

Реологическая модель материала с волнистой структурой ВОЛОКОН

05, май 2015

Владыкин Н. Г.^{1,*}

УДК: 539.4

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}vladykin39@mail.ru

Для ряда материалов, таких как кожа, дерево, армированные пластмассы характерны нелинейные диаграммы растяжения с возрастанием касательного модуля упругости по мере увеличения нагрузки, а также ползучесть и реологические явления при сравнительно небольших напряжениях. Для объяснений этих особенностей материалов предложен ряд физических моделей. В работе [1] указанные свойства материала (кожи) объясняются сетчато-волокнутой структурой, в работе [2] волнистое волокно представлено в виде рычажно-шарнирного механизма с упругими шарнирами, а в работе [3] приводится модель волокна в виде винтовой линии с большим шагом витка.

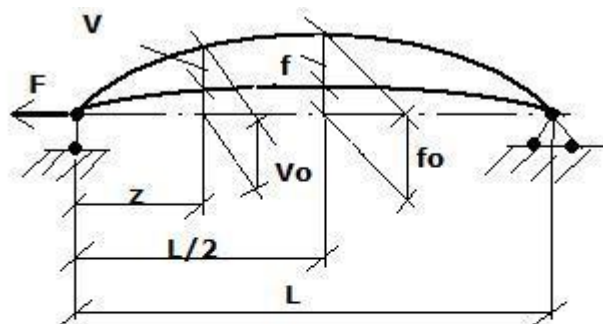


РИС 1. МОДЕЛЬ РАСТЯНУТОГО ВОЛОКНА

В настоящей работе волокно материала представлено в виде полуволны синусоиды, где текущий прогиб до деформации обозначен V_0 , а уменьшение прогиба при действии продольной силы F обозначено V и также принято в виде полуволны синусоиды (Рис. 1), а f_0 и f представляют амплитуды соответствующих полуволн.

$$V_0 = f_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right); V = f \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right). \quad (1)$$

Запишем дифференциальное уравнение продольного изгиба волокна с изгибной жесткостью сечения EI_x , полагая полуволну полойой:

$$EI_x V'' = -F \cdot (V_0 - V). \quad (2)$$

После подстановки (1) в (2) получим:

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot EI_x \cdot f = -F \cdot (f_0 - f).$$

В результате получим зависимость между уменьшением амплитуды прогиба и нагрузкой (Рис. 2).

$$f = \frac{F}{F + F_{кр}} f_0, \quad (3)$$

где $F_{кр} = EI_x \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ – критическая сила.

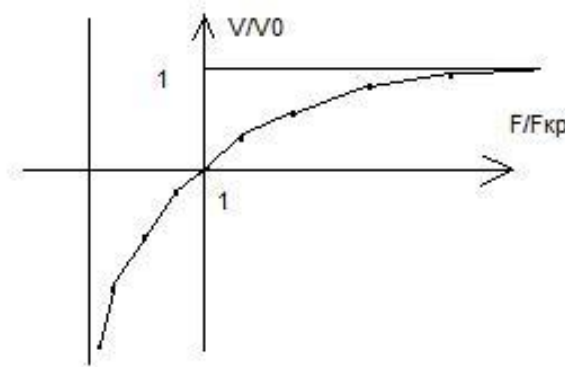


Рис.2. Зависимость относительного прогиба от продольной нагрузки.

Известно, что осевое перемещение свободного конца стержня за счет его незначительного искривления будет.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (V')^2 dz = \pi^2 \cdot \frac{(f_0 - f)^2}{2L^2} \cdot \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz,$$

или до нагружения ($f = 0$):

$$W_0 = \frac{(\pi f_0)^2}{4L}.$$

Аналогично, после нагружения:

$$W = \frac{[\pi(f_0 - f)]^2}{4L}.$$

При этом, удлинение стержня, обусловленное его распрямлением, будет:

$$\Delta L = W_0 - W$$

или

$$\Delta L = \frac{\pi^2}{4L} \cdot f \cdot (2f_0 - f). \quad (4)$$

С учетом (3) и (4), выразим зависимость между осевым перемещением и нагрузкой

$$\Delta L = K \cdot \left[1 - \left(\frac{F_{кр}}{F + F_{кр}} \right)^2 \right],$$

где

$$K = \frac{(\pi f_0)^2}{4L}.$$

Кроме податливости за счет искривления волокон учтем дополнительную податливость за счет линейной упругости материала с коэффициентом жёсткости C . В этом случае общее удлинение волокон будет:

$$\Delta L_0 = \frac{F}{C} + K \cdot \left[1 - \left(\frac{F_{кр}}{F + F_{кр}} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Графически эта зависимость приведена на рис. 3.

