

Некоторые аспекты изложения курса «Управление техническими системами» для студентов специальности «Прикладная механика»

05, май 2015

Наумов А. М.^{1,*}

УДК: 681.5

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}nam63@mail.ru

Введение

В учебной и методической литературе, посвящённой проблемам управления в технических системах, одним из важнейших разделов является раздел, посвящённый т.н. элементарным динамическим звеньям. Как известно, динамическое звено – это устройство любой физической природы и различного конструктивного оформления, описываемое тем или иным уравнением (как правило дифференциальным не выше второго порядка). Причём одним и тем же уравнением могут описываться весьма различные по своей природе устройства – механические, гидравлические, электрические, пневматические и т.д.

В большинстве источников [1-6] примеры элементарных звеньев представлены на основе электрических и электронных схем (т.н. RC -фильтры, RL -элементы, RCL - цепи, электродвигатели, лампы и т.д.). Для студентов приборных специальностей такой вид представления звеньев абсолютно понятен, естественен, приемлем и находится в контексте с изученными ранее дисциплинами. Для студентов же машиностроительных специальностей, в частности, кафедры «Прикладная механика», понятными и имеющими преемственность с ранее изученными дисциплинами являются примеры из механики. В данной работе рассмотрены механические примеры основных элементарных звеньев.

На рис.1 представлена колебательная система, содержащая поршень массой m [кг], упругую связь (пружину) жёсткостью C [Н/м], и среду, обеспечивающую вязкое трение с коэффициентом демпфирования α [кг/с]. К штоку приложена внешняя сила $F(t)$. Дифференциальное уравнение, описывающее её поведение:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (1)$$

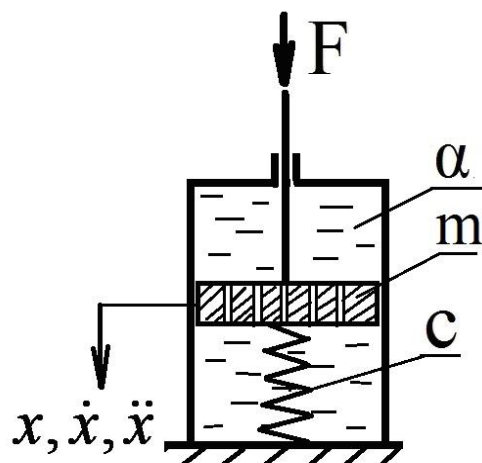


Рис.1

Подобная механическая система, её свойства, поведение, АЧХ, ФЧХ и т.д. подробно изучена студентами ещё в курсе «Теория механических колебаний», она для них привычна и понятна. Покажем, как на основе данной системы можно получить ряд очень важных в курсе «УТС» элементарных звеньев.

1. Интегрирующее звено

Представим, что поршень обладает крайне малой массой: $m \approx 0$ и отсутствует упругая связь $c = 0$. Тогда дифференциальное уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$\alpha \dot{x} = F(t),$$

где $F(t) = u(t)$ - входное воздействие на систему, а $x(t)$ - выходная величина звена. Приведём данное уравнение к виду:

$$\dot{x}(t) = ku(t), \quad (2)$$

где $k = 1/\alpha$ - коэффициент усиления звена. Решение уравнения (2):

$$x(t) = k \int_0^t u(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3)$$

Подставляя в качестве входного воздействия, как это принято, единичную ступенчатую функцию (функцию Хевисайда): $u(t) = H(t) = 1$, имеем переходную функцию звена:

$$x(t) = kt \quad (4)$$

График переходного процесса представлен на рис.2.

