

УДК 681.511.2

Разработка математической модели движения учебного колёсного робота

Бошляков И.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Специальная робототехника и мехатроника»*

Коновалов К.В., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Специальная робототехника и мехатроника»*

Научный руководитель: Рубцов В.И., к.т.н, доцент

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kafsm7@sm.bmstu.ru

Введение

В настоящее время возрастает интерес к колёсным роботам, расширяется их область применения и, следовательно, повышаются требования к качеству функционирования, которое характеризуется: точностью отработки траектории, быстродействием, устойчивостью движения. Для определения факторов и условий, влияющих на качество движения, необходимо составить математическую модель колёсной машины. В связи с этим развитие математических моделей колёсных систем является актуальным[1].

Данная статья посвящена решению прямой задачи динамики и созданию математической модели колёсной машины E - Revo Brushless (#56087) рис. 1 и, со следующими параметрами:

- Общая масса $M = 6$ кг,
- Масса колеса $m_k = 0.36$ кг,
- Длина $L = 0.358$ м,
- Ширина $l = 0.416$ м,
- Высота $h = 0.210$ м,
- Радиус колес $r_k = 0.088$ м.



Рис. 1. Шасси E - Revo Brushless (#56087)

Разработка математической модели

Первым этапом для создания математической модели являлось введение допущений и упрощений:

- Машина совершала плоское движение в горизонтальной плоскости.
- Блокировка (юз) колес шасси отсутствовала.
- Потери механической мощности в узлах малы.
- Центр масс системы робота находился в геометрическом центре машины.

Колесная машина рассматривалась как система пяти абсолютно твердых тел. Были введены две системы координат: xOy - неподвижная система, x_1Oy_1 - подвижная, связанная с центром масс колёсного робота (рис. 2). Положение машины однозначно определялось четырьмя координатами:

- θ - угол поворота машины относительно неподвижной системы координат;
- β -угол поворота передних колес;
- x_c, y_c - координаты центра масс.

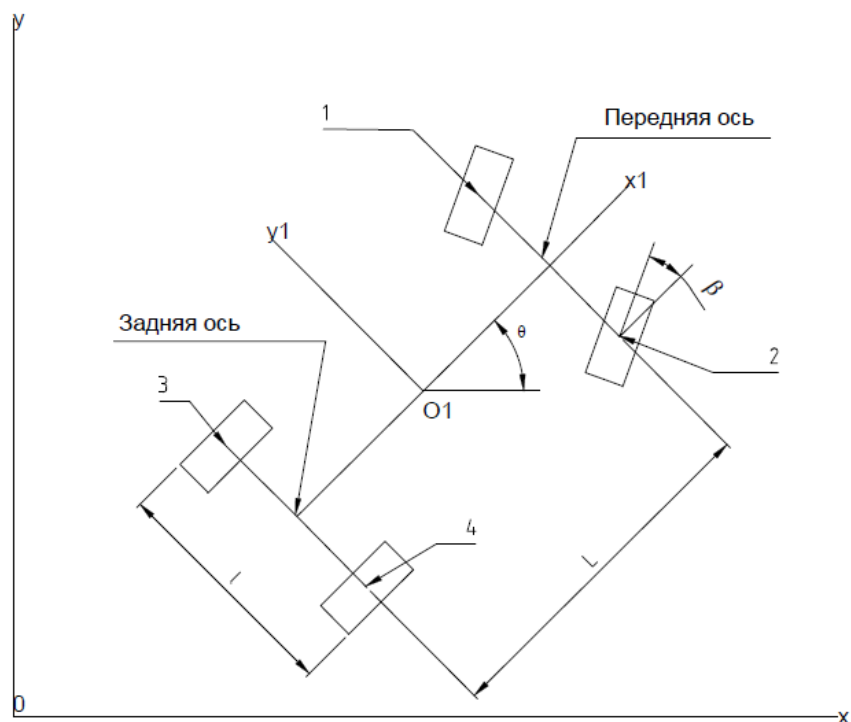


Рис. 2. Кинематическая схема колёсной машины

Динамика робота при прямолинейном движении

Для описания прямолинейного движения колёсного робота воспользовались расчётной схемой рис. 3 и уравнением изменения кинетической энергии системы [2]:

$$dW_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^k dA_{\text{внеш}i} + \sum_{j=1}^m dA_{\text{вн}j}, (1)$$

где $dW_{\text{кин}}$ - дифференциал кинетической энергии системы, $dA_{\text{внеш}i}, dA_{\text{вн}j}$ - элементарная работа внешних и внутренних сил соответственно.

