

УДК 01.04.01

Идентификация нелинейных динамических систем, имеющих в своём составе несколько нелинейностей

Павлов Ю. Н.¹, Недашковский В. М.^{1,*},
Тихомирова Е. А.¹

* vmniu3@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье рассматривается определение коэффициентов дифференциальных уравнений систем по экспериментальным частотным годографам и разделения похожих, но разных по существу сил: диссипативные силы при квадрате первой производной в уравнениях движения и диссипативная сила от действия сухого трения. Описан алгоритм идентификации систем с известной передаточной функцией по экспериментальному частотному годографу, содержащему случайные погрешности измерений. В качестве модели принимается передаточная функция системы. Решение задачи идентификации авторы предложили искать в классе годографов, задаваемых моделью системы. Поиск неизвестных коэффициентов передаточной функции модели системы осуществляется путем минимизации предложенной авторами меры близости экспериментального годографа системы и годографа модели системы. В результате, решение задачи идентификации было сведено к решению системы линейных уравнений. Иллюстративный вычислительный эксперимент для системы второго порядка показал, что погрешность определения значений коэффициентов передаточной функции не превышает диапазон погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы.

Ключевые слова: гармоническая линеаризация, идентификация, нелинейная динамическая система, квадратичное трение, сухое трение, частотный годограф

Введение

При экспериментальной отработке силовых приводов авиационной и космической техники необходимо выявить свойства реальных элементов, недоступных исследованию теоретическими или вычислительными методами. Решению подобных задач (задач идентификации) посвящено много серьезных работ, использующих различные методы решения и подходы [1 – 6]. В этом смысле заслуживает внимания статистический анализ реакций привода, например, на входной гармонический сигнал определенной амплитуды и частоты. В реакции привода на подобный входной сигнал содержится информация, подлежащая статистическому анализу. При этом следует иметь в виду, что реальный

привод может содержать в себе нежелательные и плохообнаруживаемые нелинейности типа зон нечувствительности, нежесткости, люфтов гистерезиса или сухого трения. Более того, они могут присутствовать в различных сочетаниях, что существенно осложняет их обнаружение и идентификацию. При этом возникает также важный вопрос о возможности их селекции.

В предлагаемой статье рассматривается силовой привод, описываемый нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Уравнение содержит две нелинейности: сухое трение и квадратичную функцию.

1. Постановка задачи

Предполагается, что для реальной динамической системы (силовой привод), описываемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, в котором присутствует член пропорциональный квадрату первой производной и нелинейность типа "сухое трение" (рис. 1), путем подачи гармонического сигнала получены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики. Необходимо путем обработки экспериментальных данных определить все коэффициенты дифференциального уравнения и параметры нелинейностей. Провести статистическое моделирование, поскольку имеется в виду, что эксперимент сопровождается наличием помех. Определить погрешности полученных коэффициентов как функции величины действующих помех.

2. Методика решения задачи

- 1) Выбор вида динамического звена, нелинейностей и коэффициентов гармонической линеаризации.
- 2) Создание программы математического моделирования генерации псевдо экспериментальных данных.
- 3) Проведение вычислительного эксперимента, проведение статистического анализа ошибок в определении коэффициентов дифференциального уравнения и параметров нелинейностей.

В статье рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка, в котором присутствуют нелинейный член, пропорциональный квадрату первой производной, и нелинейный член типа «сухое трение». При подаче на вход системы синусоидального сигнала $q \sin \omega_i$ в системе установятся незатухающие колебания с амплитудой A_i и частотой ω_i , что и позволяет для решения поставленной задачи применить метод гармонической линеаризации. Дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вынужденное движение динамической системы с двумя нелинейностями с нелинейным звеном типа «квадратичное трение» с нелинейным звеном типа «сухое трение», имеет вид

$$e_2 \ddot{x}(t) + e_1 \dot{x}^2(t) \operatorname{sign} \dot{x}(t) + F \operatorname{sign} \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \omega t . \quad (1)$$

Графики нелинейности, пропорциональной квадрату первой производной приведен на рис. 1а, а график нелинейности типа «сухое трение» приведен на рис. 1б.

