

Математическая модель сматывания нити с катушки

05, май 2014

DOI: 10.7463/0514.0704634

Тененбаум С. М.

УДК 531.3

Россия, МГТУ им. Баумана

ivankovo@list.ru

I. Введение

Задача математического моделирования сматывания нити с катушки актуальна для изучения процесса развёртывания лопастей роторных солнечных парусов, таких как «Гелиоротор» [1]. В космическом эксперименте «Парус-МГТУ» [2] применяется солнечный парус такого типа (см. рисунок I.1).

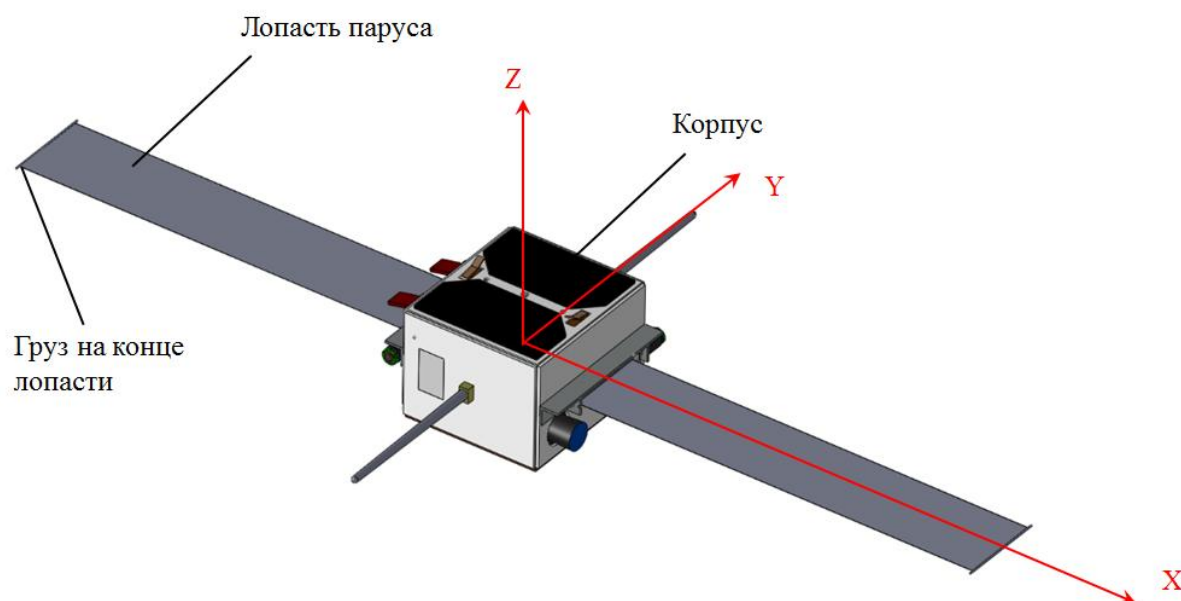


Рисунок I.1– Общий вид КА «Парус-МГТУ»

Светоотражающая поверхность такого паруса представляет собой длинную узкую лопасть, изготовленную из сверхтонкой плёнки (менее 20 мкм) со светоотражающим покрытием [3]. В исходном состоянии лопасти паруса свёрнуты на катушки. Развёртывание

и поддержание формы паруса обеспечивается центробежными силами, для этого обеспечивается вращение КА относительно одной из осей.

Поскольку в рассматриваемых системах отношение ширины лопасти к её толщине очень велико (например, более 1000 для «Парус-МГТУ» [2]), лопасть способна воспринимать очень ограниченную нагрузку в плоскости лопасти из-за потери устойчивости. Поэтому в случае действия сил в плоскости лопасти, для исследования наихудшего возможного сценария, лопасть может моделироваться гибкой нитью.

Поскольку КА вращается относительно одной из осей, при рассмотрении динамики развёртывания лопасти во вращающейся системе координат, на неё будут действовать распределённые силы инерции Кориолиса [4], направленные преимущественно в плоскости лопасти, что может приводить к потере их устойчивости. Поэтому модель сматывания нити с катушки может быть использована для моделирования развёртывания такого солнечного паруса в наихудшем случае.

Предлагаемая ниже математическая модель, построенная на базе пружинно-массовой модели, позволяет моделировать сматывание нити с катушки с учётом действия на сошедший участок нити произвольных внешних силовых факторов, при этом:

- участок нити, находящийся на катушке, считается жёстко связанным с катушкой, а участок нити, сошедший с катушки – движется свободно;

- разбиение длины нити на узлы не связано с необходимостью обеспечения достаточного количества узлов на одном витке катушки;

- поскольку не решается задача контакта между нитью и катушкой, обеспечивается устойчивое интегрирование уравнений движения явным методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом [5];

- число степеней свободы (количество дифференциальных уравнений) остаётся постоянным в процессе решения, что значительно упрощает вычислительный алгоритм.

Ближайшим аналогом к предлагаемой модели является модель развёртывания тросовой системы с учётом массы троса [6], в которой при выходе троса определённой длины в модель добавляется новый узел и при этом производится коррекция скоростей узлов.

Научная новизна предлагаемой модели состоит в подходе к решению задачи сматывания нити с катушки с постоянной размерностью системы с сохранением реальной кинематики процесса сматывания, который позволит точнее моделировать динамику развёртывания роторных солнечных парусов типа [1, 2].

Далее в работе представлена постановка задачи (раздел II), предлагаемая математическая модель (раздел III) и приведены результаты решения модельной задачи (раздел IV). Для интегрирования дифференциальных уравнений движения использовался явный метод Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования.

II. Постановка задачи

В исходном состоянии нить длиной L намотана на катушку радиуса r . Для упрощения реальная геометрия намотанной нити (по спирали Архимеда) не учитывается, т.е. счи-

тается, что все витки имеют одинаковый радиус (см. рис. II.1). При необходимости модель может быть доработана для учёта этого обстоятельства.

Катушка вращается по заданному (известному) закону $\varphi(t)$. При этом функция $\varphi(t)$ является непрерывной.

Задача решается в системе координат XYZ, связанной с катушкой (см. рисунок II.1): ось X проходит через ось катушки и направлена в направлении номинального схода нити, ось Y совпадает с осью катушки, ось Z – дополняет систему координат до правой.

