УДК 519.872

Анализ характеристик замкнутой многоканальной системы массового обслуживания с абсолютными приоритетами

Нестеров Ю. Г.^{1,*}

* ugn@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье изложена процедура анализа характеристик замкнутой системы массового обслуживания (СМО) типа «модели ремонтника» $M_r|Mr|S||N_r$ с абсолютными приоритетами, произвольным числом обслуживающих аппаратов (ОА), конечной популяцией заявок каждого класса и экспоненциальной функцией распределения вероятностей (ФРВ) времени обслуживания. Процедура основана на применении т.н. дельта-тэ метода для марковских систем. На первом шаге строится система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы по каждому приоритету для произвольного момента времени. При выводе системы уравнений используется свойство ординарности экспоненциального распределения. Второй шаг процедуры состоит в переходе от системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений для вероятностей состояний в стационарном режиме путем предельного перехода к бесконечному времени. Получены и доказаны рекуррентные соотношения для решения полученной системы алгебраических уравнений для вероятностей состояний СМО в стационарном режиме. Выведены аналитические выражения для вычисления средних значений времен пребывания, времен ожидания и загрузок ОА для заявок разных приоритетов. Полученные выражения отличаются высокой вычислительной эффективностью.

Ключевые слова: система массового обслуживания (СМО), сеть массового обслуживания, узел, заявка, очередь, обслуживающий аппарат (ОА), дисциплина с абсолютными приоритетами, время обслуживания, время ожидания, время пребывания, состояние, вероятность состояния, распределение вероятностей состояний, вероятность перехода

Введение

Замкнутые системы массового обслуживания (СМО) широко используются в качестве моделей для оценки временных характеристик информационных систем, сетей передачи данных, а также процессов массового обслуживания в производственных, транспортных, торговых, логистических и сервисных системах [1,2,9,10]. В работе [5] замкнутые СМО типа «модели ремонтника» (в обозначениях Кендалла [4] - $M_r|G|I_r|S|N$) используются в качестве базовых моделей (элементов декомпозиции сети) для расчета средних значений времен пребывания заявок в узлах широкого класса замкнутых сетей

массового обслуживания с приоритетами и консервативными дисциплинами обслуживания. На сегодня известны аналитические результаты для ряда марковских СМО типа $M_r|Mr|1|N_r$ с различными дисциплинами обслуживания [3,4,7]. Для СМО типа $M_r|G|1|N_r$ с произвольной функцией распределения вероятностей (ФРВ) и при одном обслуживающем аппарате ($S=1$) в работе [6] получено решение для относительных приоритетов, в работах [12-15] получен ряд частных результатов, а в работе [8] получено общее решение для производящих функций вероятностей состояний, однако переход к собственно распределениям вероятностей состояний и средним значениям времен пребывания представляет значительные вычислительные трудности. Для многоканальных СМО типа $M_r|G|S|N_r$, а также для марковских СМО типа $M_r|Mr|S|N_r$ ($S>1$) с абсолютными приоритетами аналитические решения пока не найдены. Такие СМО в составе сети массового обслуживания моделируют работу мультипроцессорных вычислительных систем, а конкретнее – фазу выполнения программ (процессов) множеством центральных процессоров под управлением единой операционной системы.

Настоящая работа посвящена получению эффективного в вычислительном отношении аналитического решения для распределений вероятностей состояний, средних значений времен ожидания и времен пребывания заявок, а также загрузок обслуживающих аппаратов для заявок различных классов (приоритетов) в многоканальной СМО типа $M_r|Mr|S|N_r$ ($S>1$) с абсолютными приоритетами и дообслуживанием (прерванных заявок). Решение основано на использовании т.н. Δt -метода [7] и результата Литтла [11] для исследования искомых характеристик СМО данного типа.

Постановка задачи

Рассмотрим замкнутую СМО $M_r|Mr|S|N$, состоящую из S ($S>1$) обслуживающих аппаратов (ОА), единой очереди перед ними и R независимых источников заявок, каждый емкостью N_r ($N_r \geq 1$), ($r=1, R$). Здесь: r - номер приоритета (класса) заявки, R ($R>1$) – число приоритетов. При этом меньшее значение r соответствует более высокому приоритету. Понятия класса и приоритета в данной работе совпадают, а заявки каждого приоритета имеют свои собственные ФРВ времен пребывания в источнике и ФРВ времен обслуживания.

