_{33}^{T}/\epsilon_{0}$	1470	655	
		$\epsilon_{11}^{T}/\epsilon_{0}$	1375	1130	

### 2. Аналитические решения задачи о вынужденных продольных колебаниях пьезокерамического стержня в продольном электрическом поле

Аналитические решения задачи о продольных колебаниях призматического пьезокерамического стержня для двух условий его деформирования: а) боковые грани свободны от механических закреплений; б) стесненное деформирование стержня в поперечных направлениях.

### 2.1 Продольные колебания свободного пьезокерамического стержня в продольном электрическом поле

Рассмотрим призматический пьезокерамический стержень, длина и вектор поляризации которого совпадают с осью Z (рис.1). Электроды нанесены на торцевые поверхности z = 0 и z = L. Длина стержня значительно больше его поперечных размеров. Материал стержня – ЦТС-19. Характеристики материала приведены в таблице1.



Рис. 1. Свободный стержень из пьезоэлектрического материала

Стержень возбуждается электрическим полем с разностью потенциалов  $\Delta V e^{j\omega t}$ , а боковые грани стержня свободны от нормальных и касательных механических напряжений. При этом не равными нулю остаются только напряжения  $\sigma_z$  и уравнение движения имеет вид [4]:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \rho \omega^2 u_z = 0 \tag{1}$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость стержня значительно больше диэлектрической проницаемости окружающей среды (пара пьезокерамика–воздух на боковых гранях компоненты вектора электрической индукции Dx и Dy равны нулю (Dx = Dy = 0). Поскольку электрическое поле считается однородным в плоскости XY, то в соответствии с законом Кулона [6] компонента вектора электрической индукции Dz = const uфизические соотношения удобно представить в виде [5],[7]:

$$\varepsilon_z = s_{33}^D \sigma_z + g_{33} D_z$$
  

$$E_z = -g_{33} \sigma_z + \beta_{33}^T D_z$$
(2)

Разрешающее уравнение для задачи о вынужденных колебаниях стержня может быть записано при использовании соотношения  $\varepsilon_z = du_z/dz$ , уравнения (1), и первого соотношения (2) в виде

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} + \rho \omega^2 s_{33}^D u_z = 0 , \qquad (3)$$

при условиях на торцах:

$$\frac{du_z}{dz} = g_{33} D_z, z = 0, L.$$
(4)

Частное решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4) имеет вид

$$u_z(z) = \frac{g_{33}D_z}{k} \left( \sin(kz) - \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \cos(kz) \right),$$
(5)

где  $k^2 = \rho \omega^2 s_{33}^D$ ,  $\psi = kL$  – безразмерная частота.

Компонента вектора электрической напряженности  $E_z$  в рассматриваемом случае является постоянной величиной, поэтому разность потенциалов между торцевыми электродами определяется соотношением

$$\Delta V = -\int_{0}^{L} E_{z} dz$$

При этом, интегрируя второе соотношение (2), получим:

$$\Delta V = -\frac{g_{33}}{s_{33}^{D}} [u_z(L) - u_z(0)] + \left(\frac{g_{33}^2}{s_{33}^{D}} + \beta_{33}^T\right) L D_z,$$

или с учетом (5)

$$\Delta V = L\beta_{33}^T D_z \left( 1 + k_1^2 - k_1^2 \frac{2}{\psi} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right), \tag{6}$$

где использованы обозначения

$$\psi = kL = \omega L \sqrt{\rho s_{33}^D}$$
,  $k_1^2 = \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D \beta_{33}^T}$ .

Разделив выражение (6) на ток смещения,  $I = i \cdot \omega \cdot a \cdot b \cdot D_z$ , запишем выражение для импеданса стержня при его колебаниях в продольном поле:

$$Z_{1} = \frac{L\beta_{33}^{T}}{i \cdot \omega \cdot a \cdot b} \left( 1 + k_{1}^{2} - k_{1}^{2} \frac{2}{\psi} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right).$$
(7)

При отсутствии потерь в материале импеданс стержня имеет чисто реактивный характер, а частоты резонанса и антирезонанса совпадают с нулями и полюсами ции  $Z_1(\omega)$  в (7). При этом условие резонанса ( $Z_1 = 0$ ) позволяет записать трансцендентное уравнение, решением которого будут являться резонансные частоты продольных колебаний рассматриваемого стержня:

$$tg \; \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} \left( 1 + \frac{1}{k_1^2} \right). \tag{8}$$

Первый корень уравнения (8) при размерах пьезокерамического стержня a = b = 0.55 мм, L= 0.8 мми материале – пьезокерамика ЦТС-19 (таблица 1) позволяет определить первую (низшую) частоту резонанса продольных колебаний стержня равную  $f_{r1} \approx 1,82$  МГц.

