электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 534.1

Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы и сухим трением

Дубовская Д.А., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Ракетные двигатели»

Гончаров Д.А., *аспирант*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Теоретическая механика»

Научный руководитель: Пожалостин А.А., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедры «Теоретическая механика»
goncharov@bmstu.ru

Целью работы является получение приближенного аналитического выражения для амплитудно-частотной характеристики двух-массовой системы (цепочки упруго-массовых элементов) с сухим трением. Колебания при этом полагаются малыми, сухое трение - небольшим. Впервые разработано приближенное аналитическое решение поставленной задачи о вынужденных колебаниях системы. Действие сил сухого трения заменяется эквивалентным (по энергии) вязким сопротивлением. Идея замены сухого трения эквивалентным вязким сопротивлением используется в полной мере после приведения исходной колебательной системы к нормальным координатам. После этого, получаем два дифференциальных уравнения, каждое из которых аналогично уравнению вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, но для нормальной координаты.

Далее, для каждого уравнения в отдельности применяется подход, изложенный в [2].

Колебательная система с двумя степенями свободы изображена на рис. 1, 2.

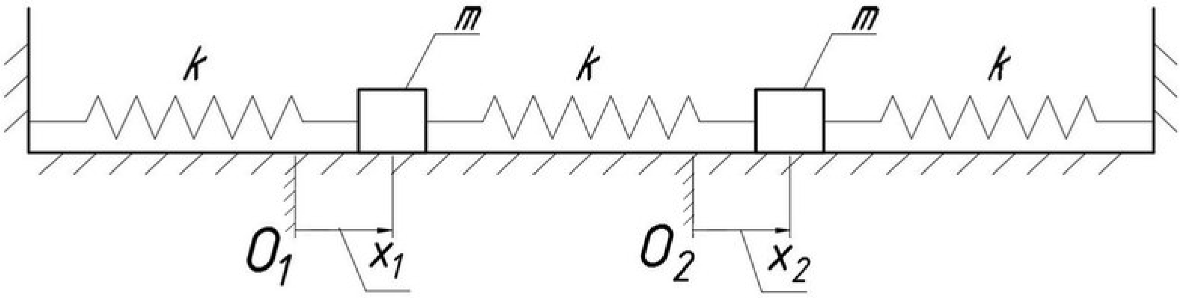

Рис. 1. Исследуемая колебательная система

Она представляет собой цепочку упруго-массовых элементов. На рис. 1 m – означает массу груза, k – коэффициент линейной жесткости невесомой пружины. На левую массу m действует силы сухого трения $F_{\text{тр}}$ и вынуждающая сила $F(t)$, изменяющаяся по гармоническому закону по времени $F(t) = F_0 cospt.$ Здесь F_0 – амплитуда возмущающего воздействия, p – частота, t – время. На правую массу сила сухого трения не действует. Примем обобщенные координаты. x_1 и x_2 (рис.1). Для составления дифференциальных уравнений движения системы используем уравнение [6]:

$$\mathrm{m}_i a_{i\,\mathrm{x}_i} = \sum_{n=1}^{N} F_{kx\ i},\ \text{где } i=1,2\ldots;\ \mathrm{N} - \text{количество сил.}$$

Силы, действующие на массы m, изображены на рис. 2.

