электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 533.16

Верификация численного расчета параметров ламинарного пограничного слоя

Клюквин А.Д., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Газотурбинные и нетрадиционные энергоустановки»

Научный руководитель: Бурцев С.А., к.т.н, доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Газотурбинные и нетрадиционные энергоустановки»
e3@bmstu.ru

Введение

Очень часто в технике приходится сталкиваться с необходимостью решения задач теплообмена между потоком газа и обтекаемым твердым телом. При этом интенсивность теплообмена определяется разностью между температурой стенки и температурой газа на стенке. Газ вблизи стенки полностью заторможен, поэтому в идеальном случае на ней может установиться температура торможения ядра потока. Однако, как впервые было показано в работе [1], при течении сжимаемого газа локальный дисбаланс между генерацией энергии силами вязкости и ее диссипацией посредствам теплопроводности приводит к искривлению профиля температуры торможения в пограничном слое и снижению значения температуры газа на стенке.

Характер получаемой кривой определяется значением числа Прандтля рабочего тела

$$\mathrm{Pr}=\frac{\mu C_p}{\lambda}, \qquad (1)$$

где μ, Па$\cdot$с – динамическая вязкость, C_p, Дж/(кг$\cdot$К) – теплоемкость при постоянном давлении, λ, Вт/(м$\cdot$К) – коэффициент теплопроводности.

При критерии Прандтля, равном единице, что соответствует равенству генерируемой и отводимой теплоты в каждой точке газа, перераспределения температуры торможения не наблюдается. В случае же $\mathrm{Pr}<1$ механизмами теплопроводности от стенки отводится большее количество теплоты, чем генерируется силами вязкости. Это приводит к снижению температуры стенки относительно температуры торможения газа. В результате профиль температуры торможения в пограничном слое имеет вид, показанный на рис. 1 [2].

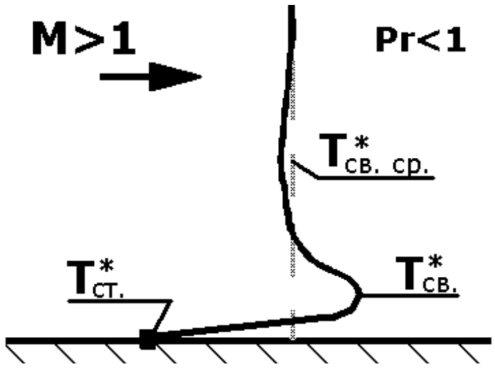

Рис. 1. Распределение температуры торможения в пограничном слое

Температура, устанавливающаяся на адиабатной стенке при обтекании ее потоком газа, называется температурой восстановления T^*_W, К и рассчитывается по следующей формуле [3]:

$$T^*_W = T_0 + r\frac{W_0^2}{2C_p}, \qquad (2)$$

где $r = \frac{T^*_W - T_0}{T^*_0 - T_0}$ - коэффициент восстановления температуры, W_0, м/с – скорость течения в ядре потока, T_0, К – статическая температура в ядре потока, C_p, $Дж/(кг \cdot К)$.

Коэффициент восстановления является количественной характеристикой изменения температуры стенки относительно температуры торможения и, как можно заметить из формулы (1), показывает, какая доля кинетической энергии потока перешла в теплоту на стенке. В работе [4] показано, что в диапазоне чисел Прандтля 0.6–2.0 для ламинарного пограничного слоя коэффициент восстановления r хорошо описывается выражением

$$r = \sqrt{Pr}. \qquad (3)$$

Впоследствии теоретические исследования получили экспериментальное подтверждение в работах [5] и [6].

Анализ влияния различных факторов на значение коэффициента восстановления температуры при ламинарном режиме течения был выполнен в работе [7], где было показано, что при течении воздуха числа Маха и Рейнольдса и продольный градиент давления слабо влияют на коэффициент восстановления температуры, который равен

0.850 ± 0.012. Эти данные хорошо согласуются с выражением (3), которое для диапазона $\mathrm{Pr}=0.69\text{-}0.72$ дает коэффициент восстановления температуры в диапазоне $r=0.83\text{-}0.85$.