Кинетическую энергию представили в виде суммы кинетических энергий: $W_{\text{кин}t}$ поступательного движения и $W_{\text{кин}r}$ вращающихся частей и узлов.

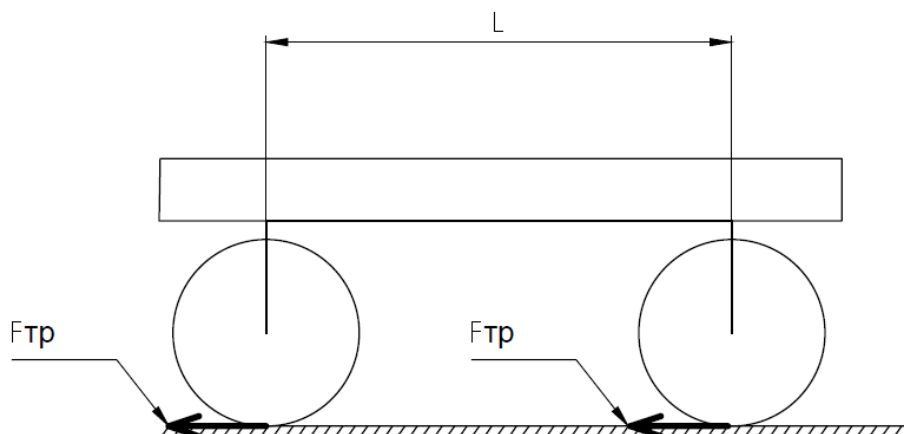


Рис. 3. Расчётная схема сил, действующих на колёсную машину при прямолинейном движении

$$W_{\text{кин}} = W_{\text{кин}m} + W_{\text{кин}J} = 0.5 M v_x^2 + 0.5 \left(J_{\text{дв}} w_{\text{дв}}^2 + \sum_{i=1}^4 J_{ki} w_{ki}^2 \right), (2)$$

где M - полная масса робота, v_x - линейная скорость робота, $J_{\text{дв}}, J_{ki}$ - момент инерции ротора и колёс приведённых к валу двигателя соответственно, $w_{\text{дв}}, w_{ki}$ - угловые скорости выходного вала двигателя и колёс соответственно.

Подставив (2) в левую часть уравнения (1), получили

$$dW_{\text{кин}} = M v_x dv_x + J_{\text{дв}} w_{\text{дв}} dw_{\text{дв}} + \sum_{i=1}^4 J_{ki} w_{ki} dw_{ki}, (3)$$

Сумма элементарных работ внешних сил,

$$\sum_{i=1}^k dA_{\text{внеш}i} = F_{\text{тр}} ds, (4)$$

где $F_{\text{тр}} = \mu m_k g$ - сила трения, μ - коэффициент трения, ds - элементарное перемещение робота вдоль оси X_c .

Элементарная работа внутренних сил равна сумме полезной работы двигателя $dA_{\text{дв}} = M_{\text{дв}} d\varphi_{\text{дв}}$ и работе сил сопротивления в трансмиссии $dA_{\text{тран}}$, в которую поступает момент равный $M_{\text{дв-тран}} = M_{\text{дв}} - M_{\text{дв}\epsilon}$, где $M_{\text{дв}\epsilon} = J_{\text{дв}} \epsilon_{\text{дв}}$, $\epsilon_{\text{дв}} = \frac{dw_{\text{дв}}}{dt}$ - угловое ускорение вала двигателя. Потери в трансмиссии оцениваются величиной $(1 - \theta_{\text{тран}})$, где $\theta_{\text{тран}}$ - КПД. Тогда,

$$\sum_{j=1}^m dA_{\text{вн}j} = dA_{\text{дв}} - dA_{\text{тран}} = M_{\text{дв}} d\varphi_{\text{дв}} - (M_{\text{дв}} - M_{\text{дв}\varepsilon})(1 - \theta_{\text{тран}}) d\varphi_{\text{дв}}, (5)$$

Уравнения (3), (4), (5) подставили в (1) и после преобразований получили,

$$a_x \left(M + J_{\text{дв}} \frac{i^2}{r_k^2} \theta_{\text{тран}} + 4J_k \frac{1}{r_k^2} \right) = \theta_{\text{тран}} \frac{i}{r_k} M_{\text{дв}} + 4\mu m_k g, (6)$$

