

О некоторых приближенных методах решения обратной задачи внешней баллистики

07, июль 2015

**Борисенко А. Д.¹, Борисенко Н. Д.^{2,*},
Маничев В. Б.²**

УДК: 519.622.2

¹Россия, ПАО "НПО "Алмаз"

²МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}xenuxstyler@gmail.com

Введение

Не смотря на значительную производительность современных вычислительных систем и возможности проведения большого количества численных экспериментов, методы решения обратных задач по прежнему не потеряли свою актуальность. Это связано, в первую очередь, с тем, что методы решения обратной задачи имеют значительно меньшую вычислительную сложность по сравнению с методами прямого перебора.

В данной статье рассматривается задача определения тяговых и массовых характеристик летательного аппарата для полета по заданной траектории. При решении задач внешней баллистики создание методов решения обратной задачи сопряжено со значительными трудностями, связанными с нелинейностью задачи и большим количеством возможных типов траекторий полета. Тем не менее, существует множество решений [2], основанных на некоторых приближениях, относящихся к форме кривой тяги, виду траектории, диапазону скорости, виду коэффициента сопротивления, относительной массе топлива и пр. Нередко, при решении данных задач, поиск решения выполняется сближениями. Использование такого рода приближений приводит к некоторым, иногда значительным, отличиям результата от более точных расчетов, что влечет за собой снижение скорости проектирования. В связи с этим, наиболее точным, при решении данной задачи, является весьма ресурсоемкий метод многократного численного решения прямой задачи внешней баллистики.

Для создания альтернативной методики решения данной задачи были использованы приближенные методы, такие как метод Галеркина и метод наименьших квадратов. Разработанная методика позволяет с достаточной точностью решать обратную задачу с мини-

мумом приближений: требуется выбор определенного вида базисных функций. Данная задача решена для произвольного типа траектории, произвольного вида кривой изменения скорости и произвольного диапазона скоростей.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается обратная задача внешней баллистики, под которой понимается следующая задача: пусть дана некоторая траектория полета ЛА и диаграмма скорости $V(t)$ полета летательного аппарата(ЛА), пусть также дана масса полезной нагрузки и некоторые характеристики двигателя(такие как удельный импульс и коэффициент массового совершенства). Необходимо определить закон изменения тяги $P(t)$, достаточной для реализации данной диаграммы скорости и определить потребную массу топлива ω_k , необходимую ЛА для реализации данного закона изменения тяги.

Задача рассматривалась со следующими приближениями: ЛА рассматривается как материальная точка, отношение тяги к расходу топлива постоянно и равно импульсу продуктов сгорания I_1 , ЛА осуществляет движение в одной плоскости, углы атаки пренебрежимо малы.

Тогда получаем следующую систему уравнений:

Уравнение движения центра масс

$$\frac{dV(t)}{dt} m = P - X - G \sin \theta(t), \quad (1)$$

где m – текущая масса ЛА,

P – тяга двигательной установки ЛА,

X – сила сопротивления воздуха,

$G = mg$ – сила тяжести, действующая на ЛА,

g – ускорение свободного падения ЛА,

$\theta(t)$ - угол наклона траектории ЛА, характеризует выбранную форму траектории.

Текущая масса ЛА

$$m = m_0 - \omega = m_0 - \int_0^t \dot{\omega} dt, \quad (2)$$

где m_0 – начальная масса ЛА,

ω - текущая масса сгоревшего топлива.

Сила сопротивления воздуха:

$$X = \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \cdot C_x, \quad (3)$$

где ρ – плотность воздуха,

C_x – коэффициент воздушного сопротивления ЛА,

S – характерная площадь ЛА.

Соотношение тяги и расхода топлива:

$$P = \dot{\omega} \cdot I_1, \quad (4)$$

Закон сохранения массы для полета ракеты

$$m_0 = m_{nn} + \beta \omega_\kappa, \quad (5)$$

где m_{nn} – масса полезной нагрузки,

β – коэффициент массового совершенства двигательной установки, причем

$$\beta = \frac{\omega_\kappa}{m_{дв}}, \text{ где } m_{дв} \text{ – масса двигательной установки.}$$

$$\text{Здесь и в (5) } \omega_\kappa = \int_0^{t_\Sigma} \dot{\omega} dt,$$

где t_Σ – продолжительность интервала времени, на котором ведется решение, например, время полета ЛА.

