электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 517.977.52

Решение задач оптимального выведения летательного аппарата в плоскопараллельном гравитационном поле с учетом ограничений на время полета

Кирилюк Е.В., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»

Научный руководитель: Степанов М.Н., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»
kafsm3@bmstu.ru

Введение

Ограниченность энергетических ресурсов ракет-носителей (РН) неизбежно приводит к необходимости определения программы выведения с некоторым наилучшим с точки зрения достижения заданных целей полета распределением затрат, то есть, фактически - к задаче построения оптимального с энергетической точки зрения управления. При выведении летательного аппарата под целью полета может подразумеваться как наиболее распространенная задача максимизации массы выводимой полезной нагрузки, так и задачи набора максимально возможных высоты или скорости. Все три указанные задачи можно рассматривать как частные случаи задачи максимизации полной механической энергии в момент достижения граничных условий.

В реальных баллистических задачах продолжительность полета задана или же ограничена некоторыми разумными пределами, выбор которых обусловлен такими факторами, как ресурс работы бортовой аппаратуры, особенности состава полезной нагрузки, выводимой на орбиту, и т.п. Поэтому задача оптимизации сводится, фактически, к поиску некоторого локального для заданных массово-энергетических характеристик оптимума, который достижим в условиях заданных ограничений.

Целью данной работы является определение оптимальных по критерию максимизации массы полезной нагрузки программ выведения космического аппарата (КА) на заданную высоту при наличии ограничений на время полета для проведения начальных проектно-баллистических расчетов. Задача определения оптимального управления решается на основе принципа максимума Понтрягина.

В рамках работы рассматривается модельная задача в плоскопараллельном гравитационном поле [6], однако найденные оптимальные программы выведения можно принять в качестве квазиоптимальных для реальной задачи. Квазиоптимальное управление в некоторых случаях используется при построении итеративных терминальных алгоритмов для БЦВМ, т.к. расчет точных задач, учитывающих большое количество факторов, является очень трудоемким с точки зрения машинного времени и не всегда может производится в режиме реального времени на борту. Кроме того, действие ряда факторов является сложно формализуемым. При использовании квазиоптимального управления его параметры в процессе полета уточняются через некоторые заданные временные интервалы с учетом параметров реализовавшейся траектории и заданных краевых условий. Алгоритм управления, в силу отмеченных причин, значительно упрощается, в то время как потери выводимой массы относительно реализуемой при полете по в полном смысле оптимальной траектории, как правило, не превышают долей процента [10]. Одним из примеров использования итеративного алгоритма управления может служить метод, реализованный на РН «Сатурн-5» [9].

1. Постановка задачи оптимального управления. Выбор функционала.

Задача выведения РН на заданную высоту рассматривается с учетом следующих допущений:

- влияние атмосферы и вращение Земли не учитываются;

- гравитационное поле Земли является плоскопараллельным, ускорение силы притяжения постоянно для всех высот и принимается равным: g=9,80665 м/с^2;

- траектория РН лежит в вертикальной плоскости.

Рассматривается движение второй ступени РН (вне плотных слоев атмосферы) в стартовой системе координат $Ox_c y_c$, ось Oy_c которой направлена вертикально вверх, ось Ox_c - перпендикулярно оси Oy_c, в сторону движения, описываемое системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \dfrac{\beta w_{ист} \cos\vartheta}{m}; \\ \dot{V}_y = \dfrac{\beta w_{ист} \sin\vartheta}{m} - g; \\ \dot{x}_c = V_x; \\ \dot{y}_c = V_y; \\ \dot{m} = -\beta, \end{cases} \qquad (1)$$

где

V_x, V_y - проекции скорости РН на соответствующие координатные оси;

$w_{ист} = const$ - скорость истечения продуктов сгорания из сопла двигателя;

β - массовый секундный расход топлива;

ϑ - угол тангажа;

m - масса РН.

Параметры управления удовлетворяют следующим ограничениям:

$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\beta \in [\beta_{\min}; \beta_{\max}]$.

Начальная высота полета составляет $y(t_0) = y_0 = 44{,}5$ км. Тяговооруженность ступени равна 1. За основу взяты характеристики одной из находящихся в настоящее время в эксплуатации РН, однако для удобства и унификации расчетов без привязки к конкретному типу РН, масса РН, а значит – и массовый секундный расход топлива, нормируются относительно начальной массы: $\tilde{m}(t) = \frac{m(t)}{m(t_0)}$, $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{m(t_0)}$.

Таким образом, массово-энергетические характеристики РН:

$w_{ист} = 3186{,}9$ м/с; $\tilde{\beta}_{\min} = 0$; $\tilde{\beta}_{\max} = 3{,}077145 \cdot 10^{-3}$; $\tilde{m}(t_0) = 1$.

Заданы начальные условия:

$V_x(t_0) = V_{x0}$, $V_y(t_0) = V_{y0}$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $m(t_0) = m_0$.

И граничные условия (ГУ): $y(t_1) = y_1$, $V_x(t_1) = V_{x1}$, $V_y(t_1) = V_{y1} = 0$. (2)

Под задачей оптимального управления будем понимать поиск такой программы изменения вектора тяги $\bar{P}(t)$, т.е. такого управления $\bar{u} = [\vartheta, \beta]^T$, которое в конце участка выведения ($t = t_1$) при выполнении ГУ (2) обеспечивает минимум функционала вида:

$I = t_1 - km(t_1)$.

(3)

Данный функционал представляет собой компромисс между затратами на выведение массы и затратами на сокращение времени полета [4]. Коэффициент k выступает в качестве регулятора компромисса, при этом при стремлении его к предельным значениям получаем:

- при $k \to 0$ - предельный переход к задаче быстродействия: конечная масса будет стремиться к своему абсолютному минимуму, соответствующему наискорейшему выведению;

- при $k \to \infty$ - предельный переход к задаче выведения с минимальным расходом массы топлива: конечная масса будет стремиться к своему абсолютному максимуму без учета ограничения на время выведения.

Использование функционала (3) в задаче оптимизации позволяет, задавая ряд значений коэффициента компромисса k, произвести оценку диапазона конечной массы, которую можно вывести на целевую высоту с помощью РН с заданными энергетическим характеристиками, и соответствующего ему диапазона затрачиваемого на выведение времени. Далее, руководствуясь заданным ограничением по времени, из множества найденных оптимальных траекторий возможно выбрать наиболее приемлемую в условиях конкретной задачи, имея возможность количественно оценить изменение затрат массы топлива, необходимых для сокращения времени выполнения задачи, или, наоборот – возможности увеличения выводимой массы в ущерб быстродействию выполнения поставленной задачи.

2. Формализация задачи оптимального управления с точки зрения принципа максимума Понтрягина.

Осуществим переход от поставленной задачи оптимального управления к краевой задаче согласно подходу, описанному в [1].