M_r в первой позиции обозначения СМО означает, что ФРВ времени пребывания любой заявки приоритета r в источнике имеет экспоненциальное распределение с параметром λ_r , а M_r во второй позиции обозначения СМО означает, что ФРВ времени обслуживания любой заявки приоритета r в ОА (не зависимо от номера ОА) также имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_r .

Под состоянием такой СМО по приоритету r будем понимать количество k заявок приоритета r в очереди к ОА и на обслуживании в ОА.

Далее везде при обозначении вероятностей состояний и/или вероятностей переходов СМО из одного состояния в другое, верхний индекс будет указывать номер приоритета заявки, а нижний индекс – состояние СМО по данному приоритету.

Решение

Для определения вероятностей состояний такой СМО можно применить т.н. Δt - метод [7] в силу ее «марковости» (времена пребывания в источниках и времена обслуживания заявок имеют экспоненциальные распределения для всех приоритетов).

Для составления системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний СМО воспользуемся т.н. уравнением Колмогорова-Чепмена [3]:

$$P_k^r(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{N_r} P_j^r(t) \cdot P_{j,k}^r(\Delta t); \quad k \in [0, N_r], \quad r \in [1, R] \quad (1)$$

Здесь:

$P_k^r(t + \Delta t)$ - вероятность события, состоящего в том, что в момент времени $(t + \Delta t)$ в очереди и/или на обслуживании находится k заявок приоритета r ;

$P_{j,k}^r(\Delta t)$ - вероятность перехода системы за бесконечно малое время Δt из состояния j в состояние k по приоритету r .

Причем из свойства ординарности [9] следует, что $P_{j,k}^r(\Delta t) = 0(\Delta t)$ (бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем Δt) при $|j - k| > 1$.

Тогда (1) переписывается следующим образом:

$$P_k^r(t + \Delta t) = P_{k-1}^r(t) \cdot P_{k-1,k}^r(\Delta t) + P_k^r(t) \cdot P_{k,k}^r(\Delta t) + P_{k+1}^r(t) \cdot P_{k+1,k}^r(\Delta t); \quad r \in [1, R] \quad k \in [0, N_r] \quad (2)$$

Определим вероятности переходов:

- $P_{k,k}^r(\Delta t)$ - вероятность события **S**, состоящего в том, что за время Δt не изменилось состояние системы по приоритету r .

Событие **S** есть произведение независимых событий **A** и **B**: $S = A \cap B$.

Событие **A** состоит в том, что за время Δt из источника не придут заявки приоритета r , а вероятность этого события:

$$P_A = 1 - (N_r - k) \cdot \lambda_r \cdot \Delta t \quad (3)$$

Событие **B** состоит в том, что за время Δt систему не покинула ни одна заявка приоритета r , а вероятность этого события:

$$P_B = 1 - \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \cdot \Delta t \quad (4)$$

Здесь:

j - число заявок приоритетов, более высоких, чем r , - при этом имеет смысл рассматривать диапазон $[0, S-1]$;

$\gamma(j)$ - функция-индикатор, значение которой равно числу заявок приоритета r , находящихся на обслуживании, определяется следующим образом:

$$\gamma(j) = \begin{cases} S - j, & \text{если } k \geq S - j \\ k, & \text{если } k < S - j \end{cases} \quad (5)$$

$\rho^r(j, t)$ - вероятность того, что в системе в момент времени t находится j заявок более высоких, чем r приоритетов (эту вероятность определим ниже).

Тогда можно записать, что:

$$P_{k,k}^r(\Delta t) = 1 - \left[(N_r - k)\lambda_r + \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right] \Delta t \quad (6)$$

- $P_{k,k-1}^r(\Delta t)$ - вероятность события S , состоящего в том, что за время Δt система по приоритету r перешла из состояния k в состояние $k-1$ (число заявок приоритета r в очереди и на обслуживании уменьшилось с k до $k-1$).