В данной работе средствами численного моделирования были проведены анализ зависимости безразмерной температуры торможения $\theta=\frac{T^*-T_0}{T_0^*-T_0}$ (где T^*, К – температура торможения, $T_0^*=T_0+\frac{W_0^2}{2C_p}$ – температура торможения в ядре потока) от безразмерной поперечной координаты $\eta=y\sqrt{\frac{W_0}{\nu x}}$ (где y, м – поперечная координата, x, м – продольная координат, ν, $м^2/с$ – кинематическая вязкость) и верификация результатов численного счета по теоретическому профилю, полученному в работе [8].

Численная модель

Эффект искривления профиля температуры торможения был рассмотрен на примере сверхзвукового и дозвукового ламинарных плоскопараллельных течений воздуха в прямоугольном канале с теплоизолированными стенками длиной $l=0.2$ м и полувысотой $h=0.01$ м. В целях сокращения времени машинного счета рассчитывается только нижняя половина канала, а на верхнюю границу расчетной модели накладывается граничное условие симметрии. При этом протяженность канала в третьем измерении считается бесконечной.

Физические свойства рабочего тела и граничные условия модели представлены в таблице 1 [9] и таблице 2, соответственно.

Таблица 1

Свойства рабочего тела

Параметр	Значение
C_p, Дж/(кг·К)	1006.43
λ, Вт/(м·К)	0.026
μ, Па·с	$1.79 \cdot 10^{-5}$
Pr	0.69

Таблица 2

Граничные условия модели

Параметр	Значение
Скорость газа на входе W_0, м/с (свехзвук/дозвук)	500/285
Температура газа на входе T_0, К	300
Давление газа на входе p_0, МПа	0.1

Расчетная прямоугольная сетка была построена с помощью сеткогенератора ANSYS Meshing на базе платформы ANSYS Workbench (лицензия МГТУ им. Н.Э. Баумана № 339001). При этом максимальный размер ячеек в продольном направлении составил 0.01 м, а максимальный поперечный размер ячеек 10^{-4} м, коэффициент сгущения в поперечном направлении 100. В результате пристеночный слой ячеек соответствовал величине $y^+ = 1.24$, где $y^+ = \frac{W_* y}{\nu}$ – безразмерная поперечная координата, $W_* = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}$, м/с – динамическая скорость, τ_W, Па – напряжение на стенке, ρ, кг/м^3 – плотность газа.

Полученная модель представлена на рис. 2.

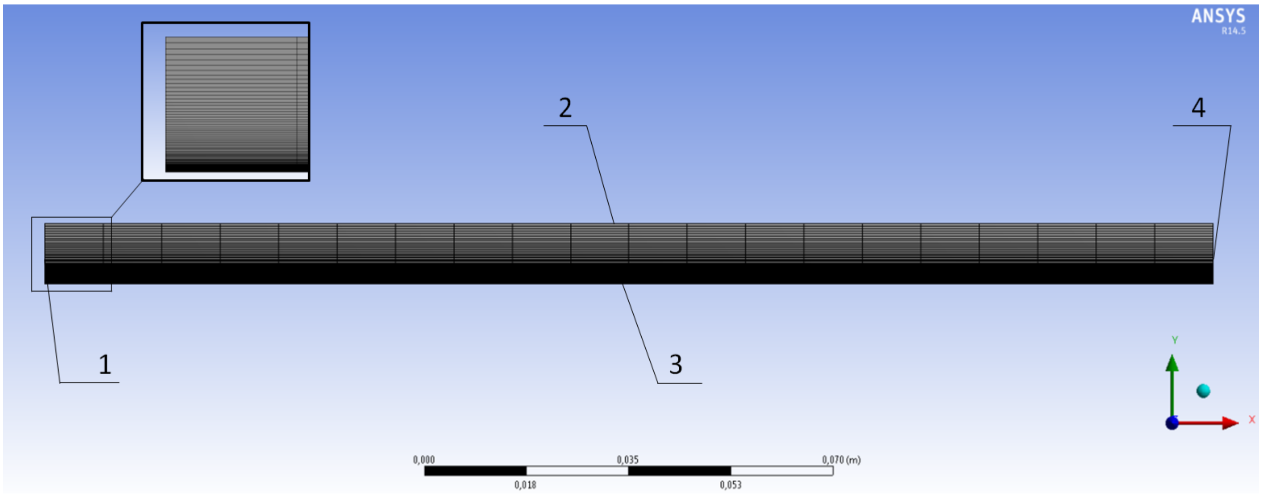

Рис. 2. Расчетная модель:

1 – Входное сечение (Inlet); 2 – Ось симметрии канала (Symmetry);

3 – Адиабатная стенка (Wall); 4 – Выходное сечение (Outlet).