Условие антирезонанса  $Z_1 \to \infty(\psi = \pi(2n - 1), n = 1, 2, 3...)$  позволяет определить частоту антирезонанса:

$$f_{a1} = \frac{2n-1}{2L\sqrt{\rho s_{33}^D}}.$$
(9)

С учетом данных пьезокерамики ЦТС-19, приведенных в таблице 1, расчетное значение низшей частоты антирезонанса по соотношению (9) равно  $f_{a1} = 2.27$  МГц.

Другим, наиболее наглядным и информативным способом определения частот резонанса и антирезонанса является построение амплитудно-частотной характеристики исследуемого объекта. Зависимость амплитуды адмитанса ( $|Y_1| = abs (1/Z_1)$  стержня от частоты возбуждения в диапазоне частот от 0 до 9 МГц показана на на рис.2.



**Рис. 2.** Зависимость амплитуды адмитанса |*Y*| от частоты возбуждения для пьезокерамического стержня с боковыми гранями, свободными от механических напряжений; материал стержня ЦТС-19

Как следует из графика рис.2, в указанном диапазоне частот существуют две резонансные частоты и соответствующие им две частоты антирезонанса:

$$f_{r1} = 1,82$$
 МГц,  $f_{a1} = 2,27$  МГц,  
 $f_{r2} = 6,66$  МГц,  $f_{a2} = 6,81$  МГц.

При принятых допущениях в рассматриваемом случае резонансные и антирезонансные частоты продольных колебаний стержня не зависят от площади поперечного сечения стержня (соотношения (8) и (9)), а определяется лишь свойствами материала и длиной стержня.

### 2.2. Вынужденные продольные колебания пьезокерамического стержня при условиях стеснения в поперечных направлениях

На рис.3 показан призматический пьезокерамический стержень с электродированными торцами, боковые грани которого имеют шарнирное опирание в продольном направлении, что реализует стесненное деформирование стержня в поперечных направлениях. Стержень возбуждается электрическим полем с разностью потенциалов  $\Delta V e^{j\omega t}$  и при продольных колебаниях в условиях стесненного деформирования можно считать, что только компонента деформаций  $\varepsilon_z$  отлична от нуля. Так как поверхности торцев стержня Z = 0, L эквипотенциальны, то эквипотенциальными будут и любые сечения Z = const им параллельные. В этом случае ненулевыми будут только компоненты векторов электрической напряженности  $E_z$  и электрической индкукции  $D_z$ .

Поэтому в качестве независимых переменных целесообразно выбрать переменные  $\varepsilon_z$  и  $D_z$  и определяющие соотношения в виде [8],[9]:

$$\sigma_z = c_{33}^D \varepsilon_z - h_{33} D_z ,$$
  

$$E_z = -h_{33} \varepsilon_z + \beta_{33}^S D_z.$$
(10)



Рис.3. Пьезокерамический стержень, стесненный в поперечных направлениях

В этом случае статический коэффициент электромеханической связи, характеризующий эффективность преобразования электрической и механической энергий при однородной сжимающей продольной нагрузке, зависит только от свойств материала и определен соотношением:

$$k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{c_{33}^D \beta_{33}^s}.$$
 (11)

При гармоническом возбуждении электрическим полем уравнение движения стержня имеет вид [5]:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \rho \omega^2 s_{33}^D u_z = 0.$$
 (12)

Используя первое уравнение соотношений (10) с учетом равенства  $\varepsilon_z = \frac{du_z}{dz}$  получим уравнение движения относительно переменной  $u_z$ :

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{c_{33}^D} u_z = 0 \tag{13}$$

при условиях на торцах:

$$\frac{du_z}{dz} = \frac{h_{33}}{c_{33}^D} D_z, z = 0, L. (14)$$
(14)

Частное решение (13), удовлетворяющее граничным условиям (14) может быть записано в виде

$$u_{z}(z) = \frac{h_{33}D_{z}}{c_{33}^{D}k} \Big( \sin(kz) - \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \cos(kz) \Big),$$
(15)

где  $k^2 = \frac{\rho \omega^2}{c_{33}^D}$ ,  $\psi = kL$ – безразмерная частота.