Проинтегрировав выражение (6) нашли полную скорость движения колёсного робота по прямолинейному участку дороги, и спроецировали на оси неподвижной СК,

$$\begin{cases} v_{xc} = \int_0^t \frac{\theta_{\text{тран}} \frac{i}{r_k} M_{\text{дв}} + 4\mu m_k g}{M + J_{\text{дв}} \frac{i^2}{r_k^2} \theta_{\text{тран}} + 4J_k \frac{1}{r_k^2}} dt \cos \theta \\ v_{yc} = \int_0^t \frac{\theta_{\text{тран}} \frac{i}{r_k} M_{\text{дв}} + 4\mu m_k g}{M + J_{\text{дв}} \frac{i^2}{r_k^2} \theta_{\text{тран}} + 4J_k \frac{1}{r_k^2}} dt \sin \theta \end{cases}, (7)$$

Тогда перемещение центра масс машины относительно xOy,

$$\begin{cases} x_c = \int_0^t v_{xc} dt \\ y_c = \int_0^t v_{yc} dt \end{cases}, (8)$$

Динамика робота при криволинейном движении

Движение колёсного робота возможно при условии создания положительных продольных реакций, поэтому сумму этих реакций считали движущей.

Для реализации криволинейного движения воспользовались расчётной схемой рис. 4 и вторым законом Ньютона [3],

$$Ma = \sum_{k=1}^n R_k, (9)$$

где $R_k = \mu P_k$ - сила сопротивления движению, $P_k = \frac{M_k}{r_k}$ - полная окружная сила k -го колеса.

Спроецировав уравнение (9) на оси неподвижной системы координат и выполнив преобразования получили,

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \frac{\mu}{Mr_k} (M_{k1} \cos(\theta + \beta) + M_{k2} \cos(\theta + \beta) + M_{k3} \cos(\theta) + M_{k4} \cos(\theta)) \\ \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \frac{\mu}{Mr_k} (M_{k1} \sin(\theta + \beta) + M_{k2} \sin(\theta + \beta) + M_{k3} \sin(\theta) + M_{k4} \sin(\theta)) \end{cases} (10)$$

Для нахождения траектории движения центра масс дважды проинтегрировали систему (10),

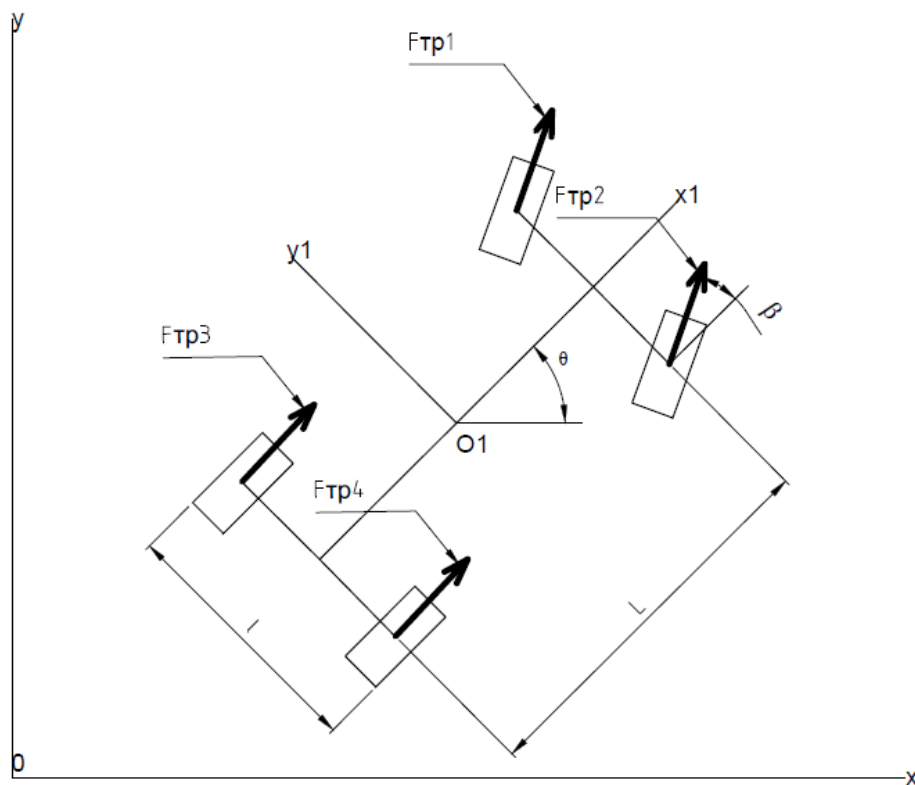


Рис. 4. Расчётная схема сил, действующих на колёсную машину при криволинейном движении