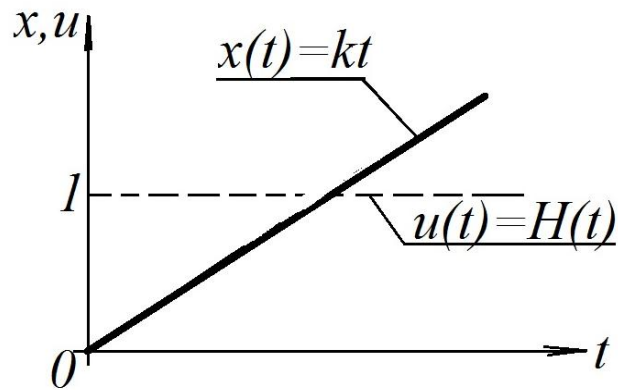


Рис.2

2. Аперiodическое (инерционное) звено

Данное звено можно получить из исходной системы считая, что поршень обладает крайне малой массой $m \approx 0$, но при этом жёсткость пружины не равна нулю $c \neq 0$. Тогда из (1) имеем:

$$\alpha \dot{x}(t) + cx(t) = F(t),$$

или

$$T\dot{x}(t) + x(t) = ku(t), \quad (5)$$

где $T = \frac{\alpha}{c}$ - постоянная времени звена, $k = \frac{1}{c}$ - коэффициент усиления звена. Решение уравнения (5):

$$x(t) = ku(t)(1 - e^{-t/T}) \quad (6)$$

Переходная функция представлена на рис. 3.

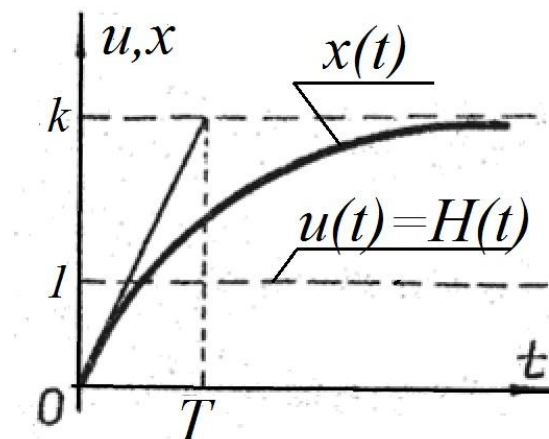


Рис.3

3. Неколебательное звено второго порядка.

В системе на рис. 1 предположим, что отсутствует упругая связь $c = 0$, но присутствуют демпфирование и масса поршня $m \neq 0$:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) = F(t)$$

или

$$T\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = ku(t) \quad (7)$$

где $T = \frac{m}{\alpha}$ - постоянная времени звена, $k = \frac{1}{\alpha}$ - коэффициент усиления звена. Воспользовавшись прямым преобразованием Лапласа, имеем:

$$Ts^2 X(s) + sX(s) = kU(s).$$

Передаточная функция звена: $W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts^2 + s}$. Переходную функцию

звена (отклик на ступенчатое воздействие) получим, применяя обратное преобразование Лапласа [7]:

$$x(t) = L^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{k}{Ts^3 + s^2}\right] = k(t - T) + kTe^{-t/T} \quad (8)$$

График переходной функции звена представлен на рис. 4.

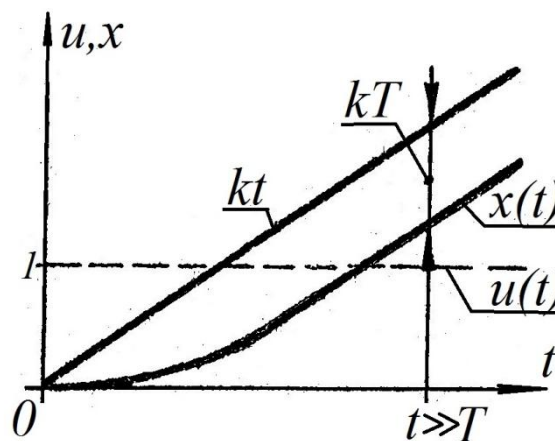


Рис.4

4. Колебательное (устойчивое) звено

В данном случае все параметры системы (c, m, α) ненулевые, и систему (1) можно представить так:

$$T^2\ddot{x}(t) + 2T\xi\dot{x}(t) + x(t) = ku(t) \quad (9)$$

где $T = \sqrt{\frac{m}{c}}$ - постоянная времени звена, $k = \frac{1}{c}$ - коэффициент усиления звена,