Решение методом Галеркина

Запишем систему уравнений из предыдущего пункта, применив некоторые подстановки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \cdot \left(\frac{dV(t)}{dt} + g \sin \theta(t) \right) + \dot{\omega} \cdot I_1 - m_0 \cdot \left(\frac{dV(t)}{dt} + g \sin \theta(t) \right) = \frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x, \\ m_0 - \beta \omega_\kappa = m_{nn}, \\ \omega_\kappa = \int_0^{t_\Sigma} \dot{\omega} dt. \end{array} \right. \quad (6)$$

Требуется определить $\omega_\kappa = \omega_\kappa(t)$.

Решим указанную задачу методом взвешенных невязок. Будем искать решение в виде

$$\omega \approx \sum_i \omega_i N_i(t). \quad (7)$$

где $N_i(t)$ – базисная функция, ω_i – вес при i -й базисной функции.

Представим дифференциальное уравнение в виде $L[\omega] = 0$. После подстановки (7) получаем

$$L[\omega] = R(t). \quad (8)$$

где $R(t)$ – невязка, вызванная приближенностью выражения (7) к точному решению.

Назначим некоторые функции веса $\phi_i(t)$ и до множим на (8), получим систему уравнений:

$$L[\omega] \cdot \phi_i(t) = R(t) \cdot \phi_i(t). \quad (9)$$

Предъявим к решению требование ортогональности невязок к функциям веса на интервале, где ведется поиск решения $\int_0^{t_\Sigma} R(t) \cdot \phi_i(t) dt = 0$.

Таким образом получим систему уравнений для нахождения ω_i :

$$\int_0^{t_\Sigma} L[\omega] \cdot \phi_i(t) dt = 0. \quad (10)$$

В случае метода Галеркина весовые функции равны базисным $\phi_i(t) = N_i(t)$, тогда получим

$$\int_0^{t_\Sigma} L[\omega] \cdot N_i(t) dt = 0. \quad (11)$$

В результате получаем замкнутую систему для поиска решения:

$$\begin{cases} \int_0^{t_\Sigma} L[\omega] \cdot N_i(t) dt = 0, \\ m_0 - \beta \omega_\kappa = m_{nn}, \\ \omega = \int_0^{t_\Sigma} \dot{\omega} dt. \end{cases} \quad (12)$$

Введем обозначения

$$\Delta V(t) = \frac{dV(t)}{dt} + g \sin \theta(t), \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}_i = \int_0^{t_\Sigma} \left(\frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x \right) N_i(t) dt. \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_{i,j} = \int_0^{t_\Sigma} (\Delta V(t) \cdot N(t)_j + I_1 \cdot \dot{N}(t)_j) N(t)_i dt. \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_i = \int_0^{t_\Sigma} \Delta V(t) N_i(t) dt. \quad (16)$$

Получаем итоговую систему уравнений для нахождения $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = [\omega_0 \ \omega_1 \ \dots \ \omega_N]^T$ и m_0 :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}} - m_0 \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{Q}}, \\ m_0 - \beta \omega_\kappa = m_{nn}, \\ \omega_\kappa = \sum_i \omega_i N_i(t_\Sigma). \end{cases} \quad (17)$$

Начальное условие $\omega(0) = 0$.

Данная система представляет собой линейную систему уравнений и решается без каких-либо затруднений.

Решение методом наименьших квадратов.

Будем искать решение в виде (7). Для получения вектора решения $\bar{\Omega}$ потребуем, чтобы интеграл квадрата невязки был бы минимален или $\int_0^{t_y} R(t)^2 dt \rightarrow \min$, таким образом,

вектор решений должен соответствовать, минимуму функционала $F[\omega_k]$
 $F[\omega_k] = \int_0^{t_y} L[\omega]^2 dt$, который можно переписать в виде

$$F[\omega] = \int_0^{t_y} \left(\omega \cdot \Delta V(t) + \dot{\omega} \cdot I_1 - m_0 \cdot \Delta V(t) - \frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x \right)^2 dt. \quad (18)$$

После подстановки (7) в (18) и группировки слагаемых получаем

$$F \left[\sum_i \omega_i N(t)_i \right] = \int_0^{t_y} \left(\sum_i \omega_i \left(N(t)_i \cdot \Delta V(t) + I_1 \dot{N}(t)_i \right) - m_0 \cdot \Delta V(t) - \frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x \right)^2 dt. \quad (19)$$

Для поиска минимуму функционала найдем производные по всем компонентам вектора решений и приравняем их нулю.