Функция Гамильтона-Понтрягина (ФГП) для системы (1) будет иметь вид:

$$H = (p_{V_x} \cos\vartheta + p_{V_y} \sin\vartheta)\frac{\beta w_{ucm}}{m} - p_{V_y} g + p_x V_x + p_y V_y - p_m \beta. \qquad (4)$$

Терминант системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} l = {} & \lambda_0 (t_1 - km(t_1)) + \lambda_{V_x}^0 (V_x(t_0) - V_{x0}) + \lambda_{V_y}^0 (V_y(t_0) - V_{y0}) + \lambda_x^0 (x(t_0) - x_0) + \\ & + \lambda_y^0 (y(t_0) - y_0) + \lambda_m^0 (m(t_0) - m_0) + \lambda_{V_y}^1 (V_y(t_1) - V_{y1}) + \lambda_{V_x}^1 (V_x(t_1) - V_{x1}) + \\ & + \lambda_y^1 (y(t_1) - y_1). \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнения Эйлера для сопряженных переменных p_i, согласно условию стационарности по фазовым координатам, запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p}_{V_x} = -p_x, \\ \dot{p}_{V_y} = -p_y, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = 0, \\ \dot{p}_m = \dfrac{\beta w_{ucm}}{m^2}(p_{V_x}\cos\vartheta + p_{V_y}\sin\vartheta). \end{cases} \tag{6}$$

Первые четыре уравнения данной системы можно аналитически проинтегрировать:

$$\begin{aligned} &p_{V_x}(t) = -p_x(t_0)t + p_{V_x}(t_0), \\ &p_{V_y}(t) = -p_y(t_0)t + p_{V_y}(t_0), \\ &p_x(t) = p_x(t_0) = p_{x0}, \\ &p_y(t) = p_y(t_0) = p_{y0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Существенные условия трансверсальности будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &p_x(t_1) = 0, \\ &p_m(t_1) = k\lambda_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Условие стационарности по времени:

$$H(t_1) = \frac{\partial l}{\partial t_1} = \lambda_0 = H(t_0). \tag{9}$$

Согласно необходимому условию оптимальности, для достижения максимума функционала (3), ФГП должна достигать абсолютного максимума на множестве допустимых управлений. Что будет выполняться при соблюдении следующих условий:

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\max}, \ \rho > 0, \\ 0, \ \rho < 0, \\ [0, \beta_{\max}], \rho = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$tg\,\vartheta = \frac{p_{V_y}}{p_{V_x}}, \tag{11}$$

где $\rho = p_{V_x}\cos\vartheta + p_{V_y}\sin\vartheta - \dfrac{p_m m}{w_{ucm}}$ - функция переключения (ФП).

Из (7) и (8) следует, что:

$$\begin{aligned} &p_x(t_0) = p_x(t_k) = 0 \to p_{V_x}(t) = p_{V_x}(t_0); \\ &p_{V_y}(t) = -p_y(t_0)t + p_{V_y}(t_0); \\ &p_y(t) = p_y(t_0) = const. \end{aligned} \tag{12}$$

Формализация исходной задачи приводит к решению краевой задачи с четырьмя ГУ: (2), (8) и четырьмя свободными параметрами: p_{y0}, p_{V_x0}, p_{V_y0}, p_{m0}. Одно из граничных условий может быть использовано для определения момента времени t_1, т.е. в качестве параметра достижения конечного многообразия при численном решении краевой задачи. Для понижения размерности краевой задачи на порядок воспользуемся свойством однородности множителей Лагранжа и примем, что в начальный момент времени $p_V(t_0)=\sqrt{p_{V_x}^2(t_0)+p_{V_y}^2(t_0)}=1$, тогда:

$$\begin{cases} p_{V_x}(t_0)=\cos\vartheta_0; \\ p_{V_y}(t_0)=\sin\vartheta_0. \end{cases}$$

Данный способ нормирования множителей Лагранжа наиболее удобен, так как позволяет перейти от достаточно абстрактных сопряженных переменных к наглядному с физической точки зрения параметру – начальному значению угла тангажа. Таким образом, остается три свободных независимых параметра краевой задачи ($p_{y0},\vartheta_0,p_{m0}$) и её порядок понижается.

Уравнения движения ЛА, описывающие оптимальную траекторию, будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{V}_x=\dfrac{\beta w_{ucm}}{m}\dfrac{\cos\vartheta_0}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0+(-p_{y0}t+\sin\vartheta_0)^2}}, \\ \dot{V}_y=\dfrac{\beta w_{ucm}}{m}\dfrac{-p_{y0}t+\sin\vartheta_0}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0+(-p_{y0}t+\sin\vartheta_0)^2}}, \\ \dot{x}=V_x, \\ \dot{y}=V_y, \\ \dot{m}=-\beta, \\ \dot{p}_m=\dfrac{\beta w_{ucm}}{m^2}\sqrt{\cos^2\vartheta_0+(-p_{y0}t+\sin\vartheta_0)^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Решение краевой задачи производится методом Ньютона с применением замены частных производных конечными разностями первого порядка [2], [3] и нормированием составляющих вектор-функции невязок:

$$F(p_{y0},\vartheta_0,p_{m0};\ t_1)=\{(y(t_1)-y_1),\ (V_x(t_1)-V_{x1}),\ (V_y(t_1)-V_{y1})\}.$$

Из условия (9) однозначно определяется значение множителя Лагранжа λ_0, таким образом, как следует из (8), значение переменной, сопряженной массе, в момент окончания траектории также однозначно определено при заданном значении коэффициента компромисса k: $p_m(t_1)=k\lambda_0$. Данное условие можно использовать в качестве параметра достижения конечного многообразия при численном решении краевой задачи, что достаточно удобно в связи с тем, что функция $p_m(t)$ является неубывающей.

Стоит отметить, что учет ограничений на время полета возможно произвести также с помощью введения соответствующего граничного условия по времени в терминант системы (5). В этом случае минимизируемый функционал будет иметь простой вид:

$$I = -m(t_1). \tag{14}$$

Однако такой подход приводит к проблеме малой области сходимости краевой задачи. Использование функционала (3) позволяет разрешить данную проблему. При этом в случае использования в качестве параметра достижения конечного многообразия значения $p_m(t_1)$, однозначно определяемого коэффициентом компромисса k, данный коэффициент можно рассматривать в качестве масштабного для гиперповерхности, отвечающей функции невязок $F(p_{y0}, \vartheta_0, p_{m0};\ t_1)$. Использование коэффициента k вместо задания конкретного значения t_1 значительно увеличивает область сходимости краевой задачи: даже при грубом начальном приближении варьируемых параметров $p_{y0}, \vartheta_0, p_{m0}$, далеком от значений, соответствующих искомому решению, градиентный метод стабильно показывает квадратичную сходимость. В то время как при использовании функционала (14) и задании граничного условия для t_1, начальное приближение должно быть достаточно близким к искомому решению. С учетом высокой чувствительности решения к величине начального значения переменной, сопряженной высоте, и ее малости, а также отсутствия очевидного физического смысла сопряженных переменных, обеспечение хорошего начального приближения для свободных параметров краевой задачи представляется достаточно сложным. Кроме того, использование функционала (3) с предельными значениями коэффициента компромисса позволяет провести быструю оценку реализуемого интервала выполнения поставленной задачи.

3. Результаты расчетов.

В качестве примера рассмотрим решение оптимизационной задачи с описанным критерием качества (3) для следующих краевых условий:

$$V_x(t_0) = 1650 \text{ м/с},\ V_y(t_0) = 900 \text{ м/с},\ x(t_0) = 0,\ y(t_0) = 44500 \text{ м},\ \tilde{m}(t_0) = 1{,}0;$$
$$y(t_1) = 300000 \text{ м},\ V_x(t_1) = 7300 \text{ м/с},\ V_y(t_1) = 0.$$

Рассматриваемый диапазон варьирования коэффициента компромисса – $k \in [k^{\min}; +\infty)$, где $k = k^{\min} = 0$ будет соответствовать, как отмечалось выше, решению задачи быстродействия, а под $k \to +\infty$ будем понимать решение задачи максимизации конечной массы без ограничения на полное полётное время, т.е., фактически, задачу максимизации функционала (14).