Для расчета газодинамических и тепловых параметров в канале была использована программа ANSYS Fluent.

Проведем поверочный расчет адекватности поставленной модели, а именно, оценим критическую длину канала $x_{кр}$, м, методами одномерной газодинамики.

В данной работе начальная скорость в сверхзвуковом потоке задавалась, а в дозвуковом - определялась из условия $\lambda_{0д}\lambda_{0с}=1$ ($\lambda_{0д}$ – начальная приведенная скорость в дозвуковом потоке, а $\lambda_{0с}$ – начальная приведенная скорость в сверхзвуковом потоке), что соответствует близости критических длин канала для обоих течений [10]. Поэтому далее будет проведен расчет только сверхзвукового течения:

1. Рассмотрим уравнение обращения воздействий, отбросив в нем все члены, кроме тех, что отвечают за геометрическое воздействие и воздействие трением [10]:

$$\left(M^2-1\right)\frac{dv}{v}=\frac{ds}{s}-\frac{k}{a^2}dL_{fr}, \tag{3}$$

где M – число Маха, v, м/с – скорость газа, s, $м^2$ – площадь эффективного поперечного сечения канала, k – показатель адиабаты, a, м/с – местная скорость звука, L_{fr}, Дж – работа сил трения.

2. Для преобразований используем следующие формулы:

   1. Формула Дарси: $dL_{fr}=\zeta\frac{v^2}{2}\frac{dx}{D_h}$ [10], где ζ – коэффициент гидравлического трения, x – продольная координата, D_h - гидравлический диаметр канала;
   2. Связь числа Маха с приведенной скоростью λ:

$$\frac{1}{M^2}=\frac{k+1}{2}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{k-1}{2}. \tag{4}$$

3. Разделим уравнение (3) на квадрат числа Маха и подставим вместо элементарной работы сил трения выражение из формулы Дарси:

$$\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\frac{dv}{v}=\frac{1}{M^2}\frac{ds}{s}-\frac{k\zeta}{2}\frac{dx}{D_h}$$

4. Подставим в полученное уравнение выражение (4) и учтем, что $\frac{dv}{v}=\frac{d\lambda}{\lambda}$:

$$\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}=\left(\frac{k+1}{2}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{k-1}{2}\right)\frac{ds}{s}-\frac{k\zeta}{2}\frac{dx}{D_h}. \tag{5}$$

5. Так как в данной работе исследуется плоскопараллельное течение газа, то величину $\frac{ds}{s}$ можно заменить на $\frac{dh}{h}$, где h, м – эффективная высота потока. Эту величину выразим через геометрическую высоту потока h_0, м и толщину вытеснения δ^*, м:

$$\frac{dh}{h}=-\frac{\frac{d\delta^*}{dx}}{h_0-\delta^*}dx=-\frac{\delta^{*\prime}}{h_0-\delta^*}dx \tag{6}$$

6. Толщину вытеснения потока определим, используя интегральное соотношение импульсов Кармана для плоской пластины

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{\zeta}{2},$$

где δ^{**}, м - толщина потери импульса. Проинтегрируем данное уравнение и подставим в него соотношение между толщиной вытеснения и толщиной потери импульса $\delta^*=H\delta^{**}$, где H – формпараметр пограничного слоя. В результате получим:

$$\delta^*=H\frac{\zeta}{2}x.$$

7. Подставим полученное выражение в (6):

$$\frac{dh}{h}=-\frac{H\frac{\zeta}{2}}{h_0-H\frac{\zeta}{2}x}dx\,. \tag{7}$$

8. Подставим выражение (7) в уравнение (5) и приведем полученное дифференциальное уравнение к явному виду:

$$\lambda'=\frac{\left(\frac{k+1}{2}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{k-1}{2}\right)\frac{H\frac{\zeta}{2}}{h_0-H\frac{\zeta}{2}x}+\frac{k\zeta}{2}\frac{1}{D_h}}{\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)}\lambda\,. \tag{8}$$