Таким образом получим систему уравнений $\frac{\partial F}{\partial \omega_i} \left[\sum_j \omega_j N(t)_j \right] = 0$, которая в развер-

нутом виде представлена ниже

$$\int_0^{t_y} 2 \left(\sum_j \omega_j \left(N(t)_j \Delta V(t) + I_1 \dot{N}(t)_j \right) - m_0 \Delta V(t) - \frac{\rho V(t)^2}{2} S \cdot C_x \right) \left(N(t)_i \Delta V(t) + I_1 \dot{N}(t)_i \right) dt = 0. \quad (20)$$

Введем обозначение:

$$\psi(t)_i = N(t)_i \cdot \Delta V(t) + I_1 \dot{N}(t)_i. \quad (21)$$

После элементарных преобразований получаем:

$$\int_0^{t_y} \left(\sum_j \omega_j \cdot \psi(t)_j - m_0 \cdot \Delta V(t) - \frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x \right) \cdot \psi(t)_i dt = 0. \quad (22)$$

Аналогично способу, примененному при использовании метода Галеркина, обозначим

$$\mathbf{Q}_i = \int_0^{t_y} \left(\frac{\rho V(t)^2}{2} \cdot S \cdot C_x \right) \cdot \psi(t)_i dt, \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_{i,j} = \int_0^{t_y} \psi(t)_i \cdot \psi(t)_j dt, \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_i = \int_0^{t_y} \Delta V(t) \psi(t)_i dt. \quad (25)$$

Добавив недостающие соотношения, получим основное выражение метода наименьших квадратов для решения обратной задачи внешней баллистики:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{Q}} - m_0 \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{Q}}, \\ m_0 - \beta \omega_k = m_{nn}, \\ \omega_k = \sum_i \omega_i N_i(t_\Sigma). \end{cases} \quad (26)$$

С начальным условием $\omega(0) = 0$.

Данная система практически эквивалентна системе, полученной при решении данной задачи методом Галеркина и соответствует методу взвешенных невязок с весовыми функциями $\psi(t)_i$.

Применение метода конечных элементов

Использование данных методов возможно значительно упростить, применяя базисные функции специального вида, характерные для метода конечных элементов.

В это случае базисные функции равны нулю во всех характерных точках кроме некоторой, соответствующей данной базисной функции, где она равна единице. Тогда можно записать

$$\omega_k = \sum_{i=0}^N \omega_i N_i(t_\Sigma) = \omega_N. \quad (27)$$

Начальное условие $\omega_k(0) = 0$ будет выливаться в $\omega_0 = 0$. Тогда уравнения (17) и (26) можно преобразовать к виду:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{Q}} - \omega_N \cdot \beta \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{Q}} + m_{nn} \bar{\mathbf{B}}. \quad (28)$$

Частные случаи

Рассмотрены примеры вычислений, основанных на применении метода наименьших квадратов для наиболее распространенных случаев. При использовании метода Галеркина решение получается практически аналогичным.

1) *Линейный участок изменения скорости.*

В случае линейно изменяющейся скорости по закону:

$$V(t) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{t_\Sigma} t, \quad (29)$$

и постоянной по величине тяги ($P = \text{const}$) целесообразно использовать единственную базисную функции:

$$N_1(t) = \frac{t}{t_\Sigma}, \quad (30)$$

И искать решение в виде

$$\omega(t) = \omega_{\kappa} N_1(t). \quad (31)$$

Базисная функция (30) соответствует базисным функциям для метода конечных элементов, на основании этого используем (28), преобразовав его к виду, соответствующему одной переменной в векторе $\bar{\omega}$:

$$A \cdot \omega_{\kappa} - \omega_{\kappa} \cdot \beta \cdot B = Q + m_{nn} B, \quad (32)$$

Коэффициенты определяются в соответствии с уравнениями (23) – (25).

Выражение (32) имеет решение в виде:

$$\omega_{\kappa} = \frac{Q + m_{nn} B}{A - \beta \cdot B}, \quad (33)$$

Потребная тяга может быть определена по формуле (4):

$$P = I_1 \dot{\omega} = I_1 \omega_{\kappa} \dot{N}_1 = I_1 \omega_{\kappa} \frac{1}{t_{\Sigma}}. \quad (34)$$

2) *Два последовательных линейных участка ускорения.*

В случае двух линейных участков ускорения, которые имеют вид:

$$V(t) = \begin{cases} V_1 + \frac{V_2 - V_1}{t_1} t, \text{ если } t \leq t_1, \\ V_2 + \frac{V_3 - V_2}{t_{\Sigma} - t_1} (t - t_1), \text{ если } t_1 < t. \end{cases} \quad (35)$$