На рис. 1 представлены зависимости полного полетного времени, моментов начала и конца пассивного участка траектории (ПУТ) от значения коэффициента k, на рис. 3 – зависимость массы полезной нагрузки от значения коэффициента k. Как видно из данных графиков, значения полного времени полета и конечной массы ограничены двумя горизонтальными асимптотами, соответствующими указанными предельными случаями: решению задачи быстродействия и решению задачи максимизации массы. Данные горизонтальные асимптоты образуют две соответствующие зоны «нечувствительности» решения к значению коэффициента k. Будем считать изменение конечной массы несущественным, если оно составляет менее $1\cdot 10^{-8}$ единиц. Тогда в рассматриваемом случае за диапазоны «нечувствительности» приближенно принимаются $k\in[0;\ 3400]$ и $k\in[10^9;+\infty)$. Таким образом, очевидно, что, для получения решения задачи максимизации массы без ограничения по времени, достаточно задать коэффициент $k>10^6$, т.к. отличие между решениями, полученными при $k=10^6$ и $k=10^9$ составит менее $1\cdot 10^{-7}$ единиц относительной массы. Рис. 2 иллюстрирует аналогичные представленным на рис. 1 зависимости в линейном масштабе по оси абсцисс в диапазоне «чувствительности» решения к значению коэффициента компромисса.

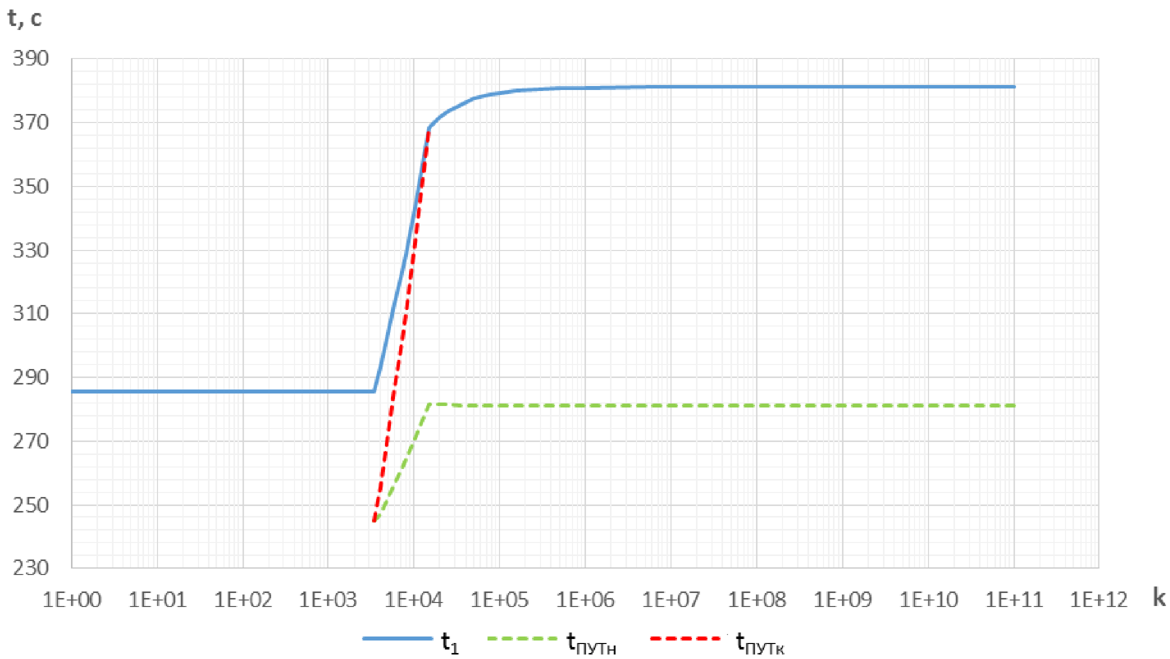

Рис. 1. Зависимости полной продолжительности полета, моментов начала и конца ПУТ от значения коэффициента компромисса

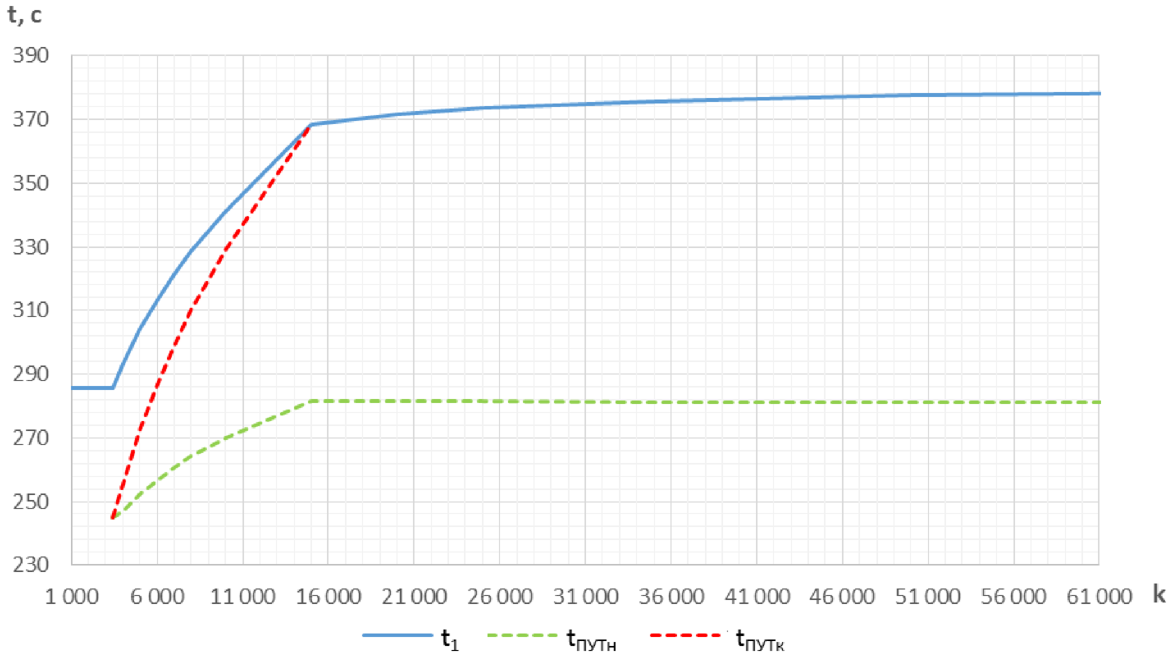

Рис. 2. Зависимости полной продолжительности полета, моментов начала и конца ПУТ от значения коэффициента компромисса в диапазоне «чувствительности»