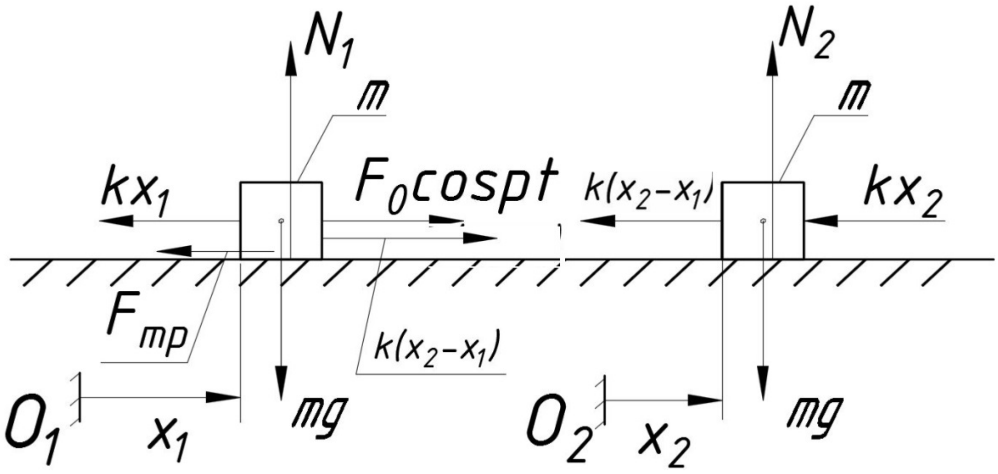

Рис. 2. Силы, действующие на рассматриваемую колебательную систему

С учетом рис .2 уравнения движения системы имеют вид:

$$m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = -F_{\text{тр}} + F_0 cospt \tag{1}$$

$$-kx_1 + m_2\ddot{x}_2 + 2kx_2 = 0. \tag{2}$$

Частные решения уравнений (1), (2) ищем в виде [2]; при этом $F_{mp} = 0,\ F_0 = 0.$

$$x_1 = Acos(\omega t + \alpha),\ x_2 = Bcos(\omega t + \alpha),$$

Обозначим безразмерную частоту колебаний:

$$\overline{\omega}^{\,2} = \omega^{\,2}\frac{m}{k}.$$

Частотное уравнение системы имеет вид [3]:

$$\overline{\omega}^{\,4} - 4\overline{\omega}^{\,2} + 3 = 0$$

Отсюда собственные частоты колебаний равны [2]:

$$\overline{\omega}_{1,2}^2 = 2 \pm 1,\ \ \overline{\omega}_1^2 = 1;\ \overline{\omega}_2^2 = 3.$$

Коэффициенты формы колебаний

$$\left(\frac{B}{A}\right)_i = \lambda_i, \text{ где } \ i = 1,2$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1.$$

Формула колебаний дискретных систем f_1, f_2 имеют вид [2] (рис. 3, рис. 4):

$$f_1 \ - \ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad f_2 \ - \ \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

f_1

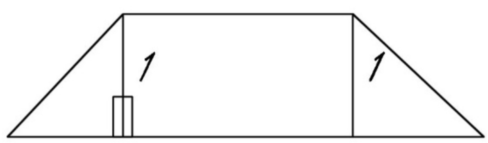

Рис. 3. Формы колебаний дискретной системы f_1

f_2

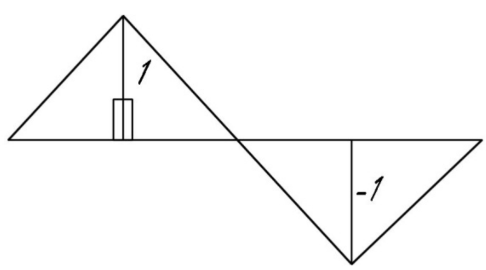

Рис. 4. Формы колебаний дискретной системы f_2

Введем нормальные координаты ζ и η по уравнениям с учетом форм колебаний f_1 и f_2:

$$x_1 = \zeta + \eta, x_2 = \zeta - \eta. \tag{4}$$

Подставим x_1, x_2 - (4) в уравнения движения системы осцилляторов (1) и (2):

$$m\ddot{\eta} + m\ddot{\zeta} + k\eta + 3k\zeta = -F_{\text{тр}} + F_0 cospt \tag{5}$$

$$m\ddot{\eta} - m\ddot{\zeta} + k\eta - 3k\zeta = 0\ . \tag{6}$$

Суммируя уравнения (5) и (6) и вычитая из (5) уравнения (6) получим уравнения для колебаний координат ζ и η

$$2m\ddot{\eta} + 2k\eta = -F_{\text{тр}} + F_0 cospt. \tag{7}$$

Ограничимся рассмотренем только колебаний системы по первому тождеству с частотой

$$\bar{\omega}_1^2 = 1.$$

Полагая вынужденные колебания η^* равными:

$$\eta^* = Dcos(pt - \propto)\ . \tag{8}$$

Вычислим коэффициент вязкого сопротивления аналогично [1], [7]:

Пусть $T_b = \frac{2\pi}{p}$, тогда работа сил трения за T_b, будет:

$$A_{F_{\text{тр}}}(Tb) = +4DF_{\text{тр}}\ . \tag{9}$$

Работа сил вязкого сопротивления A_μ с коэффициентом μ_1 равна:

$$A_\mu = \int_0^{Tb} \mu_1 \dot{\eta}^{*2} dt = \mu_L \int_0^{Tb} D^2 p^2 sin^2(pt - \propto) dt\ , \qquad \text{или}$$

$$A_\mu = \mu_1 D^2 p^2 \frac{T_b}{2} = \mu_1 D^2 p^2 \frac{2\pi}{2p} = \mu_1 \pi D^2 p. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), получим μ_1:

$$\mu_1 = \frac{4DF_{\text{тр}}}{\pi D^2 p} = \frac{4F_{\text{тр}}}{\pi D p} \tag{11}$$

$$\Phi = \mu_2 \frac{\dot{\eta}^2}{2}\ . \tag{12}$$

С учетом (12) – Φ – функция Рэлея уравнения вынужденных колебаний принимает вид:

$$2m\ddot{\eta} + \mu_1\dot{\eta} + 2k\eta = F_0 cospt \tag{13}$$

В каноническом виде (13) будет:

$$\ddot{\eta} + 2n_1\dot{\eta} + \omega_1^2\eta = h \cdot cospt \tag{14}$$

Здесь n_1 − коэффициент затухания, $n_1 = \frac{\mu_1}{4m}$,

ω_1^2 – частота свободных колебаний системы 1-ого типа без сил трения.

$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $h = \frac{F_0}{2m}$ – приведенная амплитуда внешнего воздействия.

Частное решение (14) $\dot{\eta}^*$ (вынужденные колебания) будет [3], [8]:

$$\dot{\eta}^* = \frac{h}{\sqrt{(\omega_1^2 - \mathrm{p}^2)^2 + 4\mathrm{n}_1^2\mathrm{p}^2}} \cos(pt - \propto) \tag{14}$$

Отсюда

$$D = \frac{F_0/_{2m}}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \mathrm{p}^2)^2 + 4(\mu_1^2/_{16m^2})\mathrm{p}^2}} \quad \text{с учетом (16)}$$

$$D^2(\frac{k}{m} - \mathrm{p}^2)^2 + \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{16F_{mp}^2}{\pi^2} = F_0/_{2m} \quad F_{\text{тр}} = mgf, \text{ где} \tag{16}$$

f − коэффициент трения 1-ого рода [1].

Отсюда

$$D = \pm \frac{1}{(\frac{k}{m} - \mathrm{p}^2)^2} \sqrt{\frac{F_0}{2m} - \frac{4}{\pi^2} \frac{g^2 f^2}{}}.$$

Полученная функция D(p) является приближенной амплитудно-частотной характеристикой системы.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959. 439 с.

2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.
3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
4. Кеч. В, Теодореску П. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике. М.: МИР, 1978. 518 с.
5. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. Л.: Судпромгиз, 1963. 528 с.
6. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1968. 621 с.
7. Пожалостин А.А., Паншина А.В. Автоколебания в одномерных упругих системах с трением // Известия Московского государственного технического университета МАМИ (Известия МГТУ "МАМИ"). 2014. Т. 4, Вып. 4(22) . С. 71 – 75
8. Пожалостин А.А., Паншина А.В. Вынужденные колебания упругих одномерных систем с сухим трением // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2012. Спец. вып. № 8. Фундаментальные и прикладные задачи механики. С. 117 – 128.