Событие S есть произведение независимых событий A и B : $S = A \cap B$.

Событие A состоит в том, что за время Δt не придут заявки приоритета r , а вероятность этого события определяется соотношением (3).

Событие B состоит в том, что за время Δt завершится обслуживание заявки приоритета r , а вероятность этого события:

$$P_B = \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \cdot \Delta t \quad (7)$$

Тогда вероятности перехода из состояния k в состояние $k-1$ получим:

$$P_{k,k-1}^r(\Delta t) = \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \cdot \Delta t \quad (8)$$

- $P_{k,k+1}^r(\Delta t)$ - вероятность события S , состоящего в том, что за время Δt система по приоритету r перешла из состояния k в состояние $k+1$ (число заявок приоритета r в очереди и на обслуживании увеличилось с k до $k+1$).

Событие S есть произведение независимых событий A и B : $S = A \cap B$.

Событие A состоит в том, что за время Δt в систему поступила одна заявка приоритета r , а вероятность этого события:

$$P_A = (N_r - k)\lambda_r \cdot \Delta t \quad (9)$$

Событие B состоит в том, что за время Δt систему не покинула ни одна заявка приоритета r , а вероятность этого события определяется соотношением (4).

Тогда для вероятности перехода из состояния k в состояние $k+1$ получим:

$$P_{k,k+1}^r(\Delta t) = (N_r - k)\lambda_r \cdot \Delta t \quad (10)$$

Подставляя (6), (8), (10) в (2) получим систему уравнений:

$$P_k^r(t+\Delta t) = P_{k-1}^r(t) \cdot (N_r - k + 1)\lambda_r \cdot \Delta t + P_k^r(t) \cdot \left\{ 1 - \left[(N_r - k)\lambda_r + \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right] \Delta t \right\} + P_{k+1}^r(t) \cdot \left[\sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j, t) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \cdot \Delta t \right] \quad (11)$$

Здесь, по аналогии с (5),

$$\gamma(j) = \begin{cases} k+1, & \text{если } k+1 \leq S-j \\ S-j, & \text{если } k+1 > S-j \end{cases} \quad r \in [1, R], k \in [0, N_r]$$

Определим стационарные вероятности состояний системы для каждого приоритета:

$$P_k^r = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k^r(t), \quad k = \overline{0, N_r}, \quad r = \overline{1, R}$$

и вероятности

$$\rho^r(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho^r(j, t), \quad j = \overline{0, (S-1)} \quad r = \overline{1, R}$$

Переходя к пределам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k^r(t+\Delta t) - P_k^r(t)}{\Delta t} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} [P_k^r(t)]' = 0$$

Из (11) получим:

$$0 = P_{k-1}^r \cdot (N_r - k + 1)\lambda_r - P_k^r \cdot \left[(N_r - k)\lambda_r + \sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right] + P_{k+1}^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right], \quad r = \overline{1, R} \quad (12)$$

При $k=0$ имеем:

$$0 = -P_0^r \cdot [N_r \lambda_r] + P_1^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right], \quad r = \overline{1, R} \quad (13)$$

При $k = N_r$ имеем:

$$0 = P_{N_r-1}^r \cdot \lambda_r - P_{N_r}^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{S-1} \rho^r(j) \cdot \gamma(j) \cdot \mu_r \right], \quad r = \overline{1, R} \quad (14)$$

Введем функцию $\bar{\gamma}(k, j)$ определяемую следующим образом:

$$\bar{\gamma}(k, j) = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq S-j, \\ S-j, & \text{если } k > S-j. \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что $\gamma(j) = \bar{\gamma}(k, j)$, а $\gamma(j) = \bar{\gamma}(k+1, j)$.