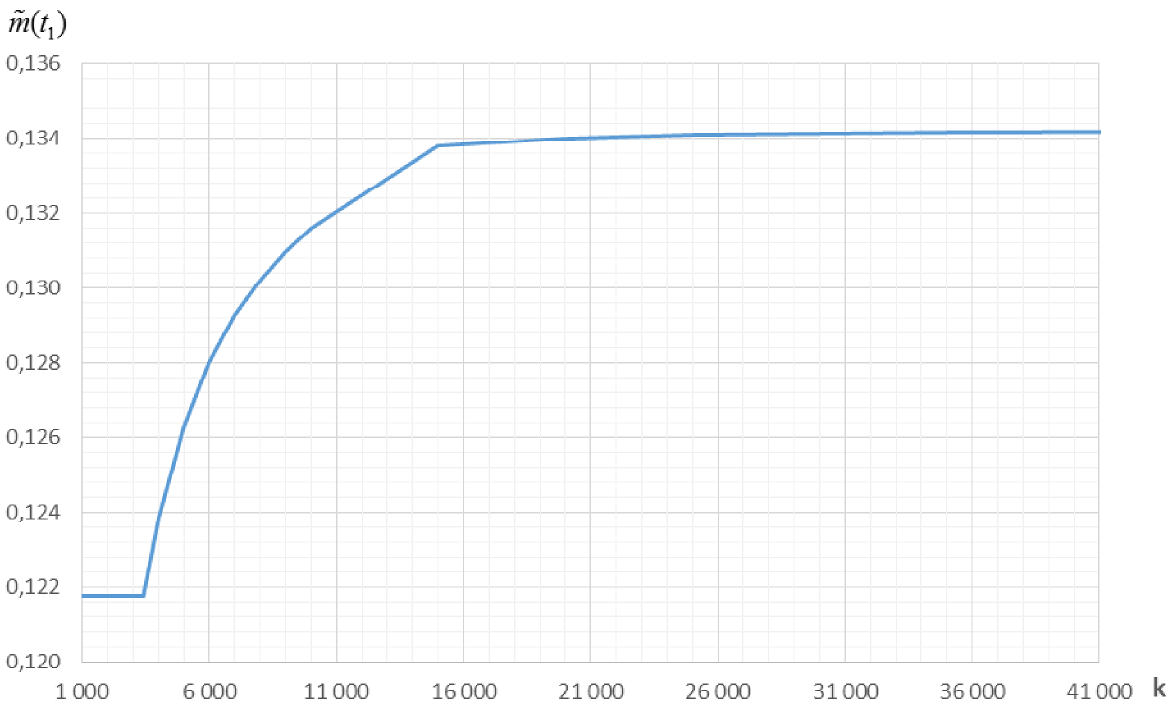

Рис. 3. Зависимость выводимой массы полезной нагрузки от коэффициента компромисса в диапазоне «чувствительности»

Более наглядным с точки зрения оценки влияния ограничения по времени полета на максимальную выводимую массу является рис. 4, на котором представлена зависимость $m(t_1)$. Данный график позволяет количественно оценить изменение затрат массы, необходимых для сокращения времени выведения, или, наоборот – возможности увеличения выводимой массы в ущерб быстродействию выполнения поставленной задачи. Однако, по зависимости $m(t_1)$ не представляется возможным судить о типе структуры управления, к которому принадлежит оптимальное решение, соответствующее той или иной точке графика. Тип структуры управления можно легко определить по рис. 1: левая горизонтальная асимптота соответствует единственной траектории с полностью активным участком (АУТ); далее, до момента пересечения графиков, соответствующих полному полетному времени и времени окончания ПУТ (пересечение соответствует излому при $k \approx 15000$), следует структура управления с двумя АУТ, т.е. двумя точками переключения управления; и, наконец, плавному участку кривой и правой горизонтальной асимптоте соответствует структура управления с одним переключением, ГУ для которых достигаются на ПУТ. Стоит отдельно отметить, что глобально оптимальное решение задачи максимизации массы в плоскопараллельном поле в диапазоне высот выведения до 550 км включительно соответствует конечному значению полетного времени и траектории с одним переключением управления. Использование модели плоскопараллельного поля для больших высот выведения будет являться некорректным в связи с большой продолжительностью траекторий.

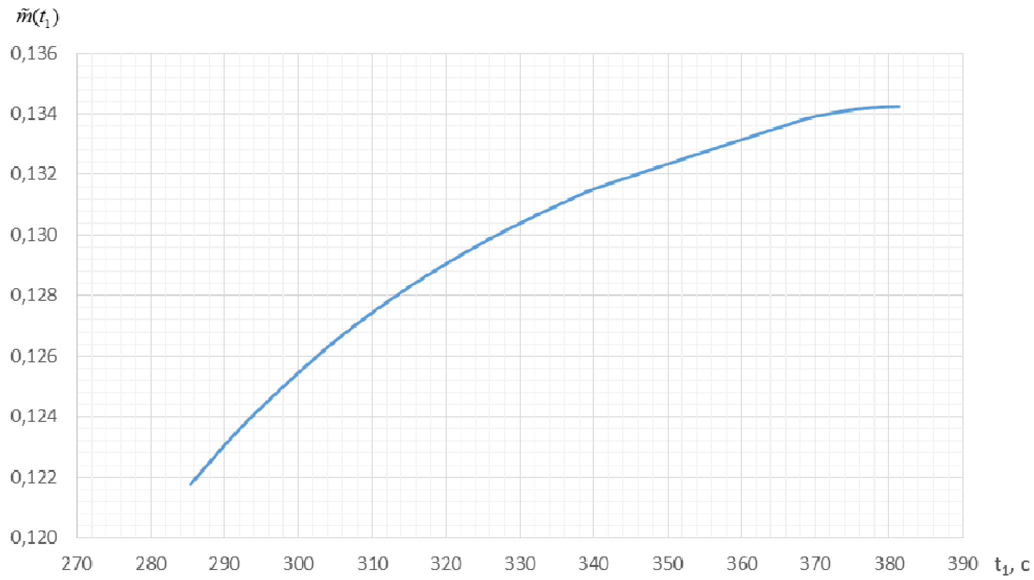

Рис. 4. Зависимость выводимой массы полезной нагрузки от ограничения на полное время полета

На рис. 5-7 представлены графики зависимостей искомых параметров краевой задачи ϑ_0, p_{m0}, p_{y0} от значения коэффициента компромисса соответственно. Оптимальные программы изменения угла тангажа для различных значений коэффициента компромисса представлены на рис. 8, а оптимальные циклограммы работы двигательной установки (ДУ) отражают графики функций переключения, помещенные на рис. 9 (рис. 10 – увеличенный фрагмент). Соответствующие данным законам управления оптимальные траектории движения РН – на рис. 11.