Интегрируя второе соотношение (10) по *z*, можно получить соотношение для разности потенциалов, записанное через  $D_{z}$ . Разделив это выражение на ток смещения  $I = i \cdot \omega \cdot a \cdot D_z$ , получим выражение для импеданса стержня

$$Z_2 = \frac{L\beta_{33}^s}{i\cdot\omega\cdot a\cdot b} \left(1 - k_t^2 \frac{2}{\psi} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}\right).$$
(16)

Если потери в материале стержня не учитывать, то импеданс стержня носит чисто реактивный характер. Частоты резонанса и антирезонанса совпадают с нулем и полюсами функции*z*<sub>2</sub>.

На рис. 4 представлена графическая зависимость амплитуды адмитанса стержня  $(|Y_2| = abs(\frac{1}{Z_2}))$  от частоты в диапазоне частот от 0 до 9 МГц. В расчетах приняты следующие исходные данные: a = b = 0,55 мм, L = 0,8 мм, материал стержня – ЦТС-19.

В указанном диапазоне частот, как следует из расчетов и построенного по ним графика (рис. 4), существуют две резонансные частоты и соответствующие им две частоты антирезонанса:

$$f_{r1} = 2,44$$
 МГц,  $f_{a1} = 2,75$ МГц,  
 $f_{r2} = 8,14$  МГц,  $f_{a2} = 8,24$  МГц.



**Рис. 4.** Зависимость амплитуды адмитанса |*Y*<sub>2</sub>|для пьезокерамического стержня, стесненного в поперечных направлениях, от частоты возбуждения в диапазоне частот от 0 до 9 МГц ; материал ЦТС-19

Рассмотренные аналитические решения задачи о продольных колебаниях пьезокерамического стержня в продольном электрическом поле при различных условиях на боковых гранях стержня показывают возможность исследования на простейших расчетных схемах влияния условий, накладываемых на поперечные деформации стержня. В первом случае стержень рассматривался как свободный. Во втором случае предполагалось, что все компоненты деформаций в стержне, кроме продольной  $\varepsilon_z$ , равны нулю. Такие допущения позволяют говорить о стесненном в поперечном направлении деформировании стержня при его колебаниях. В дальнейшем для краткости эти условия будем называть «условиями стеснения» в поперечном направлении. Результаты сравнительного анализа полученных значений низших частот резонанса и антирезонанса для двух вариантов граничных условий на боковых гранях приведены в таблице 2.

#### Таблица 2

N⁰	Расчетная схема	<i>f<sub>r</sub></i> ,МГц	<i>f <sub>a</sub></i> , МГц
1.	Аналитическое решение задачи о продольных колебания стержня (п.3.1.1), материал ЦТС-19, 0.55x0.55x0.8мм (ШхГхВ) • Свободный стержень	1,82	2.27
2.	Аналитическое решение задачи о продольных колебания стержня (п.3.1.2.), материал ЦТС-19, 0.55x0.55x0.8мм (ШхГхВ) • Условия стеснения в поперечных направ- лениях	2.44	2.75

Введение условий стесненного деформирования пьезокерамического стержня повышает его резонансную частоту на 34%, а частоты антирезонанса более чем на 20% по сравнению со свободным стержнем. Качественный характер кривой адмитанса при этом полностью сохраняется, она лишь сдвигается вправо вдоль оси абсцисс (см. рис.3 и рис.4).

Полученные результаты аналитических решений использованы ниже в качестве справочных значений для тестирования разработанных программ, реализующих метод конечных элементов в пакете ANSYS [10],[11], [12].

### 3. Численные решения задачи о продольных колебаниях пьезокерамического стержня по МКЭ в среде ANSYS

Целью проведенных в настоящем подразделе исследований является проверка разработанных процедур конечно-элементного моделирования трехмерных задач в пакете ANSYS, которые предполагается использовать для расчета преобразователей из пьезокомпозитных материалов. Тестирование разработанных в пакете ANSYS программ проводится при сравнительном анализе полученных численных решений с аналитическими решениями задачи, приведенными в п.2.