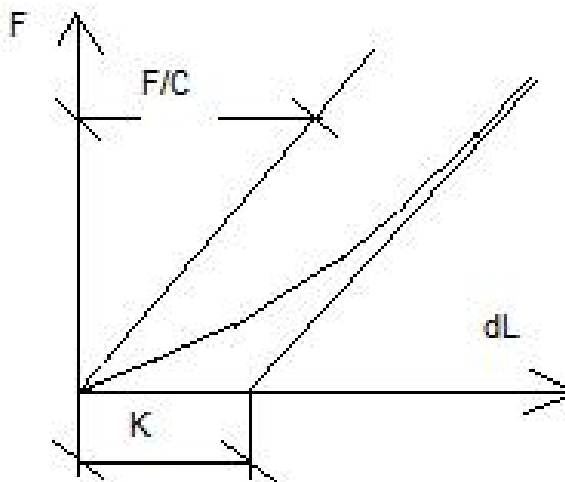


Рис.2. Диаграмма растяжения волокна.

Для кожи, ряда пластмасс и других материалов характерно вязкоупругое состояние даже при незначительных нагрузках. Для моделирования вязко упругости используем трехэлементную модель Кельвина-Фойгта [4] с нелинейным упругим звеном и с установкой демпфера параллельно линейной пружине (« b » - коэффициент линейного трения), (Рис.4).

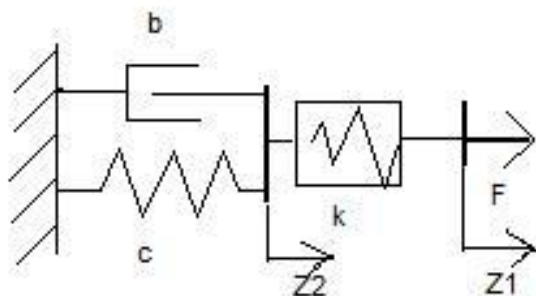


Рис.4. Реологическая трехэлементная модель с нелинейным упругим звеном.

Для удлинения нелинейного звена в зависимости от силы F можно записать очевидные уравнения:

$$Z_1 - Z_2 = K \cdot \left[1 - \left(\frac{F_{кр}}{F - F_{кр}} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$F = b \cdot \frac{dZ_2}{dt} + c \cdot Z_2 \quad (7)$$

Пусть, например, F представляет собой ступенчатую функцию, возрастающую от нуля до F_m . Тогда решение дифференциального уравнения (7) имеет вид:

$$Z_2 = \frac{F_m}{c} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{c} t\right) \right].$$

Из алгебраического уравнения (6) определим перемещение Z_1 :

$$Z_1 = \frac{F_m}{c} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{c} t\right) \right] + K \cdot \left[1 - \left(\frac{F_{кр}}{F - F_{кр}} \right)^2 \right].$$

Список литературы

1. Шестакова Н.А., Шнейдерович Р.М. Реологические характеристики кожи на основе сетчатой модели. // Кожевенная и обувная промышленность. 1972. № 3. С. 33-37
2. Владыкин Н.Г., Шестакова Н.А. Определение диаграммы растяжения волокна волнистой формы. // Сб. научн. трудов «Динамика машин легкой промышленности». МГАЛП. 1996 г. С. 56 - 59
3. Владыкин Н.Г., Шестакова Н.А. Определение диаграммы растяжения материала с естественно закрученными волокнами. // Сб. трудов «Совершенствование технологии лёгкой промышленности». МГАЛП. 2001. С. 62 - 64
4. Миненков Б.В., Стасенко И.В. Прочность деталей из пластмасс: монография. М.: Машиностроение. 1977. 264 с.

5. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). М.: Наука. 1972. 328 с.
6. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. 3-е изд. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1983. 535 с.