Двух постоянных режимов работы двигателя (двухрежимный двигатель), при времени работы двигателя на первом режиме t_1 целесообразно применять линейные базисные функции вида, характерные для метода конечных элементов:

$$N_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{t_1}, \text{ если } t \leq t_1, \\ 0, \text{ если } t > t_1. \end{cases} \quad (36)$$

$$N_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, \text{ если } t \leq t_1, \\ 1 - \frac{t - t_1}{t_{\Sigma} - t_1}, \text{ если } t > t_1. \end{cases} \quad (37)$$

$$N_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \leq t_1, \\ \frac{t - t_1}{t_{\Sigma} - t_1}, \text{ если } t > t_1. \end{cases} \quad (38) \quad (40)$$

вид которых изображен на (рис. 1).

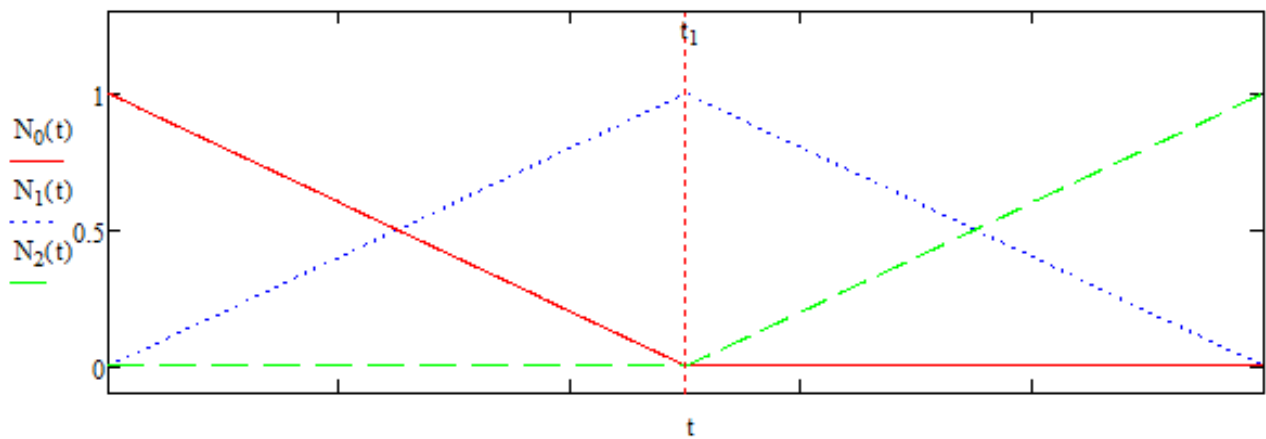


Рис 1. Линейные базисные функции

Решение будем искать в виде:

$$\omega(t) = \omega_0 N(t)_0 + \omega_1 N(t)_1 + \omega_2 N(t)_2, \quad (39)$$

причем $\omega_0 = 0$, так как масса сгоревшего топлива в начале полета нулевая.

Для решения данной задачи уравнение (28) останется без изменений:

$$\mathbf{A} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}} - \omega_N \cdot \beta \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{Q}} + m_{nn} \bar{\mathbf{B}},$$

где $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ определяются в соответствии с уравнениями (23) – (25).

Величина тяги определяется следующим образом:

$$P = I_1 \dot{\omega} = I_1 \left(\omega_0 \dot{N}(t)_0 + \omega_1 \dot{N}(t)_1 + \omega_2 \dot{N}(t)_2 \right). \quad (46)$$

2) *Диаграмма изменения скорости представляет собой параболу.*

В этом случае кривая изменения скорости имеет вид:

$$V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (40)$$

Для данного случая целесообразно выбрать квадратичные базисные функции вида:

$$\begin{cases} N_0(t) = 2 \cdot t^2 - 3t + 1, \\ N_1(t) = 1 - 4 \cdot \left(t - \frac{1}{2} \right)^2, \\ N_2(t) = 2 \cdot t^2 - t, \end{cases} \quad (41)$$

вид которых изображен на (рис. 2).