Тогда (12) примет вид:

$$0 = P_{k-1}^r \cdot (N_r - k + 1)\lambda_r - P_k^r \cdot \left[(N_r - k)\lambda_r + \sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(k, j) \cdot \mu_r \right] + P_{k+1}^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(k+1, j) \cdot \mu_r \right], \quad r = \overline{1, R} \quad (16)$$

Введем следующую функцию от $\mathbf{k}$:

$$\pi(k) = -P_k^r \cdot (N_r - k)\lambda_r + P_{k+1}^r \cdot \left[\sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(k+1, j) \cdot \mu_r \right] \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что $0 = \pi(k) - \pi(k-1)$, тогда из (13) и (14) имеем:

$$\forall k_{k \in [0, N_r]} \quad (\pi(0) = 0) \ \& \ (\pi(k) = \pi(k-1)) \rightarrow (\pi(k) = 0)$$

Следовательно, из (16) получим:

$$P_{k+1}^r = \frac{(N_r - k)\lambda_r}{\sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(k+1, j) \cdot \mu_r} \cdot P_k^r, \quad k = \overline{0, (N_r - 1)} \quad (18)$$

Из (18) непосредственно следует, что

$$P_k^r = \left[\prod_{i=1}^k \frac{(N_r - i + 1)}{\sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(i, j)} \right] \cdot \varphi_r^k \cdot P_0^r, \quad k = \overline{1, N_r} \quad (19)$$

Здесь :

$$P_0^r = \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_r} \left[\prod_{i=1}^k \frac{(N_r - i + 1)}{\sum_{j=0}^{s-1} \rho^r(j) \cdot \bar{\gamma}(i, j)} \cdot \varphi_r^k \right] \right\}^{-1}, \quad r = \overline{1, R} \quad (20)$$

а $\varphi_k = \lambda_k / \mu_k$.

Определим теперь $\rho^r(j)$ - вероятность того, что в стационарном состоянии в системе находится $\mathbf{j}$ заявок более высокого, чем $\mathbf{r}$ приоритета. Интерес представляют значения $\mathbf{j}$ из интервала $[0, (s-1)]$.

Очевидно следующее рекуррентное соотношение:

$$\rho^r(j) = \sum_{i=0}^j \rho^{r-1}(i) \cdot P_{j-i}^{r-1} \quad (\text{для СМО } \overline{M_R} | \overline{M_R} | (S-i) | \overline{N_R}), \quad r = \overline{2, R}, \quad j = \overline{0, (S-1)} \quad (21)$$

причем

$$\rho^1(0) \triangleq 1, \quad \rho^1(j) \triangleq 0, \quad j = \overline{1, (S-1)}.$$

Таким образом, соотношения (15) – (21) позволяют рассчитывать вероятности состояний данной СМО в стационарном для стационарного режима. Расчет проводится последовательно, начиная со старшего приоритета ($r = 1$).

Среднее полное время ожидания W_r определим через среднее время пребывания V_r

$$W_r = V_r - 1 / \mu_r \quad (22)$$

Для этого воспользуемся результатом Литтла [11]:

$$V_r = M_r / \lambda_r^* . \quad (23)$$

Здесь:

$$M_r = \sum_{k=1}^{N_r} k \cdot P_k^r - \text{среднее число заявок приоритета } r \text{ в системе,} \quad (24)$$

$$\lambda_r^* = \lambda_r (N_r - M_r) - \text{интенсивность поступления заявок приоритета } r \text{ в очередь.} \quad (25)$$

Очевидно, что загрузки ОА заявками приоритета r определяются соотношением:

$$u_r = \lambda_r (N_r - M_r) / (S \mu_r) \quad (26)$$

Заключение

Таким образом получение искомых аналитических выражений для вычисления вероятностей состояний состояний СМО, средних времен пребывания (ожидания) заявок каждого класса - $v_r(w_r)$ и загрузок ОА - u_r , $r=1, \dots, R$. для замкнутой СМО типа $Mr|Mr|m||Nr$ с абсолютными приоритетами и дообслуживанием сводится к следующей последовательности относительно простых шагов.

1. Построение системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний СМО в произвольный момент времени - соотношения (2 – 11).
2. Построение системы уравнений для вероятностей состояний СМО в стационарном режиме из системы дифференциальных уравнений путем предельного перехода - соотношения (15 - 16).
3. Определение распределения вероятностей состояний СМО в стационарном режиме с помощью эффективной в вычислительном отношении рекуррентной процедуры – соотношения (17 - 21).
4. Определение средних времен пребывания (ожидания) и загрузок ОА для заявок различных классов - соотношения (22 – 26).