9. Определим гидравлический диаметр исследуемого канала $D_г$, считая его щелью бесконечной ширины b:

$$D_г=\frac{4F}{П}=\frac{4\times 2hb}{2(h+b)}=4h=0.04\ \text{м} \tag{9}$$

10. Определим по гидравлическому диаметру число Рейнольдса

$$Re = \frac{W_0 D_г \rho}{\mu} = \frac{500 \cdot 0.4 \cdot 1.2}{1.79 \cdot 10^{-5}} = 1.341 \cdot 10^6 \qquad (10)$$

11. По найденному числу Рейнольдса определим величину коэффициента гидравлического трения для гладкой трубы, используя данные работы [11]

$$\zeta = 2 \cdot 10^{-3}. \qquad (11)$$

12. Формпараметр также определим с помощью найденного числа Рейнольдса, используя данные работы [12]

$$H=2.6. \qquad (12)$$

13. Решая численно уравнение (8) с использованием соотношений (9) – (12) и начального значения приведенной скорости $\lambda_0=1.327$ получим оценочную величину критической длины канала $x_{кр}$:

$$x_{кр}=1.00 \text{ м (50 калибров)}$$

14. При рассмотрении частного случая уравнения (8), учитывающего только воздействие трением, получим величину критической длины канала

$$x_{кр}=2.29 \text{ м (115.5 калибров)}$$

15. В обоих случаях $l<x_{кр}$, следовательно, задача поставлена корректно.

Результаты моделирования

В результате расчета были получены поля распределения основных параметров в пограничном слое течения, таких как давление, температура и скорость рабочего тела. При этом дисбаланс энергии по расчетной области составил для сверхзвукового потока 0.38 %, а для дозвукового - 0.85 %.

Для сверхзвукового (рис. 3) и дозвукового (рис. 4) течений были построены профили распределения безразмерной температуры торможения по сечениям канала на расстояниях в 2, 4, 6, 8 и 10 калибров от входного сечения, соответственно.

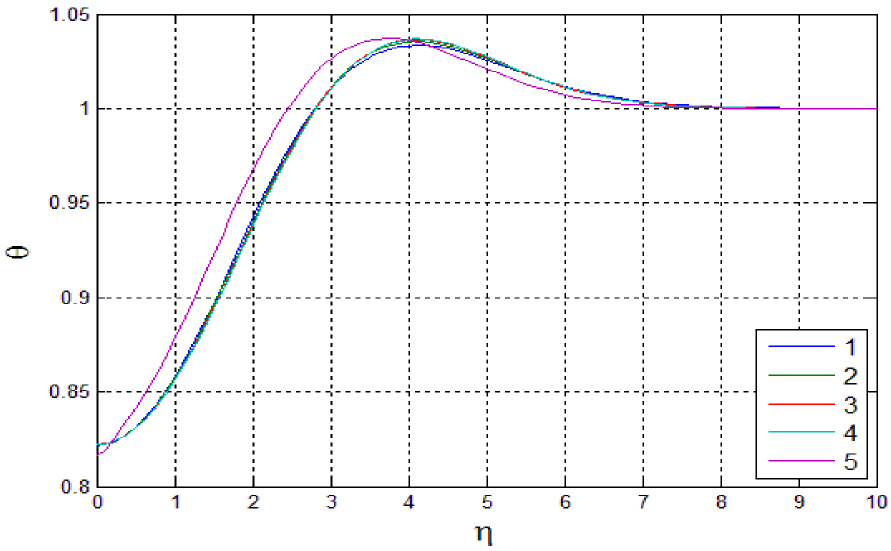

Рис. 3. Профили распределения температуры по сечениям (сверхзвуковое течение):
1 – Сечение 1 (2 калибра, r=0.822);
2 – Сечение 2 (4 калибров, r=0.822);
3 – Сечение 3 (6 калибров, r=0.822);
4 – Сечение 4 (8 калибров, r=0.822);
5 – Сечение 5 (10 калибров, r=0.816)