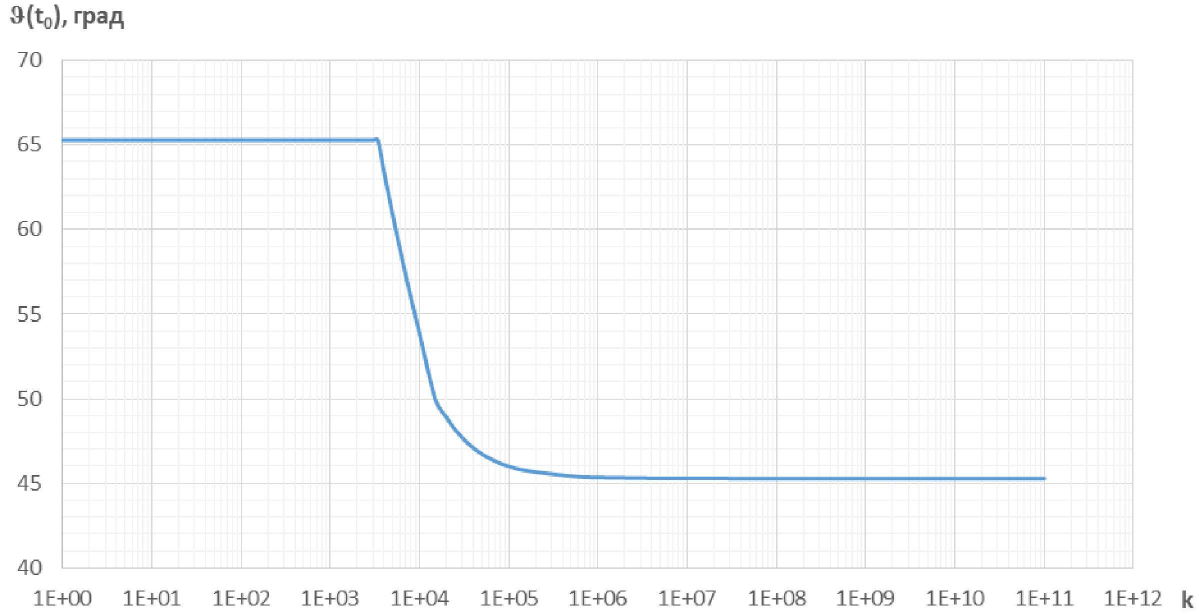

Рис. 5. Зависимость начального значения угла тангажа от значения коэффициента компромисса

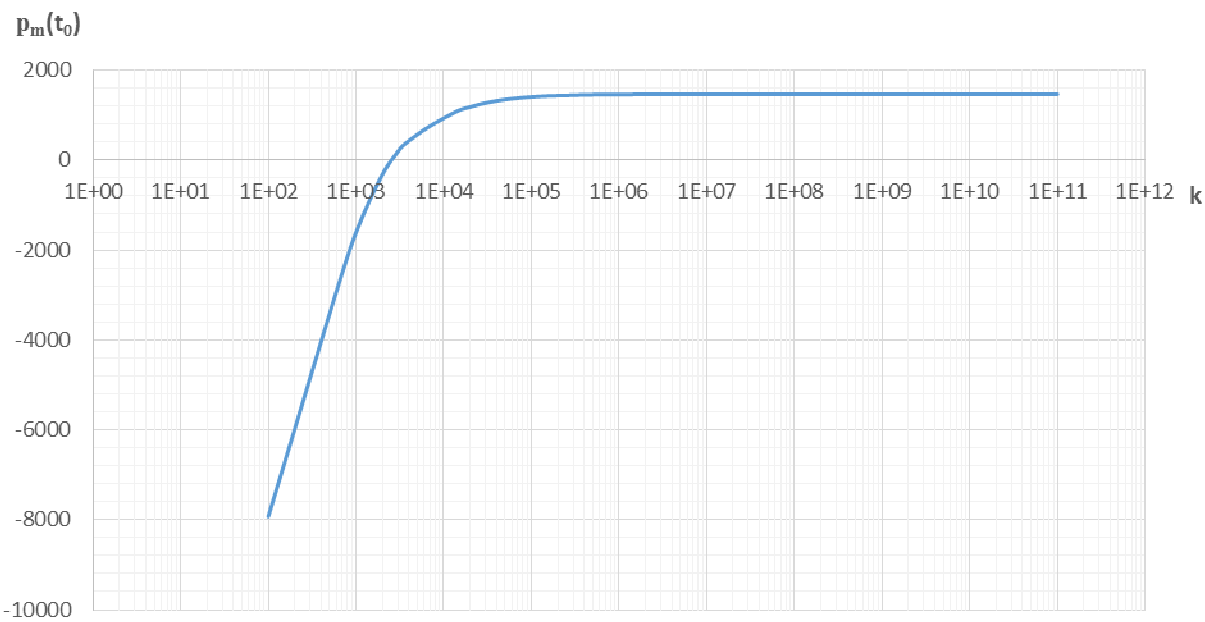

Рис. 6. Зависимость начального значения переменной, сопряженной массе, в зависимости от значения коэффициента компромисса

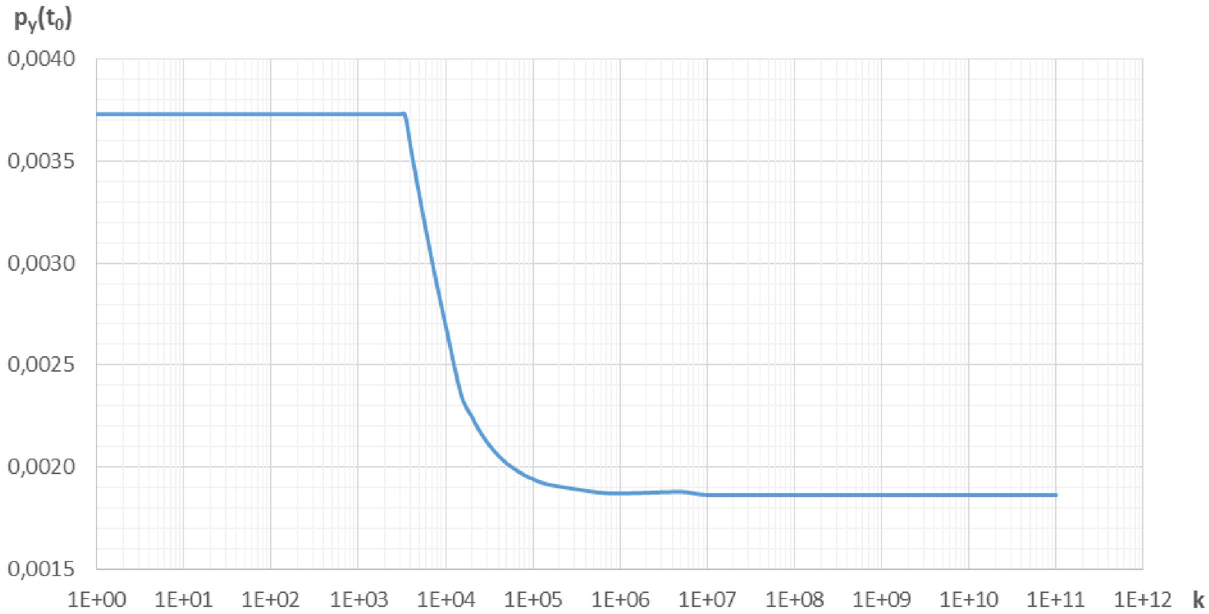

Рис. 7. Зависимость начального значения переменной, сопряженной координате *y*, в зависимости от значения коэффициента компромисса