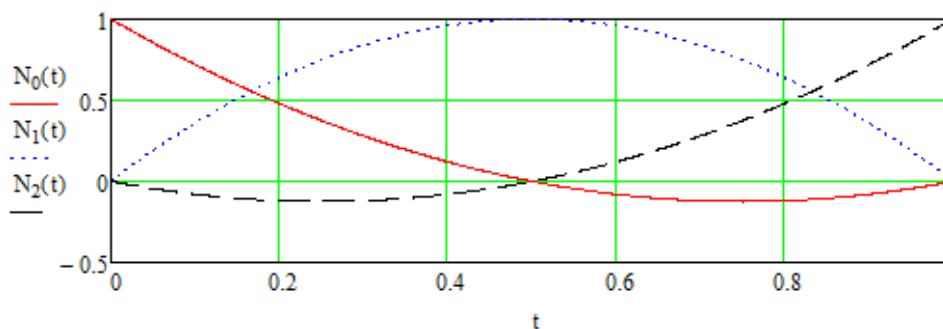


Рис 2. Вид квадратичных базисных функций

Решение будем искать в виде:

$$\omega(t) = \omega_0 N(t)_0 + \omega_1 N(t)_1 + \omega_2 N(t)_2, \quad (42)$$

причем $\omega_0 = 0$, так как масса сгоревшего топлива в начале полета нулевая.

Дальнейшие выкладки аналогично предыдущему пункту с точностью до множителей и отличается только видом базисных функций.

Вычислительный эксперимент.

Для испытания данных методов был проведен вычислительный эксперимент со следующими гипотетическими исходными данными:

$$\theta = 0, \beta = 1.5$$

$$C_x S \frac{\rho}{2} = 2.07 \cdot 10^{-3},$$

$$m_{nn} = 5,$$

$$I_1 = 2000,$$

$$V(t) = \frac{200}{3} \cdot t \cdot (5 - 2 \cdot t).$$

Диаграмма скорости, соответствующая приведенному выше уравнению изображена на (рис. 3).

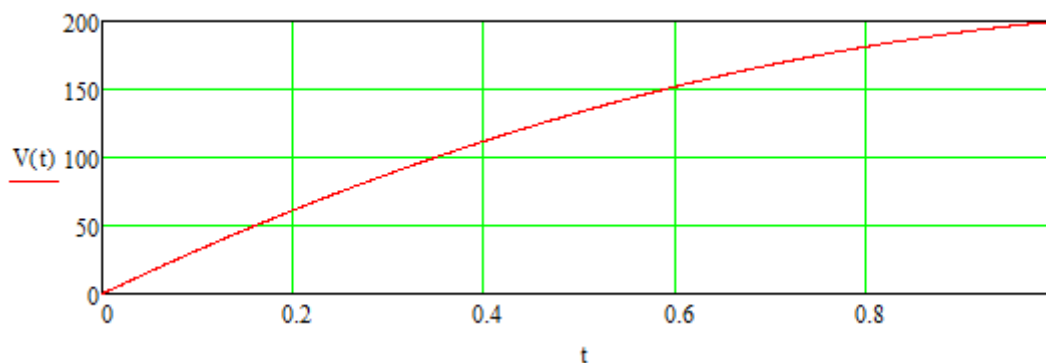


Рис 3. Требуемая диаграмма скорости

Данная задача была решена методом Наименьших квадратов (описано в предыдущем пункте) и методом Галеркина. Затем решение было проверено численным интегрированием методом Рунге-Кутты 4 порядка. На рисунках (4 – 6) представлены результаты:

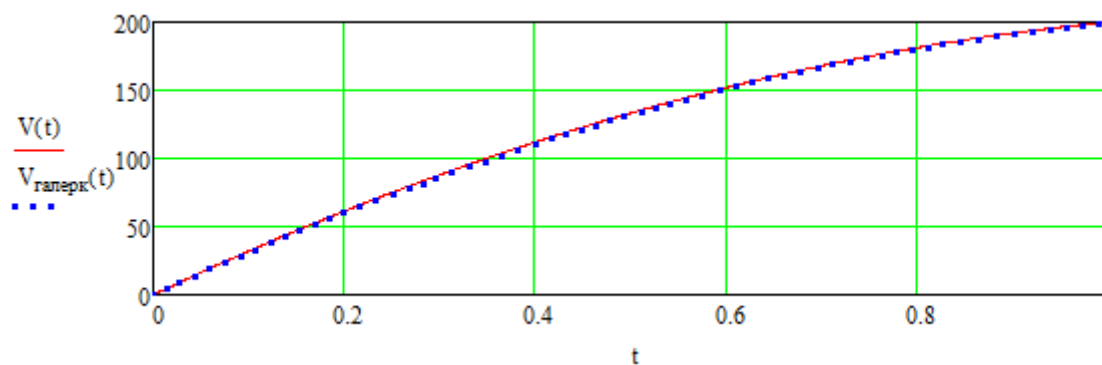


Рис 4. Сравнение потребной диаграммы скорости и диаграммы, полученной при решении методом Галеркина