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
2. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
4. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: пер. с англ. М.: Мир, 1979. 600 с.

5. Нестеров Ю.Г. Декомпозиционный метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 2. С. 263-276. DOI: [10.7463/0214.0700018](https://doi.org/10.7463/0214.0700018)
6. Нестеров Ю.Г. Анализ характеристик замкнутой системы массового обслуживания с относительными приоритетами // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 3. С. 242-254. DOI: [10.7463/0314.0702664](https://doi.org/10.7463/0314.0702664)
7. Кёниг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания: пер. с нем. М.: Радио и связь, 1981. 128 с.
8. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами: пер. с англ. М.: Мир, 1973. 280 с.
9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.
10. Konig D., Rolsky T., Smidt V., Stoyan D. Stochastic processes with imbedded marked point processes (PMP) and their application in queuing theory // Math. Operationsforschung und Statistik. Ser. Optimization. 1978. Vol. 9. P. 125-142.
11. Little J.D.C. A proof for the Queueing Formula $L=\lambda W$ // Operations Research. 1961. Vol. 9, no. 3. P. 383-387. DOI: [10.1287/opre.9.3.383](https://doi.org/10.1287/opre.9.3.383)
12. Szep A. Iterative Method for Solving M/G/1/N-type Loops with Priority Queues. Режим доступа: http://www.inf.u-szeged.hu/actacybernetica/edb/vol07n3/pdf/Szep_1986_ActaCybernetica.pdf (дата обращения 28.02.2014).
13. Fatnes J.N. Flow-times in an M/G/1 Queue under a Combined Preemptive/ Non-preemptive Priority Discipline: Master of Science in Physics and Mathematics. Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, 2010. Режим доступа: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:348953/FULLTEXT01.pdf> (дата обращения 28.02.2014).
14. Madan K.C. A Non-Preemptive Priority Queueing System with a Single Server Serving Two Queues M/G/1 and M/D/1 with Optional Server Vacations Based on Exhaustive Service of the Priority Units // Applied Mathematics. 2011. Vol. 2, no. 6. P. 791-799. DOI: [10.4236/am.2011.26106](https://doi.org/10.4236/am.2011.26106)
15. Atar R., Biswas A., Kaspi H. Fluid limits of G/G/1+G queues under the non-preemptive earliest-deadline-rst discipline. Preprint. Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 2014. 28 p. Режим доступа: <http://webee.technion.ac.il/people/atar/ata-bis-kas.pdf> (дата обращения 28.02.2014).

Feature Analysis of Closed Multichannel Queuing System with Preemptive Disciplines

Yu.G. Nesterov^{1,*}

[*ugn@bmstu.ru](mailto:ugn@bmstu.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: queuing system, queuing network, node, transaction, queue, facility, preemptive discipline, service time, waiting time, residence time, state, probability of state, probability distribution of states, transition probability

The article describes a procedure of the feature analysis of closed queuing system (CQS). The system type is “a serviceman model” of $Mr|Mr|S||Nr$ with preemptive disciplines, random number (S) of facilities (F), final population of transactions of each priority of r (Nr), and exponential functions of probability distribution (FPD) of the transaction residence time in a source and on service (Mr).

A research objective is to receive analytical expressions for:

- probability distribution of CQS conditions for each priority in the stationary mode;
- mathematical expectation of transaction residence time of each priority in queue and on service;
- mathematical expectation of full waiting time of transactions of each priority;
- facility loadings by transactions of each priority.

The procedure, based on application of so-called delta-T method for Markov’s systems, includes the following steps.

The first step creates a system of the differential equations for probabilities of the system states for each priority for a random time point. In derivation a property of the exponential distribution ordinariness is used. The paper presents analytical expressions for probabilities of CQS transitions from one state to the other state for an infinitesimal interval of time for each priority and for all possible states. To define transition probabilities, is used a function-indicator which value is equal to the number of transactions of the priority under consideration being on service at a random time point. It takes into consideration the main property of a preemptive discipline, as well as the probabilities of the events consisting in the fact that in CQS in queue and on service at a random time point there is a certain number of transactions of priorities, higher than the considered one. Received analytical expressions allow us to calculate these probabilities.