$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mc}}$ - постоянная затухания звена. Аналогично, преобразуя уравнение (9) по

Лапласу, получаем передаточную функцию звена: $W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$

, далее получаем и переходную функцию:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\left[W(s)\frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{k}{s(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)}\right] = \\ &= k\left[1 - e^{-nt}\left(\cos p_1 t + \frac{n}{p_1} \sin p_1 t\right)\right] \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{\xi}{T}, \quad p = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{T}, \quad p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = \frac{\sqrt{4c^2 - \alpha^2}}{2m}, \quad \frac{n}{p_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{4c^2 - \alpha^2}}.$$

График переходной функции приведён на рис. 5.

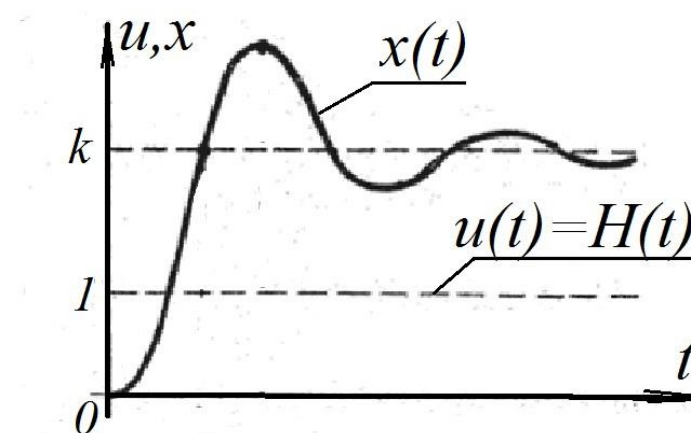


Рис.5

5. Консервативное (незатухающее колебательное) звено

Если представить вязкость демпфирующей среды бесконечно малой $\alpha \approx 0$, то уравнение (1) будет выглядеть следующим образом:

$$m\ddot{x}(t) + cx(t) = F(t),$$

или

$$T^2 \ddot{x}(t) + x(t) = ku(t) \quad (11)$$

где $T = \sqrt{\frac{m}{c}}$ - постоянная времени звена, $k = \frac{1}{c}$ - коэффициент усиления звена. Переходная функция звена:

$$x(t) = k[1 - \cos pt], \quad (12)$$

И её график представлен на рис. 6.

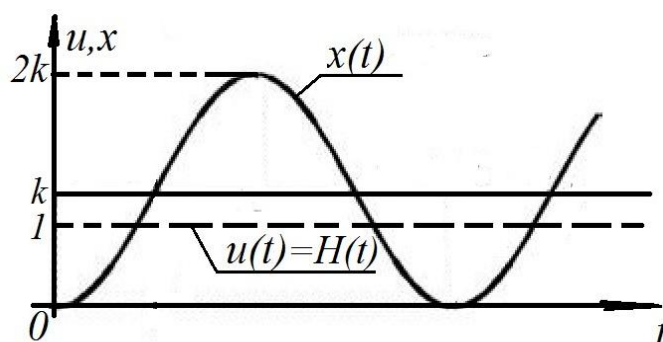


Рис.6

6. Реальное дифференцирующее звено первого порядка

Для реализации данного звена предлагается следующая механическая система (рис. 7). Здесь входное воздействие – кинематическое, т.е. $u(t)$ - перемещение штока поршня, который считается безмассовым ($m \approx 0$), а выход – это перемещение незакреплённого конца пружины $x(t)$.