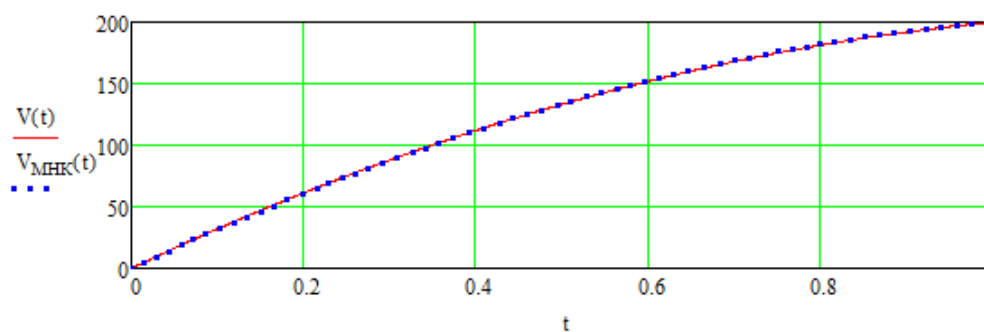


Рис 5. Сравнение потребной диаграммы скорости и диаграммы, полученной при решении методом наименьших квадратов

Ошибка расчета $err(t)_i = V(t)_i - V(t)$.

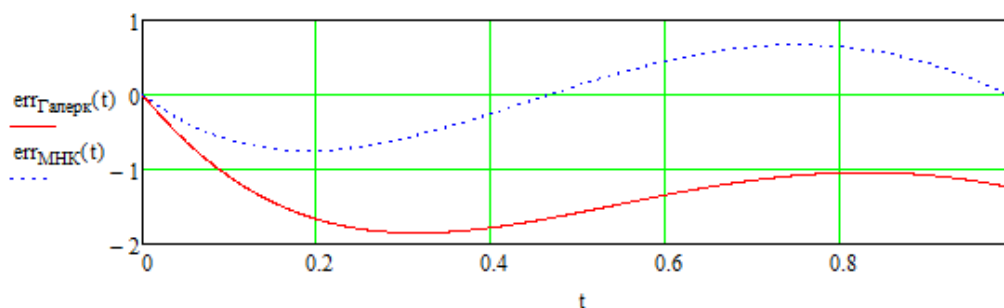


Рис 6. Ошибка расчетов, полученных методом Наименьших квадратов при использовании метода наименьших квадратов и метода Галеркина

Таким образом можно отметить хорошее качество полученных результатов. Также стоит заметить, что метод наименьших квадратов для данной задачи дает несколько лучшую точность.

Заключение

В данной работе был рассмотрен метод приближенного решения обратной задачи внешней баллистики. При разработке данных методов были использованы метод Галеркина и метод наименьших квадратов, что позволило получить решение в виде системы линейных уравнений. Полученное решение позволяет анализировать различные траектории полета летательных аппаратов и определять требуемые тяговые характеристики. Решение отличается простотой в реализации и отсутствием различных специальных функций. Использование полученных результатов открывает широкие возможности для постановки и решения различных оптимизационных задач, таких как выбор нелинейной формы кривой скорости, соответствующей минимальной массе ЛА.

Список литературы

1. Шапиро Я.М., Мазинг Г.Ю., Прудников Н.Е. Основы проектирования ракет на твердом топливе. М.: Воениздат. 1968. 256 с.
2. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, пер. и доп. М.: Машиностроение. 1973. 616 с.
3. Коновалов А.А., Николаев Ю.В. Внешняя баллистика / Под ред. А.А. Коновалова. М.: ЦНИИ информации. 1979. 228 с.
4. Дэвис Л., Фоллин Дж., Блитцер Л. Внешняя баллистика ракет / Под ред. Д.М. Комарова, Х.Л. Мучник.; пер. с англ. И.Г. Астапенкова и др. М.: Изд-во МО СССР. 1961. 515 с.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Изд 5-е, исп. М.: Л.: Физматлит. 1962. 708 с.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Под ред. Н.С. Бахвалова; пер. с англ. Б.И. Квасова. М.: Мир. 1986. 318 с.