$$\begin{cases} v_{xc} = \frac{\mu}{Mr_k} \int_0^t (M_{k1} \cos(\theta + \beta) + M_{k2} \cos(\theta + \beta) + M_{k3} \cos(\theta) + M_{k4} \cos(\theta)) dt \\ v_{yc} = \frac{\mu}{Mr_k} \int_0^t (M_{k1} \sin(\theta + \beta) + M_{k2} \sin(\theta + \beta) + M_{k3} \sin(\theta) + M_{k4} \sin(\theta)) dt \end{cases} \quad (11)$$

Окончательно получили,

$$\begin{cases} x_c = \int_0^t v_{xc} dt \\ y_c = \int_0^t v_{yc} dt \end{cases} \quad (12).$$

Реализация математической модели колёсного робота в MATLAB and Simulink

Движение колёсного робота по произвольной траектории было реализовано с помощью двух блоков, один из них отвечал за движение по окружности ($\beta \neq 0$), другой - по прямой линии ($\beta = 0$). Переключение между блоками осуществлялось по углу β .

Была составлена компьютерная модель учебного мобильного робота в программном пакете MATLAB and Simulink, представленная на рис. 5.

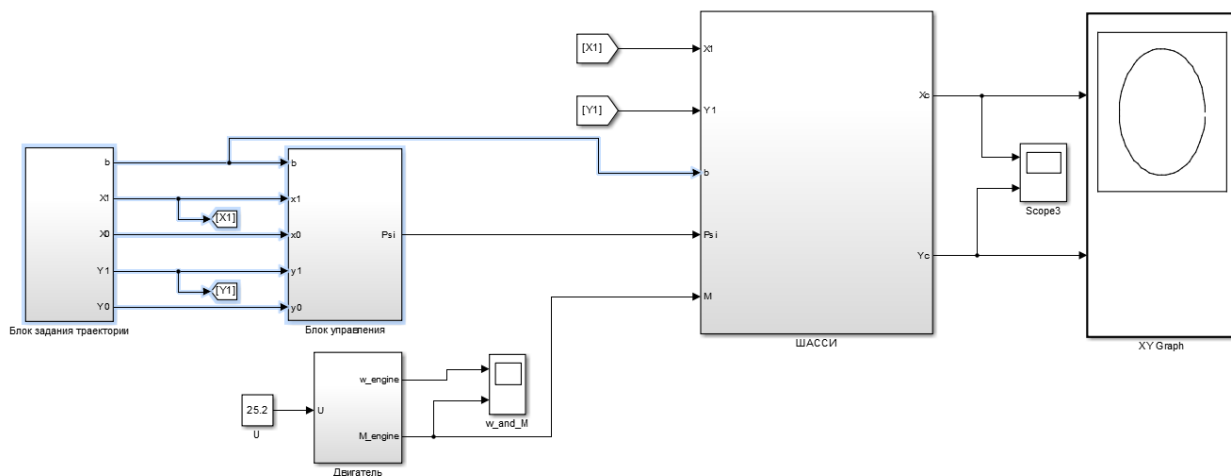


Рис. 5. Общая структурная схема колёсного робота в среде MATLAB Simulink

Блок задания траектории задавал координаты точек, по которым должен проехать робот, и как именно он должен двигаться, по прямой линии или по окружности. Блок управления формировал θ - угол поворота машины относительно неподвижной системы координат. На блок шасси поступал θ , момент двигателя, β - угол поворота передних колёс и координаты точек, заданные блоком задания траектории. На выходе формировалась траектория движения центра масс робота.

Решение прямой задачи динамики

Для моделирования задали координаты точек представленные на рис. 6, отмеченные красным. Первый участок робот должен проехать по криволинейной траектории, второй по прямой линии. Результаты моделирования представлены на рис. 7.