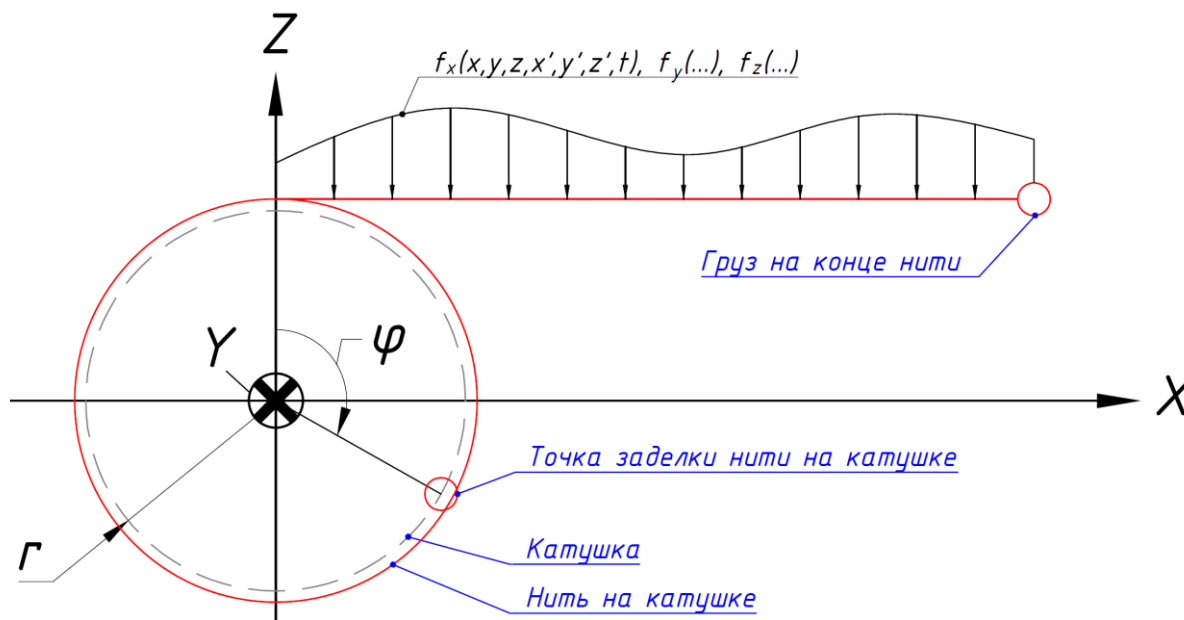


Рис. II.1– Схема сматывания нити с катушки

На сошедший участок нити действуют распределённые силы (например: центробежные, Кориолисовы, давление света и другие) проекции которых на оси расчётной системы координат: $f_x(x, y, z, x', y', z', t)$, $f_y(...)$, $f_z(...)$, Н/м.

III. Математическая модель

Расчётная схема для математической модели показана на рисунке III.1. Нить в начальный момент времени намотана на катушку в плоскости XZ.

Нить моделируется пружинно-массовой моделью. Форма нити представляется ломаной с изломами в узлах (сосредоточенных массах).

Узлы обладают тремя поступательными степенями свободы. Между собой узлы связаны линейными пружинами с демпфированием. Силы от пружин и демпферов действуют только вдоль прямой линии, соединяющей узлы.

Узлы в каждый момент времени делятся на три группы:

- узлы на катушке (связанные) – их движение полностью определяется движением катушки;
- свободные узлы – сошедшие с катушки и не граничащие с узлами на катушке;
- пограничные узлы – сошедшие с катушки, граничащие с узлами на катушке.

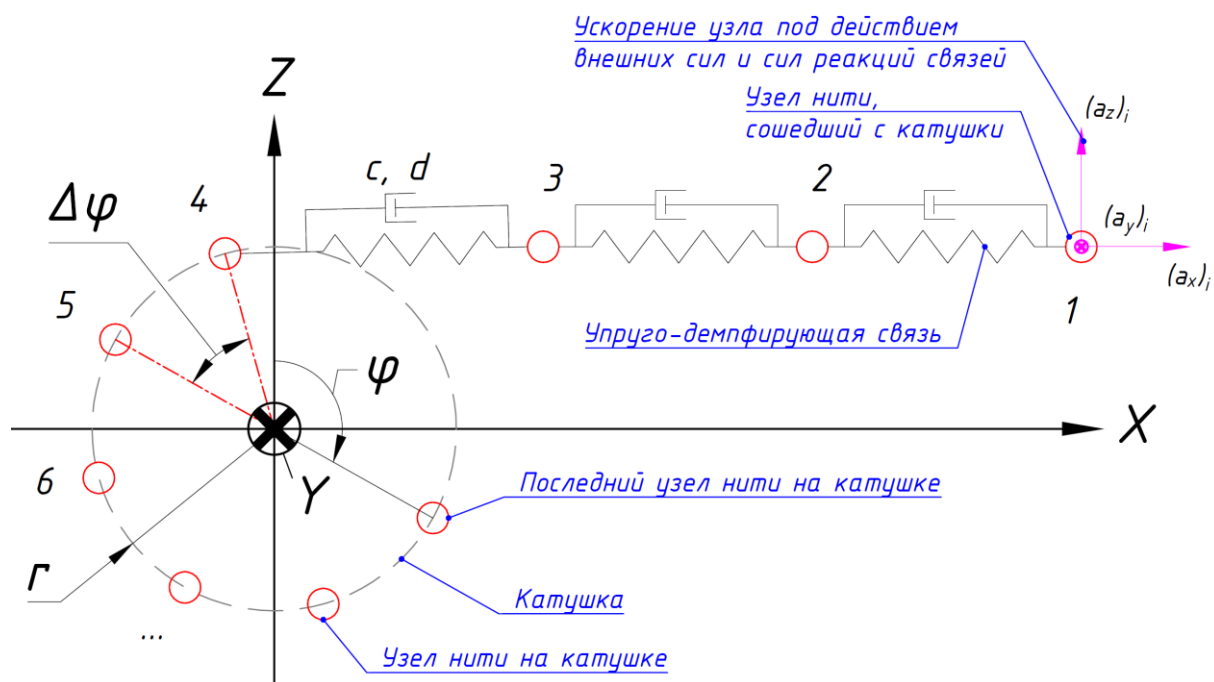


Рис. III.1 – Расчётная схема математической модели

Очевидно, что в каждый момент времени всегда существует только один пограничный узел.

Для каждой группы узлов правые части уравнений движения записываются по-разному.

Критерием схода узла с катушки является достижение углом поворота катушки $\varphi(t)$ значения равного:

$$(\varphi_i)_{\text{схода}} = \Delta\varphi \cdot (i - 1), \quad i = 1 \dots n \quad (1)$$

где: $(\varphi_i)_{\text{схода}}$ – угол поворота катушки, при котором узел i считается сошедшим; $\Delta\varphi$ – угловой шаг узлов на катушке (параметр математической модели, задаётся в качестве исходных данных – см. рис. III.1); n – общее число узлов.

На каждом шаге интегрирования проверяется «попадание» узла в одну из этих групп. В зависимости от того, в какую группу попал узел, правая часть уравнений движения рассчитывается по разным формулам.

Выражения для правых частей уравнений движения приведены в разделах III.1-III.3.

III.1. Уравнения движения узлов на катушке

Поскольку закон поворота катушки $\varphi(t)$ задан, а узлы на катушке считаются жёстко с ней связанными, то могут быть однозначно определены их ускорения, которые и являются искомыми правыми частями уравнений движения:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i(t) &= -r (\dot{\varphi}(t)^2 \cdot \sin \varphi_i(t) - \ddot{\varphi}(t) \cos \varphi_i(t)); \\
\ddot{y}_i(t) &= 0; \\
\ddot{z}_i(t) &= -r (\dot{\varphi}(t)^2 \cdot \cos \varphi_i(t) + \ddot{\varphi}(t) \cdot \sin \varphi_i(t)); \\
\varphi_i(t) &= \varphi(t) + \Delta\varphi \cdot (i - 1), \quad i = 1 \dots n;
\end{aligned} \tag{2}$$

где: $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ – координаты узла i в момент времени t ; $\ddot{x}_i(t)$, $\ddot{y}_i(t)$, $\ddot{z}_i(t)$ – ускорения узла i в момент времени t ; r – радиус катушки; $\varphi_i(t)$ – угловое положение узла i на катушке относительно оси Z (см. рис. III.1).