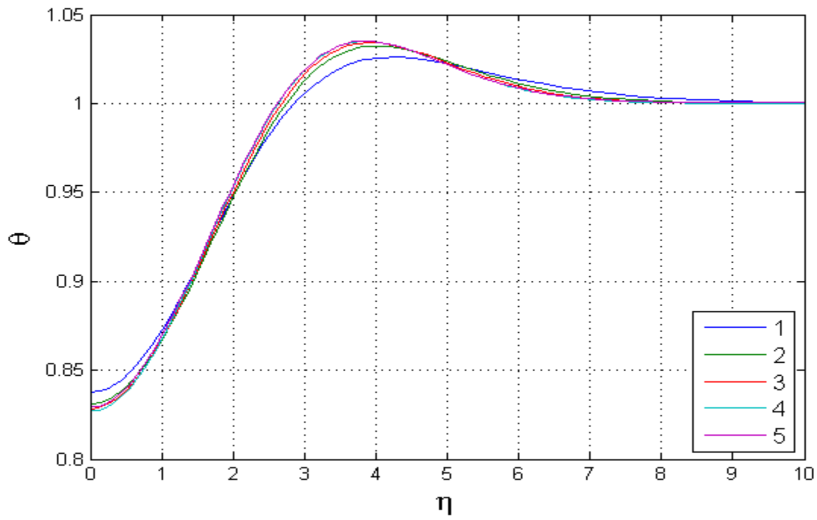

Рис. 4. Профили распределения температуры по сечениям (дозвуковое течение):
1 – Сечение 1 (2 калибра, r=0.837)
2 – Сечение 2 (4 калибров, r=0.831);
3 – Сечение 3 (6 калибров, r=0.828);
4 – Сечение 4 (8 калибров, r=0.827);
5 – Сечение 5 (10 калибров, r=0.829)

Анализ и верификация полученных данных

Из рис. 3 следует, что практически по всей длине сверхзвукового течения профили распределения безразмерной температуры торможения совпадают с высокой точностью. Исключение составляет только профиль в выходном сечении канала. Однако легко заметить, что в этом сечении нарушаются граничные условия (присутствует градиент температуры на стенке), что, вероятнее всего, вызвано особенностями применяемых алгоритмов численного счета в приграничном слое ячеек расчетной сетки. Краевые эффекты можно устранить установкой в выходном сечении канала сверхзвукового диффузора, однако в данной работе был рассмотрен только прямоугольный участок канала без учета его граничных областей.

Из рис. 4 следует, что особенностью данного течения является длительное развитие пограничного слоя по длине канала, что проявляется в завышении коэффициента восстановления в сечениях 1 – 3 (рис. 4). Данный эффект объясняется однородностью температуры во всех точках входного сечения: отсутствие градиента статической температуры не допускает диссипации теплоты механизмами теплопроводности. Следовательно, непосредственно во входном сечении коэффициент восстановлении равен единице. В силу гипотезы сплошности, а также из-за невозможности возникновения скачков разрежения, характеристики потока всюду являются гладкими функциями, следовательно, вниз по течению должно происходить постепенное снижение коэффициента восстановления вплоть до величины, соответствующей ламинарному пограничному слою сжимаемой жидкости.

Следовательно, для проведения корректной верификации полученных данных по аналитическому решению, полученному в работе [8], необходимо рассматривать сечение канала, для которого все переходные процессы завершились. Этому условию удовлетворяет четвертое сечение канала.

Проведем сравнение результатов численного расчета профиля безразмерной температуры торможения в четвертом сечении с аналитическим решением, полученным в работе [8] (рис. 5).