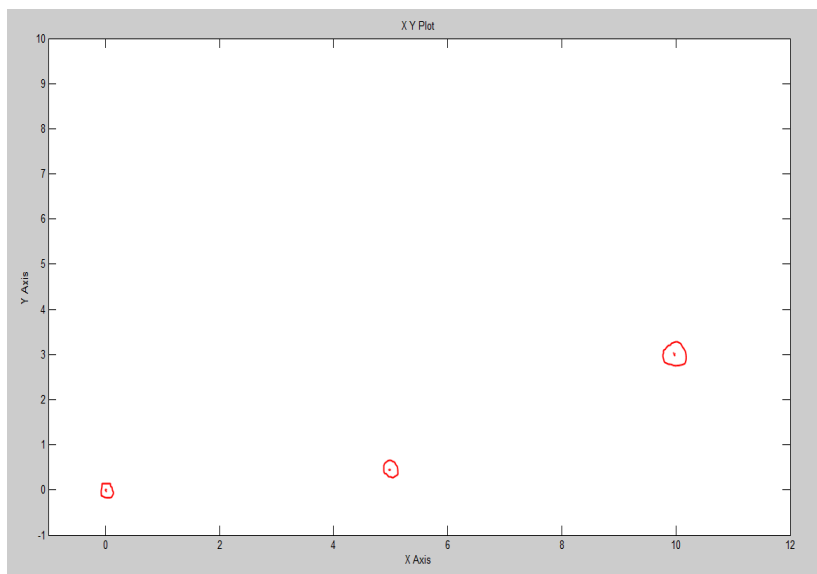


Рис. 6. Входные координаты

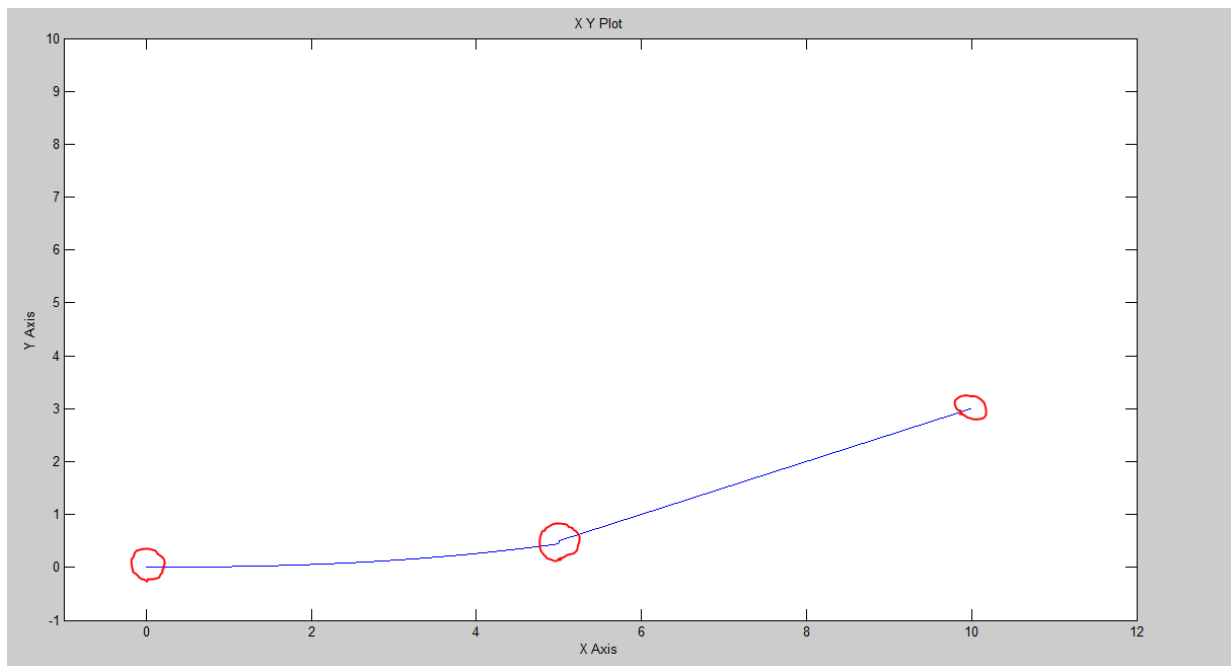


Рис. 7. Траектория движения центра масс

Результаты моделирования показывают, что созданная математическая модель отрабатывает заданную траекторию.

Заключение

В результате работы была составлена математическая модель колёсного робота и решена прямая задача динамики. Моделирование доказало работоспособность схемы, в которой учитывалась динамика двигателя и силы, возникающие при взаимодействии колёс с опорной поверхностью.

Список литературы

1. Машков К.Ю., Рубцов В.И., Рубцов И.В. Состав и характеристики мобильных роботов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 73 с.
2. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 391 с.
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. Курс теоретической механики. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 736 с.
4. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Том 11. № 8. С. 29—80.