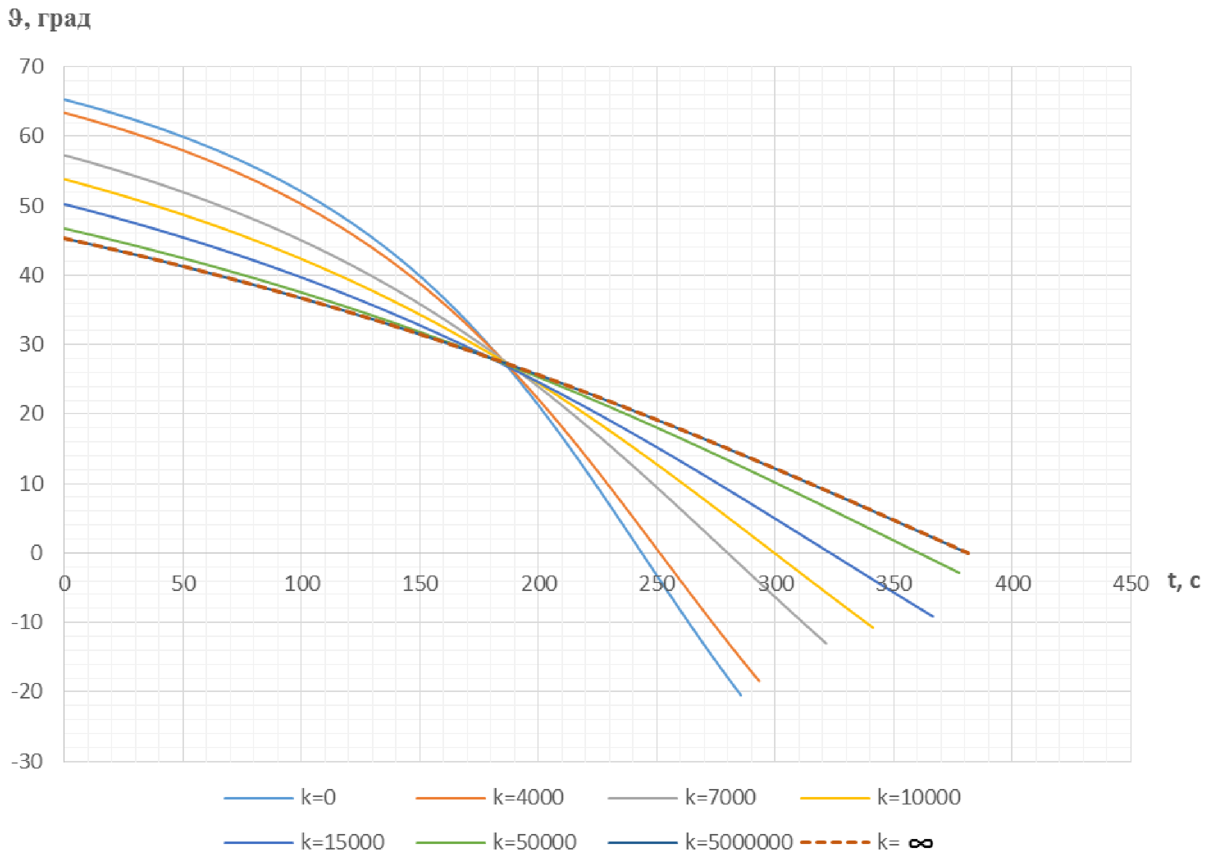

Рис. 8. Оптимальные программы изменения угла тангажа для различных значений коэффициента компромисса

Из рис. 5, 8 видно, что, чем ближе поставленная задача к задаче быстродействия, тем больше должно быть начальное значение угла тангажа и больше – крутизна оптимальной траектории РН (рис. 11). Суммарные потери скорости, состоящие в рассматриваемой модели из потерь на управление и гравитационных потерь, при прочих равных условиях тем больше, чем круче траектория движения. Таким образом, чем круче траектория, тем больше энергетики ДУ расходуется, фактически, на выполнение ГУ по скорости и высоте, и тем больший процент от общей массы ступени должно составлять топливо.

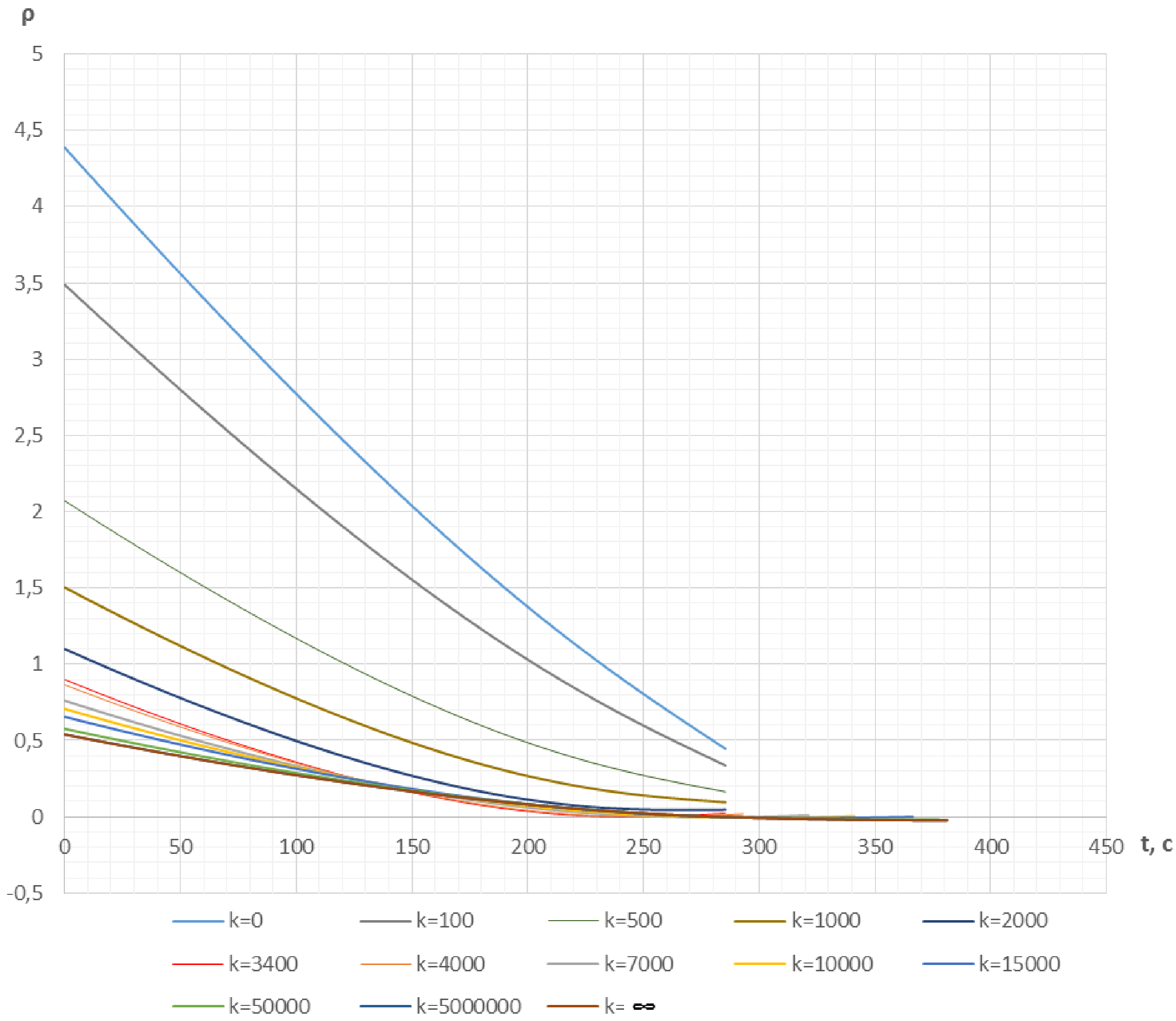

Рис. 9. Графики функций переключения для различных значений коэффициента компромисса

С увеличением коэффициента компромисса возрастает начальное значение переменной, сопряженной массе (рис. 6), входящей в функцию переключения ρ с отрицательным знаком и имеющей наибольшее влияние на ее положение относительно оси абсцисс. Следовательно, изменение коэффициента компромисса оказывает влияние на положение и вид функции переключения, в том числе и в диапазонах, условно названных диапазонами «нечувствительности» решения (см. рис. 9, 10): при увеличении коэффициента от 0 до $k \approx 3400$ происходит постепенное образование выраженного минимума функции переключения и приближение ее к оси абсцисс. Значению $k \approx 3400$, соответствующему первому излому на рис. 1-3, на рис. 10 соответствует случай касания точки минимума функции переключения оси абсцисс, т.е. переход от структуры управления с полностью активным выведением к структуре управления, содержащей ПУТ. При дальнейшем увеличении коэффициента компромисса функция переключения становится более пологой, ее минимум – менее выраженным, а момент первой смены знака – т.е. выключения двигателя – сдвигается по временной оси вправо, до тех пор, пока при $k > 15000$ не происходит перехода к структуре управления, которой соответствует окончание траектории на ПУТ. Второй диапазон «нечувствительности» соответствует плавному понижению правого конца функции переключения при увеличении коэффициента компромисса до полного исчезновения минимума при $k = +\infty$.