The second step provides a transition from the system of differential equations, defined for a random time point, to the system of the algebraic equations for probabilities of the CQS states

for each priority in the stationary mode by the limit transition to the infinite time: derivatives of probabilities of the CQS states for each priority are equal to zero.

To solve the system of the algebraic equations for probabilities of the CQS states for each priority in the stationary mode, there is the recurrence relation allowing us to calculate required probabilities, consistently beginning with the highest priority.

Obtained formulas enable us to calculate population means of residence time, full waiting times, as well as loadings of facility for transactions of different priorities. The structure of the received expressions provides high computing efficiency of the procedure.

References

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to queuing theory]. Moscow, LKI Publ., 2007. 400 p. (in Russian).
2. Vishnevskiy V.M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical bases of designing of computer networks]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003. 512 p. (in Russian).
3. Kleinrock L. *Queueing Systems. Vol. 1. Theory*. New York, John Wiley and Sons, 1975. (Russ. ed.: Kleinrock L. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 432 p.).
4. Kleinrock L. *Queueing Systems. Vol. 2. Computer Applications*. New York, John Wiley and Sons, 1976. (Kleinrock L. *Vychislitel'nye sistemy s ocheredyami*. Moscow, Mir Publ., 1979. 600 p.).
5. Nesterov Yu.G. Decomposition method for analysis of closed queuing networks. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 2, pp. 263-276. DOI: [10.7463/0214.0700018](https://doi.org/10.7463/0214.0700018) (in Russian).
6. Nesterov Yu.G. Feature analysis for closed queuing system with non-preemptive priorities. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 3, pp. 242-254. DOI: [10.7463/0314.0702664](https://doi.org/10.7463/0314.0702664) (in Russian).
7. Konig D., Stoyan D. *Metody teorii massovogo obsluzhivaniya* [Methods of queuing theory]. Transl. from German. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981. 128 p. (in Russian).
8. Jaiswal N.K. *Priority Queues*. Academic Press, New York, 1968. (Russ. ed.: Jaiswal N.K. *Ocheredi s prioritetami*. Moscow, Mir Publ., 1973. 280 p.).
9. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [Theory of random processes and its engineering applications]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2000. 383 p. (in Russian).
10. Konig D., Rolsky T., Smidt V., Stoyan D. Stochastic processes with imbedded marked point processes (PMP) and their application in queuing theory. *Math. Operationsforschung und Statistik. Ser. Optimization*, 1978, vol. 9, pp. 125-142.
11. Little J.D.C. A proof for the Queueing Formula $L=\lambda W$. *Operations Research*, 1961, vol. 9, no. 3, pp. 383-387. DOI: [10.1287/opre.9.3.383](https://doi.org/10.1287/opre.9.3.383)

12. Szep A. *Iterative Method for Solving M/G//N-type Loops with Priority Queues*. Available at: http://www.inf.u-szeged.hu/actacybernetica/edb/vol07n3/pdf/Szep_1986_ActaCybernetica.pdf , accessed 28.02.2014.
13. Fatnes J.N. *Flow-times in an M/G/1 Queue under a Combined Preemptive/ Non-preemptive Priority Discipline*. *Master of Science in Physics and Mathematics*. Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, 2010. Available at: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:348953/FULLTEXT01.pdf> , accessed 28.02.2014.
14. Madan K.C. A Non-Preemptive Priority Queueing System with a Single Server Serving Two Queues M/G/1 and M/D/1 with Optional Server Vacations Based on Exhaustive Service of the Priority Units. *Applied Mathematics*, 2011, vol. 2, no. 6, pp. 791-799. DOI: [10.4236/am.2011.26106](https://doi.org/10.4236/am.2011.26106)
15. Atar R., Biswas A., Kaspri H. *Fluid limits of G/G/1+G queues under the non-preemptive earliest-deadline-rst discipline*. *Preprint*. Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 2014. 28 p. Available at: <http://webee.technion.ac.il/people/atar/ata-bis-kas.pdf> , accessed 28.02.2014.