### 3.1. Трехмерная конечно-элементная модель стержня из пьезокерамического материала ЦТС-19

На рис.5 представлена трехмерная КЭ модель пьезокерамического стержня с габаритными размерами (ШхГхВ) равными 0,55х0,55х0,8 мм.

Узлы, лежащие на торцевых плоскостях модели и принадлежащие электродированным поверхностям, сгруппированы по степени свободы VOLT в два подмножества (верхний и нижний электроды), что обеспечивает одновременное задание значения VOLT для каждого узла электрода при задании этого значения только для одного узла электрода.



Рис. 5. Трехмерная (3D) конечно-элементная модель пьезокерамического стержня. Габаритные размеры 0,55х0,55х0,8 мм (ШхГхВ); тип КЭ - SOLID5; Кол-во КЭ – 800. Материал стержня – ЦТС-19.

# 3.2. Результаты численных расчетов амплитудно-частотных характеристик пьезокерамического стержня с использованием 3D конечно-элементной модели в пакете ANSYS (гармонический анализ)

Рассмотрены два варианта трехмерных расчетных схем, соответствующих аналитическим решениям одномерной задачи о продольных колебаниях призматического стержня из пьезокерамического материала ЦТС-19, приведенных в п. 2:

• расчетная схема 1: Трехмерная модель стержня со свободными боковыми гранями

• расчетная схема 2: Трехмерная модель стержня с условиями симметрии на боковых гранях

Представленные на рис.6-9 результаты расчетов получены при использовании разработанной для пакета ANSYS программы гармонического анализа трехмерных тел из пьезокекрамики ЦТС-19.

На графиках рис. 6 и рис. 7 приведены амплитудно-частотные характеристики пьезокерамического стержня при вынужденных продольных колебаниях для двух вариантов граничных условий на боковых гранях: в первом варианте грани свободны, а во втором на грани наложены условия симметрии, допускающие перемещения материальных точек граней только в направлении продольной оси Z.

Частоты резонанса и антирезонанса определяются полюсами и нулями функций адмитанса, приведенных на графиках:

• для свободного пьезокерамического стержня (рис.6):

### *f*<sub>n</sub>=1,71е6 Гц, *f*<sub>a</sub>=2,13е6 Гц

• для стержня с условиями симметрии на гранях (рис.7):

*f<sub>r</sub>* =2,456е6 Гц, *f<sub>a</sub>*=2,760е6 Гц



**Рис. 6**. Зависимость амплитуды адмитанса от частоты для пьезокерамического стержня. Материал ЦТС-19. Расчетная схема 1: – КЭ модель 3D, 0.55х0.55х0.8мм (ШхГхВ), боковые грани свободны. Частоты резонанса и антирезонанса: *f*<sub>*i*</sub>=1,71е6 Гц,





Рис.7. Зависимость амплитуды адмитанса от частоты для пьезокерамического стержня. Материал ЦТС-19. Расчетная схема 2: – КЭ модель 3D, 0.55х0.55х0.8мм (ШхГхВ), условия симметрии на боковых гранях. Частоты резонанса и антирезонанса соответственно: *f*<sub>*r*</sub>=2,45666 Гц, *f*<sub>*a*</sub>=2,760e6 Гц,

На рис. 8 и рис. 9 показаны формы продольных колебаний стержня на резонансной частоте для двух рассматриваемых вариантов.



**Рис. 8**. Форма продольных колебаний пьезокерамического стержня на резонансной частоте  $f_r = 1,715e6$  Гц. Боковые грани свободны



**Рис. 9**. Форма продольных колебаний пьезокерамического стержня на резонансной частоте  $f_r$  =2,456е6 Гц. Условия симметрии на боковых гранях

Результаты расчетов сведены в таблицу 3, позволяющую провести анализ влияния граничных условий на частотные характеристики пьезокерамического стержня.

Как следует из анализа приведенных в таблице 3 значений частот резонанса и антирезонанса пьезокерамического стержня для двух вариантов граничных условий на боковых гранях, введение условий симметрии на его гранях приводит к увеличению более чем на 40%. значения резонансной частоты и приблизительно на 30% значения частоты антирезонанса.