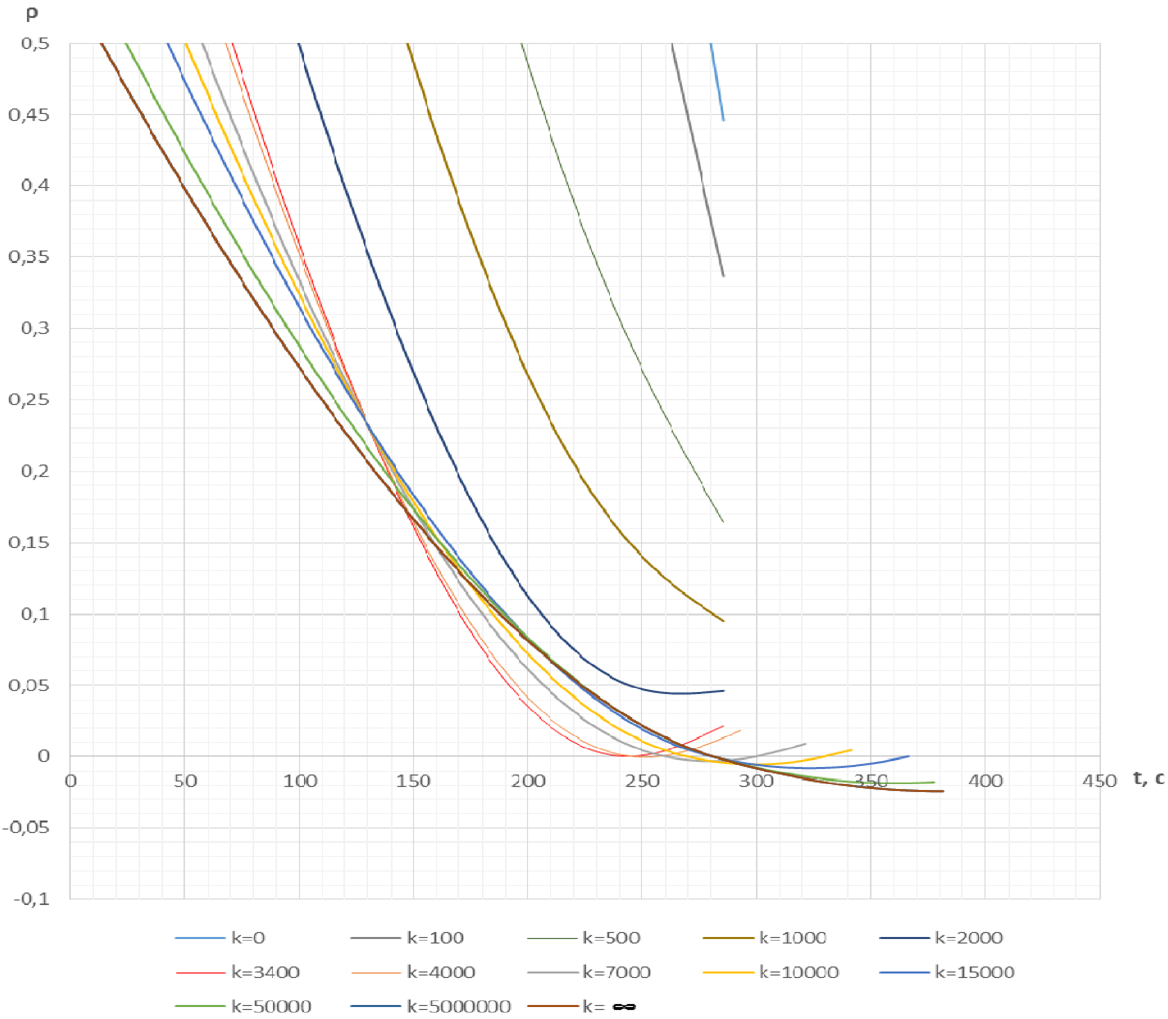

Рис. 10. Увеличенный фрагмент рис. 9

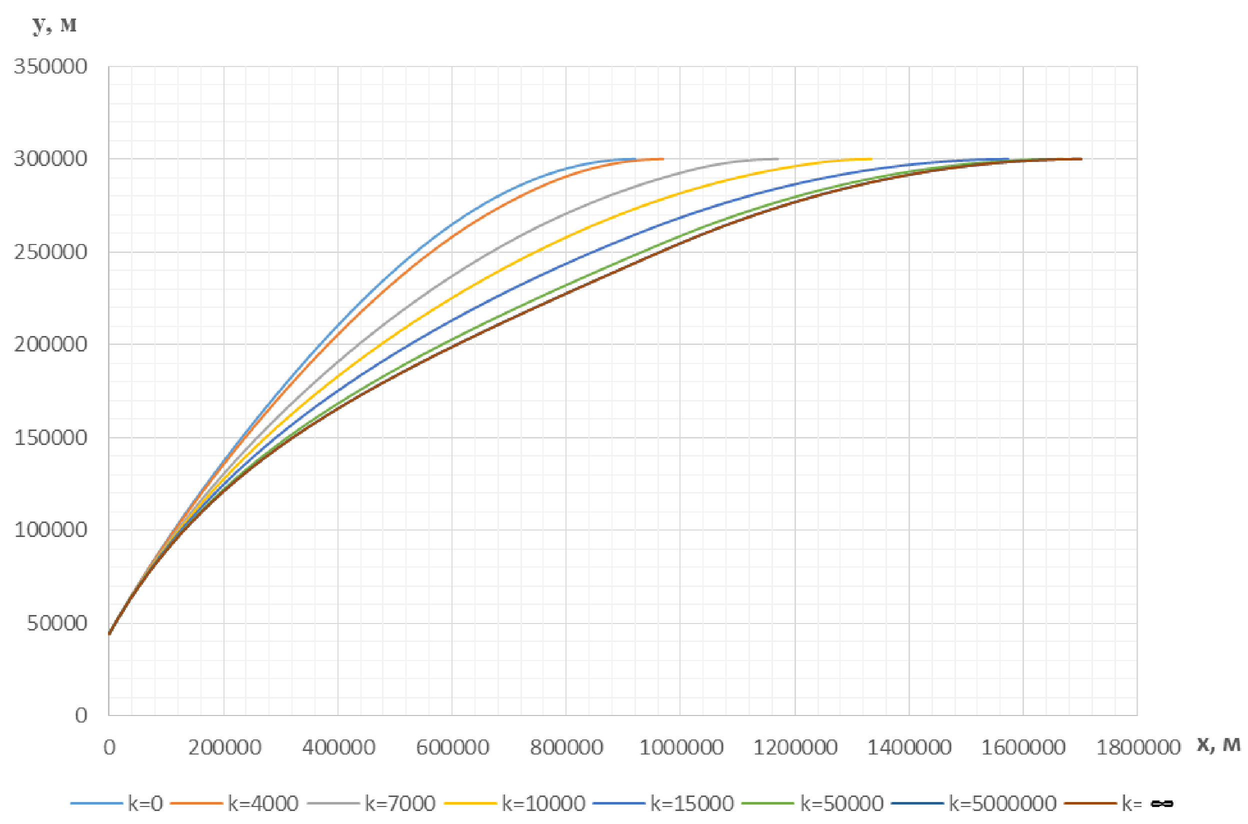

Рис. 11. Оптимальные траектории, соответствующие различным значениям коэффициента компромисса