Возможной альтернативой для моделирования движения узлов на катушке является непосредственное задание их положения в соответствии с текущим углом поворота катушки $\varphi(t)$ в процессе интегрирования, т.е. без интегрирования уравнений (2) для этих узлов. Однако это значительно усложняет алгоритм программы, а также исключает возможность рассмотрения $\varphi(t)$ как неизвестной функции, получаемой в результате интегрирования уравнений движения, что сужает возможную область использования предлагаемой модели.

III.2. Уравнения движения свободных узлов

Уравнения движения свободных узлов являются обычными уравнениями движения узла в упруго-массовой модели в нелинейной постановке.

На каждый узел действуют силы реакций связей со стороны соседних узлов и внешние силы. Силы реакций связи складываются из реакций со стороны пружин и со стороны демпферов.

Сила от реакций пружинных связей с соседними узлами, действующая на узел i вычисляется по следующей формуле:

$$(\vec{R}_C)_i = c \cdot \frac{(\vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i|} \cdot (l_0 - |\vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i|) + c \cdot \frac{(\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|} \cdot (l_0 - |\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|), \tag{3}$$

где: $\vec{X}_i, \vec{X}_{i+1}, \vec{X}_{i-1}$ – вектора абсолютных координат узлов $i, i+1, i-1$; c – коэффициент жёсткости пружинной связи между узлами нити, Н/м; l_0 – номинальное расстояние между узлами (в равновесном состоянии без внешней нагрузки), м.

Номинальное расстояние между узлами l_0 вычисляется как длина дуги между двумя узлами на катушке ($l_0 = r \cdot \Delta\varphi$, с учётом допущения, что нить намотана на катушке по окружности).

Сила от реакций демпфирующих связей с соседними узлами, действующая на узел i вычисляется по следующей формуле:

$$(\overrightarrow{R_d})_i = d \frac{((\overrightarrow{X_{i+1}} - \overrightarrow{X_i}) \cdot (\overrightarrow{V_{i+1}} - \overrightarrow{V_i}))}{|\overrightarrow{X_{i+1}} - \overrightarrow{X_i}|} \cdot \frac{(\overrightarrow{X_{i+1}} - \overrightarrow{X_i})}{|\overrightarrow{X_{i+1}} - \overrightarrow{X_i}|} + d \frac{((\overrightarrow{X_{i-1}} - \overrightarrow{X_i}) \cdot (\overrightarrow{V_{i-1}} - \overrightarrow{V_i}))}{|\overrightarrow{X_{i-1}} - \overrightarrow{X_i}|} \times \frac{(\overrightarrow{X_{i-1}} - \overrightarrow{X_i})}{|\overrightarrow{X_{i-1}} - \overrightarrow{X_i}|}, \quad (4)$$

где: $\overrightarrow{V_i}, \overrightarrow{V_{i+1}}, \overrightarrow{V_{i-1}}$ – вектора скоростей узлов $i, i+1, i-1$; d – коэффициент демпфирования, Н·с/м.

Для узла $i=1$ в формулах (3, 4) слагаемые, обозначающие силы реакции со стороны узла $i=0$ обнуляются.

Следовательно, искомые уравнения движения свободных узлов:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i(t) &= [(\overrightarrow{R_c})_i]_x + [(\overrightarrow{R_d})_i]_x + [\overrightarrow{F_i}]_x; \\ m_i \ddot{y}_i(t) &= [(\overrightarrow{R_c})_i]_y + [(\overrightarrow{R_d})_i]_y + [\overrightarrow{F_i}]_y; \\ m_i \ddot{z}_i(t) &= [(\overrightarrow{R_c})_i]_z + [(\overrightarrow{R_d})_i]_z + [\overrightarrow{F_i}]_z, \end{aligned} \quad (5)$$

$$i = 1 \dots n$$

где: форма записи $[]_x, []_y, []_z$ означает x, y и z составляющую вектора в квадратных скобках; $\overrightarrow{F_i}$ – вектор внешних сил, действующих на узел i (т.е. это равнодействующая распределённых сил, действующих на нить на участке узла i , который определяется как участок вдоль нити длиной l_0 , симметричный относительно узла i), Н; m_i – масса узла i .

Масса узла i вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} m_i &= \rho_L l_0, \quad i = 2 \dots n, \\ m_1 &= \frac{\rho_L l_0}{2} + m_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где: ρ_L – линейная плотность нити кг/м, m_k – масса груза на конце нити.

III.3. Уравнения движения пограничных узлов

Расчётная схема для данного случая представлена на рис. III.2.

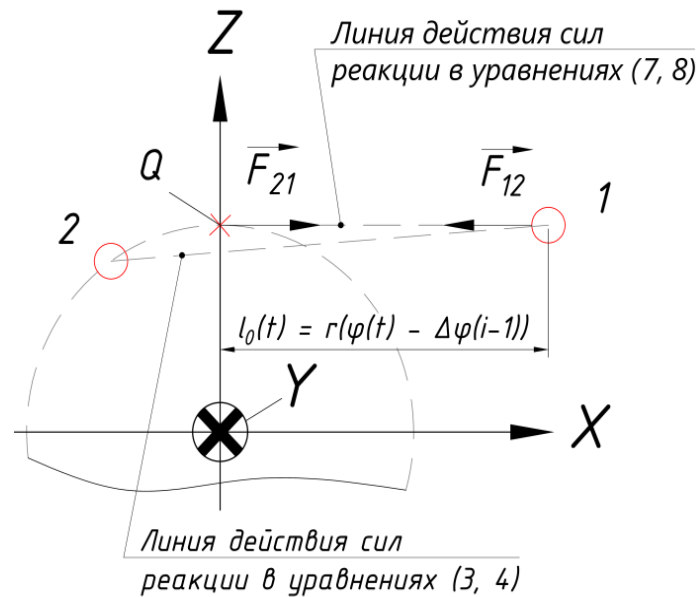


Рис. III.2 – Расчётная схема для вывода уравнений движения пограничных узлов.

Из рисунка III.2 видно, что в результате дискретизации линия между текущим пограничным узлом $i=1$ и следующим узлом нити $i=2$, находящемся на катушке, не совпадает с реальной формой нити в данной области. Однако именно вдоль этой линии действуют силы реакции связей в уравнениях (3, 4). Если силы реакции связей для пограничных узлов вычислять по уравнениям (3, 4), то результат будет соответствовать картине, представленной на рисунке III.3.