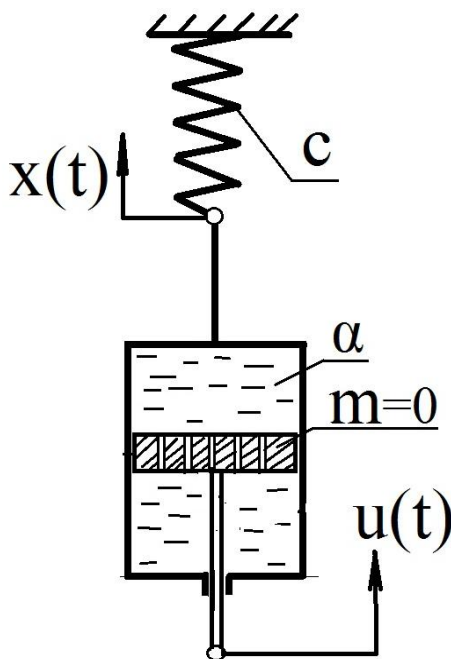


Рис.7

Тогда дифференциальное уравнение системы:

$$\alpha \frac{d}{dt}(u(t) - x(t)) = cx(t), \quad (13)$$

или

$$T\dot{x}(t) + x(t) = T\dot{u}(t) \quad (14)$$

Где $T = \frac{\alpha}{c}$ - постоянная времени (в данной схеме она же и коэффициент усиления)

звена. Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1},$$

переходная функция:

$$x(t) = Te^{-t/T} \quad (15)$$

График переходной функции на рис. 8.

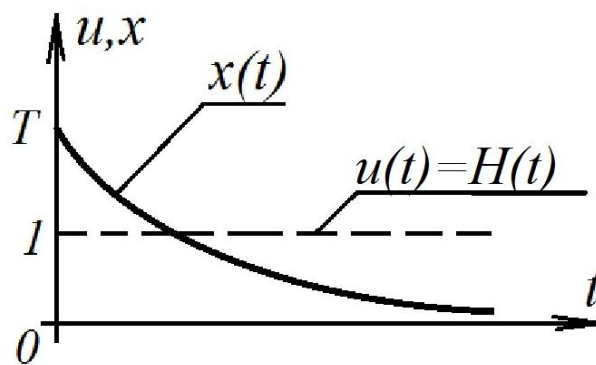


Рис.8

Необходимо отметить, что идеальное дифференцирующее звено нереализуемо ни в механических системах, ни в электронных схемах, это некоторая идеализация.

Что касается самого простого – усилительного (безынерционного или пропорционального) звена, то в учебно-методической литературе наряду с примерами из электротехники можно найти примеры из механических систем (это всевозможные рычаги, зубчатые передачи, редукторы и т.д.)

Выводы

Из вышеизложенного видно, как на основе одной механической системы (с небольшими вариациями), состоящей из упругой связи, демпфера и инертной массы, последовательно полагая некоторые её характеристики равными нулю, можно получить основные элементарные динамические звенья.

Список литературы

1. Деменков Н. П., Васильев Г. Н. Управление техническими системами: учебник для вузов / Деменков Н.П., Васильев Г.Н. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 399 с.
2. Суханов В.А. Автоматическое и автоматизированное управление на основе программно-технического комплекса КОНТАР: метод. указания к выполнению лаб.-практ. работ по дисциплинам "Управляющие ЭВМ и комплексы", "Управление техническими системами". М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. 64 с.
3. Ощепков А.Ю. Системы автоматического управления. Теория, применение, моделирование в MATLAB: учеб. пособие. 2-е изд, испр. и доп. СПб.: Лань. 2013. 208 с.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. В 2-х т. Т. 1. Линейные системы: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 288 с.
5. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1993. 492 с.
6. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. 2-е изд., перераб. М.: Энергия. 1980. 312 с.
7. Макаров И.М., Менский Б.М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований. Дробно-рациональные изображения: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1978. 247с.