Для качественной оценки соотношения между выигрышем в конечной массе и уменьшением оперативности выполнения задачи по сравнению с задачей быстродействия введем следующие относительные характеристики:

$$\Delta m = \frac{m(t_1) - m(t_{1\min})}{m(t_{1\min})} \cdot 100\ \%;$$

$$\Delta t_1 = \frac{t_{1\min} - t_1}{t_{1\min}} \cdot 100\ \%,$$

где $t_{1\min}$ - время, полученное по результатам решения задачи быстродействия, а $m(t_{1\min})$ - соответствующая решению задачи быстродействия конечная масса (т.е. минимальная масса).

На рис. 12 приведена зависимость $\Delta m(\Delta t_1)$ для рассматриваемой высоты $y(t_1) = 300$ км. Как видно из графика, введение в циклограмму полета ПУТ позволяет существенно повысить выводимую массу - более чем на 10% относительно задачи быстродействия, однако в предельном случае потери оперативности составят треть от длительности траектории полностью активного выведения. В силу введения нормировки массы, данный качественный результат может быть отнесен к РН с различными начальными массовыми характеристиками.

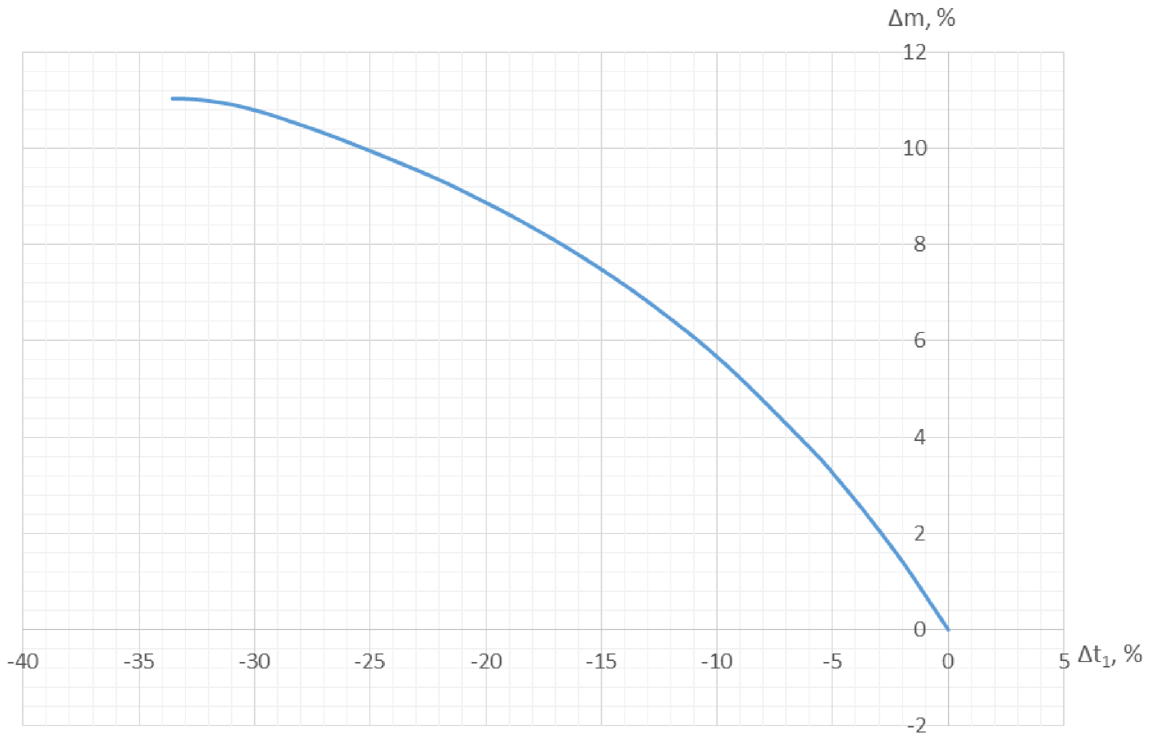

Рис. 12. Зависимости между увеличением массы полезной нагрузки и потерями оперативности выполнения задачи выведения для различных целевых высот

В силу взаимности задач максимизации конечного значения горизонтальной проекции скорости при заданных конечных массе и высоте, максимизации высоты выведения при заданных конечных значениях скорости и массы и максимизации выводимой массы при заданных конечных значениях скорости и высоты [6], качественные зависимости, получаемые при рассмотрении соответствующих по форме функционалу (3) компромиссных функционалов «скорость-время» и «высота-время», будут аналогичны представленным.

Заключение

В рамках проведения начальных проектно-баллистических расчетов нередко возникает необходимость решения задач с ограничениями по фактору оперативности. Предложенный подход к получению спектра оптимальных траекторий, соответствующих различным структурам управления (полностью активное выведение, наличие двух точек переключения или же одной точки переключения тяги) для заданных граничных условий и различной степени компромисса между затратами массы и затратами времени позволяет произвести качественную оценку влияния фактора оперативности выполнения задачи выведения на максимальное значение выводимой на заданную высоту массы, а также определить реализуемый диапазон времени выведения, ограниченный с одной стороны решением задачи быстродействия, а с другой – решением задачи минимизации массовых затрат. Предложенная в работе нормировка массы позволяет распространить полученные результаты на класс РН, благодаря оперированию в процессе решения относительными величинами.

Рассматриваемая задача является эквивалентной задаче быстродействия с ограничением на массу топлива, поэтому результаты её решения могут быть также использованы для оценки рабочих запасов топлива, необходимых для наискорейшего выведения с заданными граничными условиями.

Применение компромиссного функционала позволяет произвести регуляризацию решения оптимизационной задачи с ограничением на время полета и расширить область сходимости численного решения краевой задачи, к которой сводится задача оптимизации, тем самым снизив требования к близости начального приближения варьируемых параметров к своим искомым значениям.

Список литературы

1. Александров В.В., Бахвалов Н.С., Григорьев К.Г. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Издательство МГУ, 1988. 81 с.
2. Волков Е.А. Численные методы: учеб. пособие. 5-е изд. СПб.: Лань, 2008. 256 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. 6-е изд. М.: Бином, 2008. 629 с.
4. Григорьев К.Г., Федына А.В. Оптимальное пространственное выведение космического аппарата на геостационарную орбиту с орбиты искусственного спутника Земли // Техническая кибернетика. 1993. Вып. 3. С. 116-126.
5. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Вешняя баллистика. 4-е изд. М.: Машиностроение, 2005. 607 с.
6. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. 1957. Т. 63, Вып. 1а. С. 5-32.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 393 с.

8. Сердюк В.К. Проектирование средств выведения космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2009. 503 с.
9. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с.
10. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 407 с.