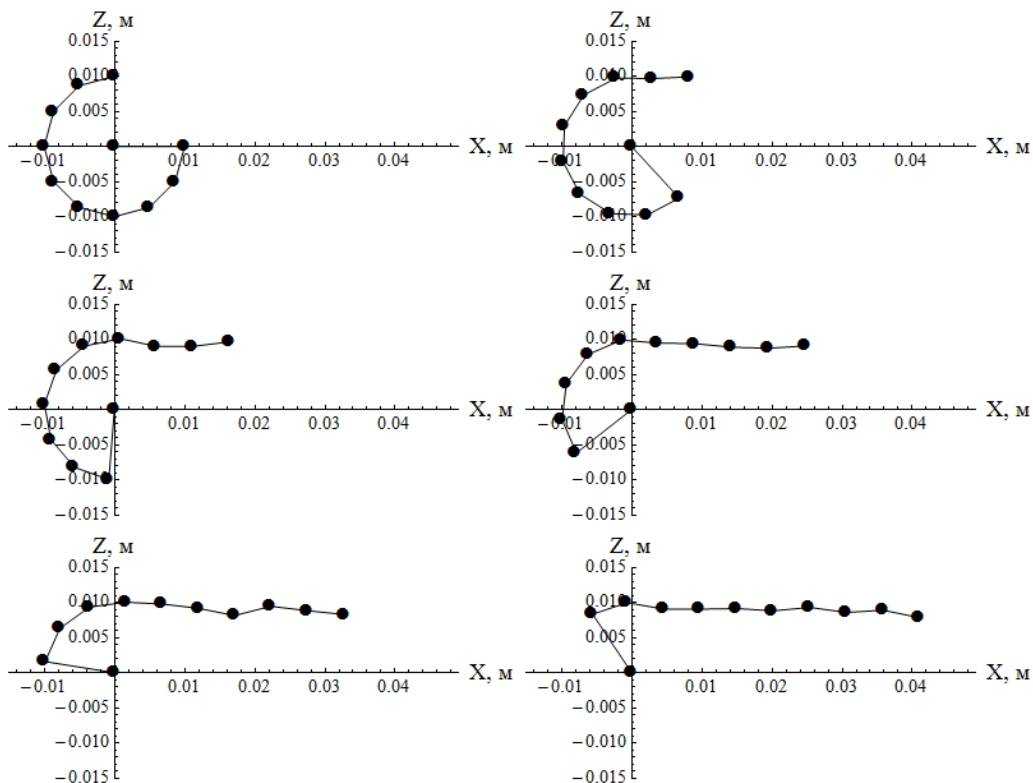


Рис. III.3 – Результаты численного интегрирования процесса сматывания нити при использовании уравнений (3, 4) для вычисления сил реакций связи для пограничных узлов (внешние силы отсутствуют)

Из рис. III.3 видно, что происходит возбуждение нефизичных колебаний узлов в направлении оси Z. При этом амплитуда колебаний определяется числом узлов на одном витке нити. Для достаточно длинной нити и катушки малого радиуса (что характерно для систем развёртывания солнечного паруса [1, 2]) это обстоятельство приводит к необходимости использования модели с большим числом степеней свободы. Например, для катушки радиусом 0.01 м и лопасти солнечного паруса длиной 5 м (характерные размеры для КА «Парус-МГТУ») суммарное число узлов составляет более 5000 (на одном витке нити 64 узла). Очевидно что для моделирования динамики нити длиной 5 м такое число узлов избыточно.

В целях исключения этого негативного эффекта уравнения (3, 4) для пограничных узлов заменяются на уравнения (7, 8):

$$(\vec{R}_c)_i = c \cdot \frac{(\vec{Q} - \vec{X}_i)}{|\vec{Q} - \vec{X}_i|} \cdot (l_0(t) - |\vec{Q} - \vec{X}_i|) + c \cdot \frac{(\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|} \cdot (l_0(t) - |\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|), \quad (7)$$

$$(\vec{R}_d)_i = d \left(\frac{(\vec{Q} - \vec{X}_i)}{|\vec{Q} - \vec{X}_i|} \cdot (\vec{V}_Q - \vec{V}_i) \right) \cdot \frac{(\vec{Q} - \vec{X}_i)}{|\vec{Q} - \vec{X}_i|} + d \left(\frac{(\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|} \cdot (\vec{V}_{i-1} - \vec{V}_i) \right) \times \\ \times \frac{(\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i)}{|\vec{X}_{i-1} - \vec{X}_i|}, \quad (8)$$

где:

$$\vec{Q} = \{0, 0, r\}^T, \quad (9) \\ \vec{V}_Q = \{\dot{\varphi}(t) \cdot r, 0, 0\}^T.$$

Т.е. фактически в качестве следующего узла для текущего пограничного используется точка схода нити с катушки $\mathbf{Q}$, имеющая координаты $(0, 0, r)$. При этом скорость этой точки принимается равной текущей скорости схода нити.

Такая формулировка выражения для реакции от пружины приводит к необходимости введения переменного номинального расстояния между узлами $l_0(t)$.

$$l_0(t) = r(\varphi(t) - \Delta\varphi(i - 1)). \quad (10)$$

Очевидно, что формулы (7, 8) сингулярны в случае, если пограничный узел в какой-то момент времени совпадает с точкой $\mathbf{Q}$. Это имеет место в начале движения, а также может создавать негативные эффекты в процессе интегрирования. Поэтому при модуле вектора $|\vec{Q} - \vec{X}_i|$ меньшем определённой заданной величины в формулах (7, 8) направляющий вектор линии между узлами $\frac{(\vec{Q} - \vec{X}_i)}{|\vec{Q} - \vec{X}_i|}$ принимается равным:

$$\frac{(\vec{Q} - \vec{X}_i)}{|\vec{Q} - \vec{X}_i|} = \{-1, 0, 0\}^T, \text{ если } |\vec{Q} - \vec{X}_i| < 10^{-10}. \quad (11)$$

Также формулы (7, 8) содержат допущение о независимости коэффициентов жёсткости и демпфирования c, d от $l_0(t)$. Это допущение справедливо, если исследуется движение

нити в поперечном направлении (поскольку силы реакций связей действуют только в направлении между узлами, то жёсткость этих связей не влияет на вращение одного узла относительно другого, т.е. в этом случае жёсткость c должна быть достаточной для обеспечения малых относительных осевых движений узлов), что характерно для задачи развёртывания солнечного паруса. Вопрос справедливости этого допущения при исследовании продольных колебаний нити требует дополнительного изучения, однако априори можно утверждать, что т.к. каждый узел является пограничным только малую часть времени развёртывания, влияние этого допущения на результаты будет ограниченным и может быть снижено путём увеличения числа узлов.

Необходимо отметить, что использование уравнений (7, 8) для расчёт сил реакций связей с соседними узлами, действующих на пограничные узлы, позволяет использовать произвольный угловой шаг узлов на катушке $\Delta\varphi$, в т.ч. $\Delta\varphi$ может быть много больше 2π . Это обстоятельство позволяет выбирать количество узлов только исходя из сходимости решения по динамике свободного участка нити.

III.4. Коррекция вектора скорости сошедшего узла

Поскольку на катушке узлы движутся в плоскости XZ (см. уравнения (2)), то в момент схода с катушки скорость узла направлена по оси X. Однако под действием внешних силовых факторов сошедший участок нити может двигаться в другом направлении (см. рис. IV.1). Физически в этом случае в точке схода нити с катушки происходит изгиб нити в поперечном направлении с очень большой кривизной (практически наблюдается излом нити). В этой области происходит разворот скоростей точек нити. Приведённые ранее уравнения никак не учитывают этого факта.

Поэтому в процессе интегрирования, если обнаруживается, что в конце текущего шага интегрирования узел i – сошёл, то вектор его скорости разворачивается по следующей формуле:

$$\vec{V}_i = |\vec{V}_i| \frac{(\overrightarrow{X_{i-1}} - \vec{Q})}{|\overrightarrow{X_{i-1}} - \vec{Q}|}. \quad (12)$$

III.5. Окончательный вид уравнений движения

Окончательно уравнения движения нити, сматывающейся с катушки, имеют вид:

$$\ddot{x}_i(t) = \frac{1}{m_i} \begin{cases} \langle \ddot{x}_i(t) \rangle_2, & \text{если узел } i \text{ — на катушке} \\ \langle [(\vec{R}_C)_i]_x \rangle_3 + \langle [(\vec{R}_d)_i]_x \rangle_4 + [\vec{F}_i]_x, & \text{если узел } i \text{ — свободный;} \\ \langle [(\vec{R}_C)_i]_x \rangle_7 + \langle [(\vec{R}_d)_i]_x \rangle_8 + [\vec{F}_i]_x, & \text{если узел } i \text{ — пограничный} \end{cases} \quad (13)$$

$$i = 1 \dots n$$

где обозначение $\langle \rangle_k$ означает вычисление выражения внутри угловых скобок в соответствии с формулой k , где k – номер формулы в данной работе.