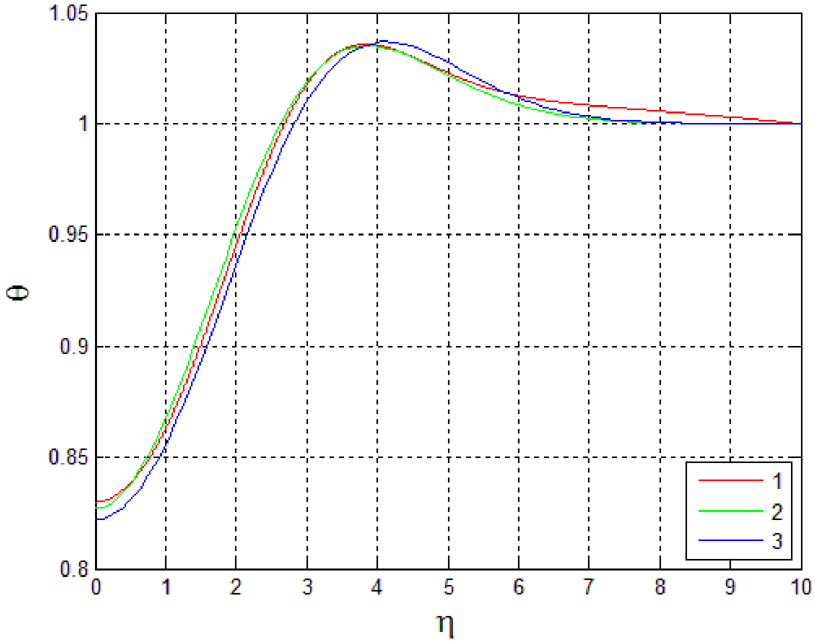

Рис. 5. Сравнение профиля во втором сечении с теоретической кривой:

1 – Теоретический профиль r=0.830 [8];

2 – Профиль в дозвуковом потоке r=0.827;

3 – Профиль в сверхзвуковом потоке r=0.822

Из рис. 5 видно, что как для сверхзвукового, так и для дозвукового течения наблюдается хорошее совпадение результатов численного расчета с теоретической кривой (наибольшее отклонение для сверхзвукового потока составляет 0.95 %, а для дозвукового – 0.88 %).

Заключение

В данной работе с помощью программного пакета ANSYS Workbench было проведено численное моделирование плоскопараллельного ламинарного течения воздуха в прямоугольном канале на дозвуковом и сверхзвуковом режимах и исследовано распределение безразмерной температуры торможения по высоте пограничного слоя в различных сечениях канала.

Было выявлено хорошее совпадение результатов численного счета с аналитическим решением, полученным в работе [8]. Наибольшее отклонение рассчитанных профилей от теоретической кривой для дозвукового потока составило 0.88 %, а для сверхзвукового – 0.95 %. При этом дисбаланс энергии по расчетной области составил для сверхзвукового потока 0.38 %, а для дозвукового - 0.85 %.

Таким образом, из полученных данных следует, что программа ANSYS Fluent позволяет с достаточной точностью численно рассчитывать параметры ламинарных течений газов в относительно широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Список литературы

1. Eckert E., Drewitz O. Die Berechnung des Temperaturfeldes in der laminaren Grenzschicht schnell angeströmter, unbeheizter Körper // Luftfahrt-Forschung. 1942. Bd. 19. S. 189-196.
2. Леонтьев А.И., Бурцев С.А. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 2. С. 310-322.
3. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергоатомиздат. 1985. 320 с.
4. Eckert E., Weise W. The Temperature of Unheated Bodies in a High-Speed Gas Stream // NACA TM 1000. 1941. 21 p.
5. Hilton W.F. Thermal Effects on Bodies in an Air Streams // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1938. V. 168. P. 43-57.
6. Eckert E., Weise W. Measurement of temperature distribution on the surface of unheated bodies in hight velocity flow // Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. 1942. Vol. 13. P. 246-254.
7. Бурцев С.А. Анализ влияния различных факторов на значение коэффициента восстановления температуры на поверхности тел при обтекании потоком воздуха. Обзор // Наука и образование МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электр. журн. 2004. № 11. P. 5. DOI: 10.7463/1104.0551021.
8. Петухов Б.С. Теплообмен в движущейся однофазной среде. Ламинарный пограничный слой: Монография. М.: Издательство МЭИ. 1993. 352с.
9. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
10. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 600 с.
11. Dean R.B. Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow// J. Fluids Engineering. 1978. Vol. 100. P. 215-223.
12. Volchkov E.P., Makarov M.S., Sakhnov A.Y. Heat transfer in the boundary layer with asymptotic favorable pressure gradient // International journal of heat and mass transfer. 2012. Vol. 55. № 4. P. 1126-1132.