N⁰	Расчетная схема	<i>f<sub>r</sub>,</i> МГц	<i>f</i> <sub>a</sub> , МГц
	Расчет в пакете ANSYS (МКЭ) 3D-модель,		
1.	0.55х0.55х0.8мм		
	Материал - ЦТС-19,Тип КЭ - SOLID5,	1.715	2.137
	число КЭ - 800		
	<ul> <li>Боковые грани свободны</li> </ul>		
2.	Расчет в пакете ANSYS (МКЭ) 3D-модель,		
	0.55x0.55x0.8мм Материал - ЦТС-19. Тип		
	КЭ - SOLID5,	2.456	2.760
	число КЭ - 800		
	• Условия симметрии на боковых гранях		

Таблица 3

Полученные результаты качественно вполне очевидны: наложение связей существенно повышает резонансную частоту конструкции. При этом количественные данные о влиянии граничных условий дают возможность проверить достоверность получаемых численных результатов по разработанным в пакете ANSYS программам при их сравнении с аналитическими решениями этой же задачи, приведенными в п.2. Они позволяют сделать выводы о работоспособности созданных программ, реализующих метод конечных элементов в среде ANSYS, равно как и о возможности их использования для расчета конструкций из пьезокомпозитных материалов, отличающихся высокой структурной неоднородностью.

Результаты аналитических решений и численных экспериментов с трехмерной моделью стержня для проведения сравнительного анализа сведены в таблицу 4.

В двойных строках таблицы 4 приведены значения частот резонанса, антирезонанса и динамического коэффициента электродинамической связи (КЭСМ)  $k_D = \sqrt{1 - \left(\frac{f_r}{f_a}\right)^2}$ , полученные с использованием аналитического подхода и численных решений по МКЭ (3D) в пакете ANSYS, соответственно. В первой двойной строке представлены аналитический и численный (МКЭ) результаты расчетов стержня со свободными гранями (см.п.2), а во второй – аналитический и численный (МКЭ) результаты расчетов стержня с условиями на боковых гранях (см.п.3).

N⁰	РАСЧЕТНАЯ СХЕМА	<i>f<sub>r</sub></i> ,МГц	<i>f<sub>a</sub></i> , МГц	$k_D = \left[1 - \left(\frac{f_r}{f}\right)^2\right]$
				$\sqrt{J_a}$
1.	Аналитическое решение задачи о про- дольных колебания стержня (п.3.1.1), материал ЦТС-19 Боковые грани свободны	1.82	2.27	0.597
	Решение с использованием ANSYS, 3D-модель, материал ЦТС-19, 0.55х0.55х0.8мм (ШхГхВ), 800 эл-тов SOLID5 Боковые грани свободны	1.715	2.137	0.597
2.	Аналитическое решение задачи о про- дольных колебания стержня (п.3.1.2.), материал ЦТС-19 • Боковые грани стеснены	2.44	2.75	0.461
	Решение с использованием ANSYS, 3D-модель, материал ЦТС-19, 0.55х0.55х0.8мм (ШхГхВ), 800 эл-тов SOLID5 • Условия симметрии на боковых гранях	2.456	2.760	0.456

Таблица 4

Сравнительный анализ результатов расчета частотных характеристик показывает практическое совпадение результатов аналитического и численного (МКЭ) решений в случае продольных колебаний стержня в стесненных по боковым граням условиях (отличие не превышает 0,6%). Для свободного стержня аналитический подход дает более высокое значение частот (выше 6%) по сравнению с решением по МКЭ на трехмерной модели. Отмеченное различие результатов в случае свободного стержня объясняется появлением погрешностей аналитической модели при расчетах относительно коротких стержней, когда нарушается допущение о преобладании длины стержня над его поперечными размерами, что имеет место в рассматриваемом случае. Как показывают численные эксперименты, с увеличением длины стержня результаты аналитического решения и расчетов по трехмерной модели МКЭ согласуются с приемлемой для инженерных приложений точностью.