Уравнения для фазовых координат y и z записываются аналогично.

Все узлы, кроме $i=1$, в начальный момент времени считаются находящимися на катушке. Узел $i=1$ считается пограничным.

Узел $i=n$ всегда находится на катушке. Для моделирования отделяющейся от катушки нити это условие может быть исключено.

Результаты расчётов (см. раздел IV) показывают, что нефизичных колебаний не возникает.

IV. Численный эксперимент

Для проверки возможностей предложенной модели проводится численный эксперимент по моделированию развёртывания двухлопастного роторного солнечного паруса для проекта «Парус-МГТУ» [2]. Расчётная схема показана на рисунке IV.1.

Для простоты принимаются следующие допущения:

- угловая скорость катушек с лопастями паруса при развёртывании постоянна, т.е. $\varphi(t)=\omega \cdot t$, где ω – угловая скорость вращения катушки с лопастью паруса;
- КА, с которого происходит развёртывание, имеет только одну вращательную степень свободы (см. рис. IV.1) – это допущение верно, если КА хорошо сбалансирован и обе лопасти развёртываются равномерно, т.е. прецессия КА мала или отсутствует, что является требованием к КА с роторным солнечным парусом;
- обе лопасти развёртываются симметрично – это допущение позволяет рассчитывать движение только одной лопасти, что вдвое уменьшает число степеней свободы в системе – это допущение адекватно, поскольку равномерность развёртывания лопастей может быть обеспечена наземной подготовкой и отработкой;
- момент инерции корпуса КА не меняется при развёртывании (справедливо при массе лопастей значительно меньшей массы КА).

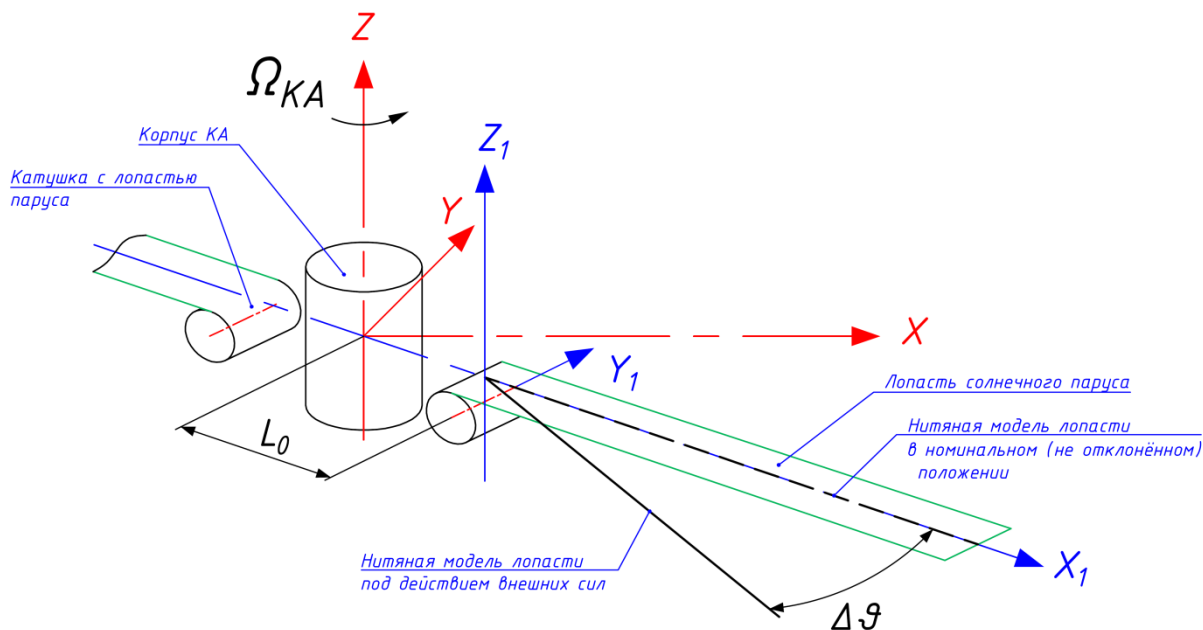


Рис. IV.1 – Расчётная схема модели развёртывания двухлопастного роторного солнечного паруса

Задача развёртывания лопастей решается в трёхмерной постановке в подвижной системе координат $X_1Y_1Z_1$, связанной с корпусом КА (см. рис. IV.1). Вращение корпуса КА описывается в одномерной постановке в неподвижной инерциальной системе координат XYZ . Т.е. система координат $X_1Y_1Z_1$ вращается относительно оси Z системы координат XYZ с угловой скоростью $\Omega_{KA}(t)$. Направление осей системы координат $X_1Y_1Z_1$ совпадает с направлением осей системы координат XYZ , использовавшейся в разделе III для вывода уравнений (см. рис. III.1).

Из-за того что система координат $X_1Y_1Z_1$, в которой описывается развёртывание лопасти, вращается относительно инерциальной системы координат XYZ , в соответствии с теоремой Кориолиса [4], помимо внешних сил, на лопасть действуют распределённые силы инерции: переносная, центробежная и Кориолиса. Для узлов, находящихся на катушках, действие этих сил компенсируется реакцией со стороны катушек. На остальные узлы в системе координат $X_1Y_1Z_1$ действует равнодействующая инерционных сил, проекции которой рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} [F_i]_x &= m_i (\dot{\Omega}_{KA} y_i + \Omega_{KA}^2 (x_i + L_0) + 2 \Omega_{KA} \dot{y}_i), \\ [F_i]_y &= m_i (-\dot{\Omega}_{KA} (x_i + L_0) + \Omega_{KA}^2 y_i - 2 \Omega_{KA} \dot{x}_i), \\ [F_i]_z &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где: $[F_i]_x$, $[F_i]_y$, $[F_i]_z$ – проекции равнодействующей сил инерции на оси системы координат $X_1Y_1Z_1$, действующей на узел i .

Со стороны пограничных узлов двух лопастей на КА в общем случае действует момент сил:

$$M_z(t) = -2 \cdot L_0 \cdot \left(\langle [\vec{R}_c]_i \rangle_y + \langle [\vec{R}_d]_i \rangle_y \right) \quad (15)$$

где: узел i – номер текущего пограничного узла; коэффициент 2 учитывает то, что лопастей две.

Следовательно, к уравнениям развёртывания нити (12) добавляется уравнение вращения КА:

$$\dot{\Omega}_{KA}(t) = \frac{M_z(t)}{J_{KA}}; \quad (16)$$

где J_{KA} – момент инерции корпуса КА относительно оси вращения, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Начальные условия для уравнений (12, 16):

$$\begin{aligned}
\Omega_{KA}(0) &= \Omega_0; \\
x_i(0) &= r \sin(-\Delta\varphi \cdot (i - 1)); \\
y_i(0) &= 0; \\
z_i(0) &= r \cos(-\Delta\varphi \cdot (i - 1)); \\
\dot{x}_i(0) &= r \omega \cos(-\Delta\varphi \cdot (i - 1)); \\
\dot{y}_i(0) &= 0; \\
\dot{z}_i(0) &= -r \omega \sin(-\Delta\varphi \cdot (i - 1)),
\end{aligned} \tag{17}$$

где Ω_0 – начальная угловая скорость вращения КА.

Интегрирование закачивается по критерию развёртывания лопасти на заданную длину L .

В качестве основного средства верификации модели развёртывания используется закон сохранения кинетического момента, с помощью которого может быть выражена угловая скорость вращения корпуса КА при лопастях, раскрытых на длину L :

$$\Omega_{KA}(L) = \frac{J_{KA}\Omega_0}{J_{KA} + \frac{2}{3}\rho_L L^3 + 2m_K L^2}. \tag{18}$$

Числитель формулы (18) есть начальный кинетический момент системы, знаменатель – момент инерции системы после развёртывания лопастей на длину L . При этом принимается, что лопасти вращаются с той же угловой скоростью относительно оси Z , что и корпус КА.

В качестве результатов моделирования принимается угол между выбранным узлом, точкой схода узлов на катушке (точка с координатами $(0, 0, r)$ в системе координат $X_1Y_1Z_1$) и осью X_1 связанной системы координат (см. рис. IV.1), который вычисляется по формуле:

$$\Delta\vartheta = \arccos\left(\frac{(\{1 \ 0 \ 0\} \cdot \{x_i \ y_i \ z_i - r\})}{|\{x_i \ y_i \ z_i - r\}|}\right), \tag{19}$$

где в фигурных скобках представлены координаты векторов в системе координат $X_1Y_1Z_1$.

Перечень исходных данных для моделирования приведён в таблице IV.1.

Таблица IV.1 Исходные данные для моделирования

Параметр	Описание	Размерность	Значение
J_{KA}	Момент инерции КА относительно оси вращения	кг·м ²	0.004
ρ_L	Погонная плотность лопастей	кг/м	0.000735
L	Длина лопастей	м	5.0
L_0	Расстояние от оси вращения КА до оси катушки с лопастью	м	0.05
r	Радиус намотки лопастей на катушках	м	0.01
Ω_0	Начальная угловая скорость вращения КА	рад/с	6.0

Таблица IV.1 Исходные данные для моделирования

Параметр	Описание	Размерность	Значение
ω	Угловая скорость развёртывания катушек с лопастями	рад/с	3.5
m_k	Масса грузов на концах лопастей	кг	0.0005
n	Число узлов на длине лопасти	-	20, 40
$\Delta\varphi$	Угловой шаг узлов на катушке	рад	$\Delta\varphi = \frac{1}{n} \frac{L}{r}$
c	Жёсткость упругой связи между узлами	Н/м	$c = \frac{E \cdot bh}{\Delta\varphi \cdot r}$
d	Коэффициент демпфирования связи между узлами	Н·с/м	$10^{-6} \dots 1.0$
E	Модуль упругости материала лопасти	Н/м ²	$1.0 \cdot 10^9$

На рисунке IV.2 представлена зависимость угловой скорости корпуса КА от времени в процессе развёртывания, при этом чёрной сплошной линией показан результат интегрирования системы уравнений (12, 16), а **красной** штриховой – рассчитанная по формуле (18), для чего в формулу 18 подставлялась зависимость $L(t)$, полученная в результате интегрирования уравнений (12, 16).

На рисунке IV.2 читаются только две зависимости, однако на нём представлены результаты расчётов для семи значений коэффициента демпфирования (от $1.0 \cdot 10^{-6}$ до 1.0 Н·с/м) и для двух значений числа узлов (20 и 40), т.е. всего 28 кривых (14 – по результатам интегрирования и 14 – по формуле (18)), но все зависимости сливаются. Это говорит о том, что модель сходится по данному параметру для широкого спектра исходных данных.

Из рисунка IV.2 следует, что модель развёртывания обеспечивает выполнение закона сохранения количества движения.

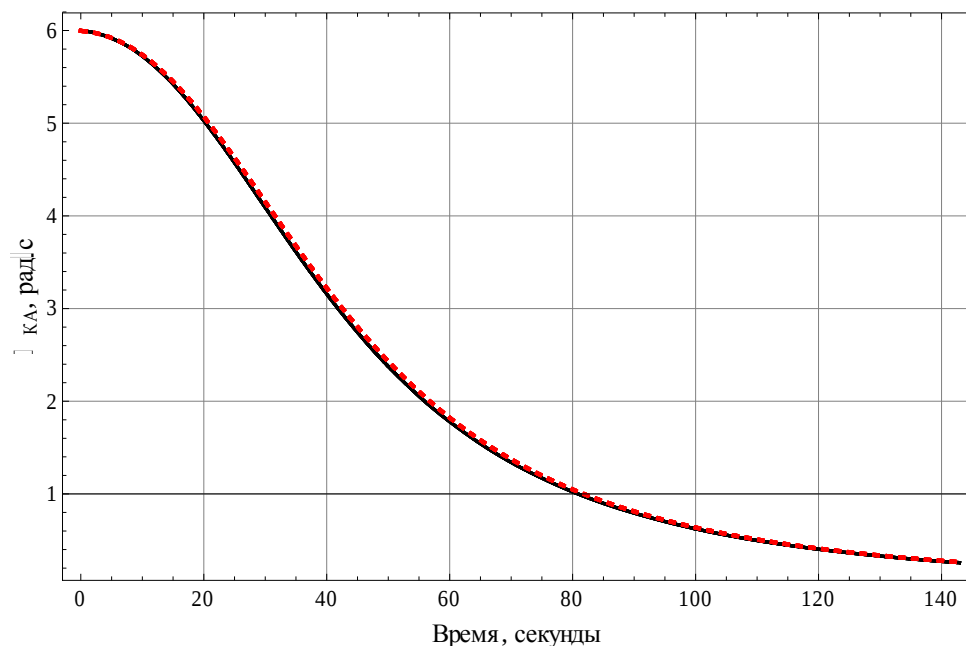


Рис. IV.2 – Результаты проверки выполнения закона сохранения количества движения по угловой скорости вращения корпуса КА (чёрная сплошная линия – результаты интегрирования, красная штриховая – расчёты по формуле (18))

На рисунке IV.3 представлена зависимость угла Δv концевой узла нити ($i=1$) от времени развёртывания для $n=20$ (чёрная сплошная линия) и $n=40$ (красная штриховая линия). Для каждого n представлены зависимости для семи значений коэффициента демпфирования d (от $1.0 \cdot 10^{-6}$ до 1.0 Н·с/м).

Из рисунка IV.3 следует:

- коэффициент демпфирования продольных колебаний нити в широком диапазоне не влияет на поперечное движение нити, поэтому он может приниматься значительно завышенным в целях обеспечения устойчивости счёта метода интегрирования без потери точности результатов (для поперечного движения);
- зависимости $\Delta v(t)$ для $n = 20$ и $n = 40$ в среднем совпадают, однако имеют место быть различия в амплитуде и частоте поперечных колебаний: с увеличением числа узлов зависимость приближается к среднему значению; при этом амплитуда колебаний мала по сравнению со средним значением угла Δv (не более 5 %), следовательно, для проектных расчётов (например при оптимизации) можно ограничиваться малым числом узлов без существенной погрешности результатов;
- в начале движения имеет место переходной колебательный процесс, затухание которого определяется динамическими свойствами системы, а не демпфированием продольных колебаний; однако для реальной системы появление этого колебательного процесса нежелательно, поэтому в последующих работах необходимо оптимизировать закон развёртывания с целью избежать появления поперечных колебаний (или минимизировать их амплитуду).