#### 4. Выводы

Цель проведенных исследований заключается в апробировании и тестировании программ расчета методом конечных элементов частотных характеристик пьезокерамических стержневых элементов в пакете ANSYS. Для обеспечения возможности тестирования разработанных программ построены аналитические решения модельной задачи о вынужденных продольных колебаниях пьезокерамического стержня квадратного сечения для двух вариантов граничных условий на боковых гранях: а) грани свободны; б) на гранях заданы условия стесненного деформирования в поперечном направлении. Для сравнения аналитических решений с результатами расчетов по разработанным программам, реализующим МКЭ в пакете ANSYS, построены трехмерные конечно-элементные модели стержня и проведены серии расчетов. Сравнительный анализ частотных характеристик вынужденных продольных колебаниях пьезокерамического стержня, полученных аналитическим и численным (МКЭ) методами позволяет сделать следующие выводы:

• Для стержня со свободными гранями различия аналитического и численного (МКЭ) решений существенно отличаются (выше 6%), что находит объяснение в несоответствии аналитической модели рассматриваемому случаю относительно короткого стержня (L/a = 1,6), когда нарушается допущение о преобладании длины стержня над его поперечными размерами. Как показывают численные эксперименты, с увеличением длины стержня (начиная с соотношения L/a = 2) результаты аналитического решения и расчетов по трехмерной модели МКЭ согласуются с приемлемой для инженерных приложений точностью.

• Для случая стесненного деформирования в поперечных направлениях стержня значения частот резонанса и антирезонанса показали высокую степень совпадения численных расчетов (МКЭ) с аналитическим решением (отличие в значениях частот резонанса и антирезонанса не превышает 0.6%);

• Проведенное тестирование разработанных программ на модельной задаче для стержня из пьезокерамического материала позволяет сделать вывод об их работоспособности и возможности их использования для расчетов элементов и конструкций из пьезокомпозитных материалов, обладающих высокой структурной неоднородностью, когда пьезокерамические стержни рассматриваются как наполнитель в композитном блоке преобразователей 1-3 связности.

#### Список литературы

- 1. Сарбаев Б.С, Сдобников А.Н., Сдобников С.А. Применение композиционных материалов с пьезоэлектрическими свойствами в интеллектуальных конструкциях аэрокосмической техники (обзор). Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение», 2004, №, с.129-165.
- 2. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение. – М.: Техносфера, 2006. – 223 с.
- Сафронов А.Я., Парфенов Б.Г., Климашин В.М, Никифоров В.Г. Воронков Б.И. Создание и перспективы развития пьезоэлектрических приборов в ОАО «ЭЛПА». Пьезотехника-2003. Материалы Междунар. научн.-практич.конф. «Фундаментальные проблемы пьезоэлектрического приборостроения». РАН, Мин-во образования РФ, МИРЭА, РГУ. Москва, 26 -29 ноября 2003 г., Москва, Изд-во МИРЭА, 2003, с. 207 213.
- 4. *Пьезокерамические преобразователи: Справочник*.Ганопольский В.В., КасаткинБ.А. Легуша Ф.Ф., Прудько Н.И., Пугачев С.И., ред. Л.: Судостроение, 1984. -256 с.

- Бардзюкас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л.. Математическое моделирование в задачах связанных полей. T1. Введение в теорию пьезоэлектричества. – М.: КомКнига, 2005. – 312с.
- 6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
- 7. Шульга Н.А., Болкисев А.В. Колебания пьезоэлектрических тел. Киев.: Наукова думка, 1990. 228 с.
- 8. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Киев.: Наукова думка, 1989. -279 с.
- 9. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, -1988. 472 с.
- Беляков Ю.Н., Наседкин А.В., Сафронов А.Я. Опыт моделирования работы пьезоэлектрических устройств с использованием конечно-элементного пакета ANSYS от вычислительных экспериментов до стандартизации технологии основных этапов расчетов. Пьезотехника-2003. Материалы Междунар. научн.-практич. конф. «Фундаментальные проблемы пьезоэлектрического приборостроения». РАН, Мин-во образования РФ, МИРЭА, РГУ. Москва, 26 -29 ноября 2003 г., Москва, Изд-во МИРЭА, 2003, с. 219 – 224.
- 11. ANSYS. Theory Reference. Rel. 7.0. / Ed. P. Kohnke. ANSYS, Inc. Houston. 2003.
- 12. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. Изд. 2-е, испр. М.: Изд-во «Едиториал УРСС», 2004. 272 с.