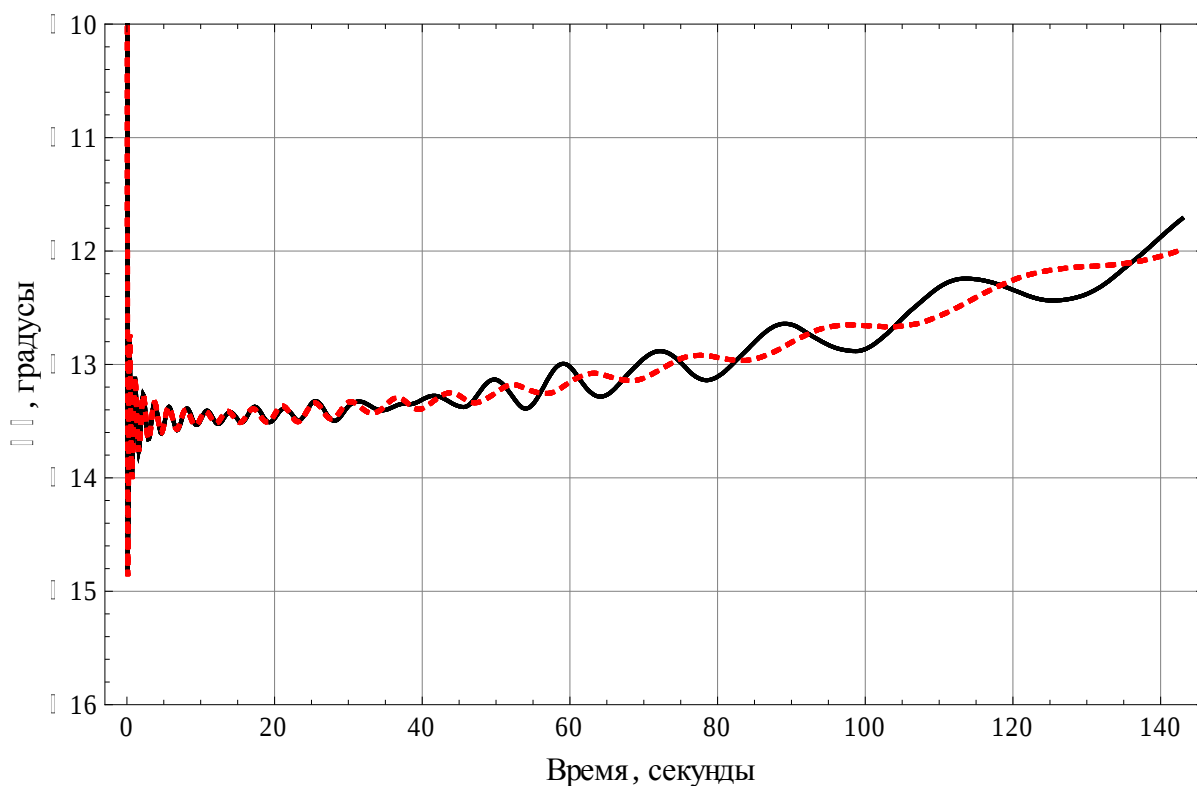


Рис. IV.3 – Зависимость угла Δv от времени развёртывания (чёрная сплошная линия – для $n=20$, красная штриховая – для $n=40$)

На рисунке IV.4 представлена зависимость угла Δu концевой узла нити ($i=1$) от времени развёртывания для разных значений коэффициента жёсткости c : 10^7 Н/м (чёрная сплошная линия), 10^8 Н/м (зелёная штриховая линия) и 10^9 Н/м (красная пунктирная линия). Коэффициент демпфирования $d=0.001$ Н·с/м, число узлов $n=20$.

Из рисунка IV.4 следует, что коэффициент жёсткости c слабо влияет на поперечное движение нити в широких диапазонах (разница в результатах составляет проценты для вариации коэффициента жёсткости на 2 порядка). При этом кривые для $c=10^8$ и 10^9 Н/м совпадают, в то время как величина шага интегрирования должна быть уменьшена как минимум вдвое для обеспечения устойчивости счёта. Следовательно, для проектных расчётов жёсткость лопасти на растяжение может быть значительно занижена в целях ускорения счёта (с последующей верификацией конечного результата с реальным значением жёсткости).

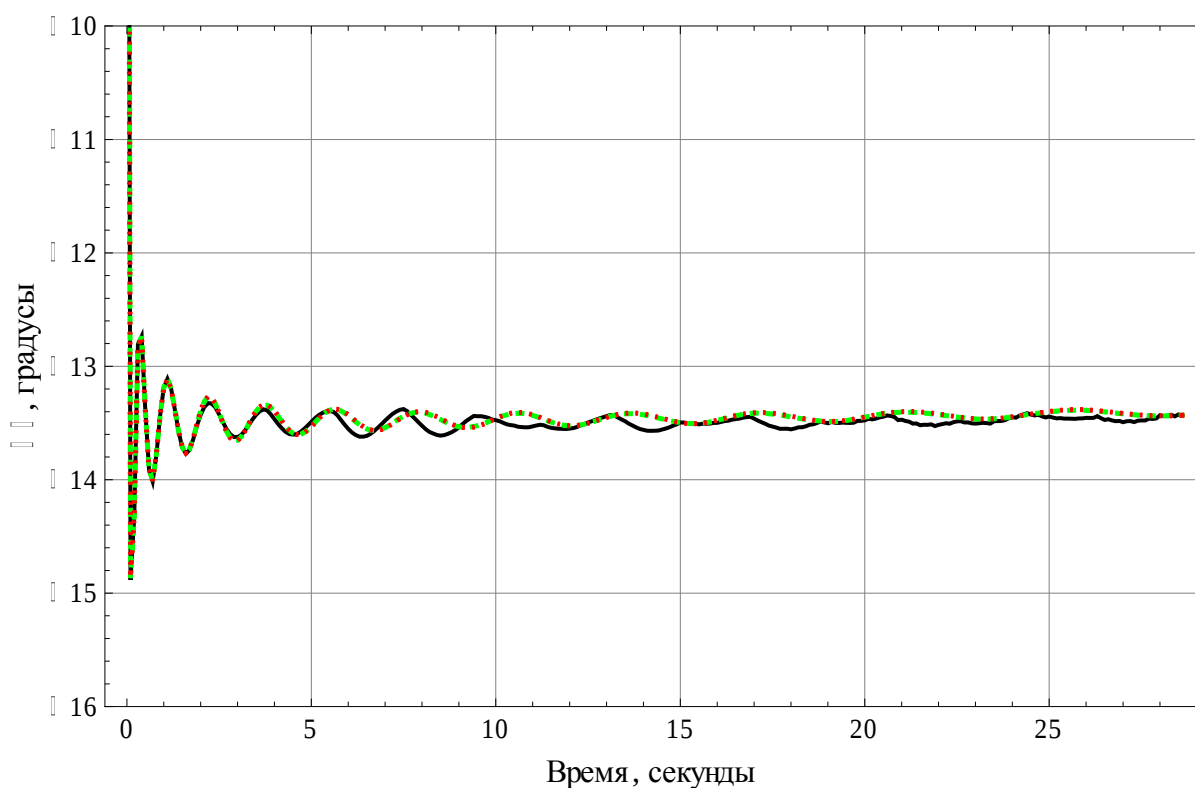


Рис. IV.4 – Зависимость угла Δu от времени развёртывания (чёрная сплошная линия – для $c=10^7$ Н/м , зелёная штриховая – для $c=10^8$ Н/м красная пунктирная – для $c=10^9$ Н/м)

Выводы

1. В работе предложена математическая модель сматывания весомой растяжимой нити с катушки, имеющая следующие особенности:

- размерность (количество степеней свободы и уравнений) модели постоянна в процессе решения, что упрощает алгоритмическую реализацию;
- рассчитывается движение узлов, находящихся на катушке, при этом не решается задача контакта между узлами и катушкой;

- в момент схода узла с катушки производится разворот скорости сошедшего узла, тем самым моделируются реальные условия сматывания нити;
- разбиение длины нити на узлы определяется только условиями сходимости решения по участку нити, сошедшему с катушки, т.е. нет необходимости обеспечения большого числа узлов на одном витке нити на катушке;
- дискретное расположение узлов на катушке не приводит к возмущению сошедшего участка нити в направлении оси Z (см. рис. III.4).

2. Предложенная модель протестирована на упрощённой модели развёртывания двухлопастного солнечного паруса из проекта «Парус-МГТУ», при этом были сделаны следующие выводы:

- предложенная модель обеспечивает выполнение закона сохранения кинетического момента, что косвенно подтверждает её правильность;
- поперечное движение нити в процессе развёртывания практически не зависит от коэффициентов демпфирования и жёсткости, следовательно, их значения можно варьировать для обеспечения устойчивости счёта без потери точности результатов.

3. На базе предложенной математической модели сматывания нити с катушки в дальнейшем следует разработать модель сматывания ленты с катушки для проведения более точных расчётов развёртывания лопастей солнечного паруса.

Список литературы

1. MacNeal R. The Heliogyro, an Interplanetary Flying Machine. NASA Contractor's Report CR 84460, June 1967.
2. Rachkin D., Tenenbaum S., Dmitriev A., Nerovnyy N. 2-blades deploying by centrifugal force solar sail experiment // Proceedings of 62nd International Astronautical Congress. Cape Town, SA, 2011. P. 9128-9142.
3. Edwards D., Hovater M., Hubbs W., Wertz G., Hollerman W., Gray P. Characterization of Candidate Solar Sail Material Exposed to Space Environmental Effects // 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 5-8 January 2004, Reno, Nevada. 2004. Paper AIAA-2004-1085. DOI: [10.2514/6.2004-1085](https://doi.org/10.2514/6.2004-1085)
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1995. С. 156.
5. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. 2nd rev. ed. Springer Berlin Heidelberg, 1993. 528 p. DOI: [10.1007/978-3-540-78862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1)
6. Сазонов В.В. Математическое моделирование развёртывания тросовой системы с учётом массы троса. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006. 36 с. (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша; № 58). Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-58> (дата обращения 01.04.2014).

The mathematical model of thread unrolling from a bobbin

05, May 2014

DOI: 10.7463/0514.0704634**S.M. Tenenbaum**

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

ivankovo@list.ru**I. Introduction**

The subject of research in this work is a process of thread unrolling from a bobbin. The mathematical model of this process considering motion of thread peace on a bobbin and unrolled peace is proposed. The dimension of system of differential equations for this model is constant during deploying.

The relevance to simulate this process for design of Heliogyro-like solar sails (Heliogyro [1], BMSTU-Sail [2]) is proved. The paper briefly characterizes a blade for such solar sail as a simulation object. It proves the possibility for using a flexible thread model for a long blade because of very small blade thickness (less than 10 μm [3]) relative to blade width and the phenomena of Koriolis forces [4] that lead to buckling failure of blade flatness.

The major features of the proposed model are:

- simulated as a motion of the thread piece both being on a bobbin and its unrolled peace;
- splitting a thread length into nodes does not depend on the demand to ensure a sufficient number of nodes on a single thread turn on the coil;
- because of avoiding a problem of contact between the thread and bobbin a stable integration of motion equations is provided by the conventional Runge-Kutta method of fourth order with a constant step [5];
- in the course of solution the number of freedom degrees (number of motion equation) is constant, thereby simplifying a calculation algorithm.

The closest mathematical model is proposed in [6].

The scientific novelty of this research is the approach to solving the problem of unrolling thread from a bobbin using a constant number of motion equations while preserving real kinematics coiling process.

II. Problem formulation

In this section the problem of unrolling thread with length L from a bobbin of radius r is posed while any kind of forces are acting on the unrolled piece of thread. Moreover, the law of bobbin rotation $\varphi(t)$ assumed to be known with the proviso that the model can be modified if $\varphi(t)$ is the result of solving of ordinary differential equation.

III. Mathematical model

In this section the detailed description of proposed mathematical model based on conventional spring-mass model is given.

The major feature of this model is that on the every integration step all nodes divided into three groups:

- nodes on the bobbin (linked) – their motion is completely determined by the bobbin rotation;
- free nodes – descended from the bobbin and not neighboring nodes on the bobbin;
- boundary nodes - descended from the bobbin neighboring nodes on the bobbin.

For each nodes group the right parts of equations of motions are different. In these equations the additional corrections are included that result in reducing the impact of discretization on simulation results. These corrections are:

- equations of motion for boundary nodes eliminate unphysical reaction components, resulting from discretization;
- when a node descends from the bobbin its velocity vector turns following motion of already descended nodes, thus simulating the thread bending of very small radius at the point of thread descending.

IV. Numerical experiment

The developed mathematical model is tested using the simplified problem of two-blades rotary solar sail deploying from the «BMSTU-Sail» project [2].

The calculations demonstrated that the proposed mathematical model satisfies the law of conservation of angular momentum. It is also shown that calculation results are almost independent on the utility parameters of mathematical model (e.g. damping coefficient of nodes relative oscillations).

V. Conclusion

Major conclusions in this paper are:

- proposed mathematical model satisfies the law of conservation of angular momentum that indirectly confirms its correctness;
- the transverse thread motion is almost independent on the damping and stiffness coefficients, therefore they can be adjusted for calculation stability without accuracy loss;

- based on proposed mathematical model of unrolling a thread from a bobbin the improved model of unrolling from a bobbin ought to be developed for more accurate calculations of solar sail deploying.

Publications with keywords: [mathematical model](#), [rotor solar sail](#), [deployment](#)

Publications with words: [mathematical model](#), [rotor solar sail](#), [deployment](#)

References

1. MacNeal R. *The Heliogyro, an Interplanetary Flying Machine*. NASA Contractor's Report CR 84460, June 1967.
2. Rachkin D., Tenenbaum S., Dmitriev A., and Nerovnyy. 2-blades deploying by centrifugal force solar sail experiment. *Proceedings of 62nd International Astronautical Congress*, Cape Town, 2011, pp. 9128-9142.
3. Edwards, et al. Characterization of Candidate Solar Sail Material Exposed to Space Environmental Effects. *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2004, paper AIAA-2004-1085. DOI: [10.2514/6.2004-1085](https://doi.org/10.2514/6.2004-1085)
4. Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Short course of theoretical mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1995, p. 156. (in Russian).
5. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. 2nd rev. ed. Springer Berlin Heidelberg, 1993. 528 p. DOI: [10.1007/978-3-540-78862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1)
6. Sazonov V.V. *Matematicheskoe modelirovanie razvertyvaniya trosovoy sistemy s uchetom massy trosoy*. Preprint no. 58 [Mathematical modeling of the deployment of the orbital tether system. Preprint no. 58]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), 2006. 36 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?lg=e&id=2006-58> , accessed 01.04.2014. (in Russian).