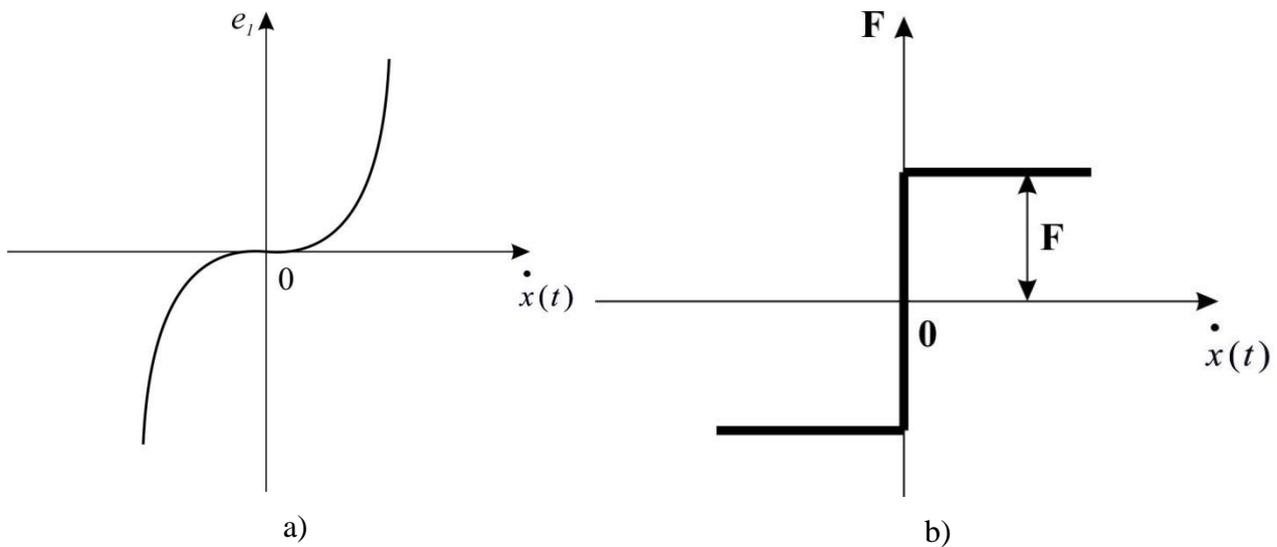


Рис.1. Графики нелинейности, пропорциональной квадрату первой производной (а), и типа «сухое трение» (б).

Неизвестные коэффициенты e_0, e_1, e_2, F дифференциального уравнения (1) должны быть определены в результате решения задачи идентификации.

В статье предложен алгоритм получения оценок неизвестных коэффициентов e_0, e_1, e_2, F дифференциального уравнения (1) по полученному экспериментальному годографу. Для определения неизвестных коэффициентов e_0, e_1, e_2, F предлагается воспользоваться методом гармонической линеаризации, когда квадратичное трение и сухое трение аппроксимируются линейным трением с соответствующими коэффициентами гармонической линеаризации [7].

Вынужденное движение с использованием метода гармонической линеаризации описывается уравнением

$$e_2 \ddot{x}(t) + E_1(\omega) \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \omega t, \quad (2)$$

где

$$E_1(\omega) = \frac{8e_1 A(\omega) \omega}{3\pi} + \frac{4F}{\pi A(\omega) \omega}; \quad (3)$$

$A(\omega)$ - амплитуда синусоидальной составляющей выхода $x(t)$ системы, имеющей частоту ω .

Введем обозначения

$$c_1 = \frac{8}{3\pi}, \quad c_2 = \frac{4F}{\pi}.$$

Тогда с учетом (3) получим

$$E_1(\omega) = e_1 c_1 A(\omega) \omega + \frac{c_2}{A(\omega) \omega}. \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что при использовании метода гармонической линеаризации частотная передаточная функция динамической системы второго порядка с квадратичным трением и сухим трением имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{e_0 + E_1(\omega)j\omega + e_2(j\omega)^2}.$$

Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ можно также записать в виде [8]

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (5)$$

Здесь $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ - вещественная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно, которые задаются соотношениями

$$P(\omega) = \frac{e_0 - e_2 \omega^2}{(e_0 - e_2 \omega^2)^2 + E_1^2(\omega) \omega^2}, \quad (6)$$

$$Q(\omega) = -\frac{E_1(\omega) \omega}{(e_0 - e_2 \omega^2)^2 + E_1^2(\omega) \omega^2}.$$

Тогда квадрат значения амплитудно-частотной характеристики динамической системы для частоты ω можно определить по формуле

$$A^2(\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega). \quad (7)$$

С учетом (4), (6) получим

$$A^2(\omega) = \frac{1}{(e_0 - e_2 \omega^2)^2 + (e_1 c_1 A(\omega) \omega + \frac{c_2}{A(\omega) \omega})^2 \omega^2}. \quad (8)$$

Разрешив уравнение (8) относительно $A^2(\omega)$, получим

$$A^2(\omega) = \frac{-((e_0 - e_2 \omega^2)^2 + 2e_1 c_1 c_2 \omega^2) + \sqrt{((e_0 - e_2 \omega^2)^2 + 2e_1 c_1 c_2 \omega^2)^2 - 4e_1^2 c_1^2 \omega^4 (c_2^2 - 1)}}{2e_1^2 c_1^2 \omega^4}. \quad (9)$$

Из соотношения (8) следует, что при $\omega = 0$ имеет место равенство

$$A(0) = \frac{\sqrt{1 - c_2^2}}{e_0},$$

а при

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}} -$$

равенство

$$A(\omega_r) = \sqrt{\frac{e_2(1-c_2)}{e_0 e_1 c_1}}.$$

Видим, что амплитуда $A(0)$ амплитудно-частотной характеристики системы имеет действительное значение лишь при условии $1 - c_2^2 > 0$.

Пример амплитудно-частотной характеристики системы приведен на рис. 2

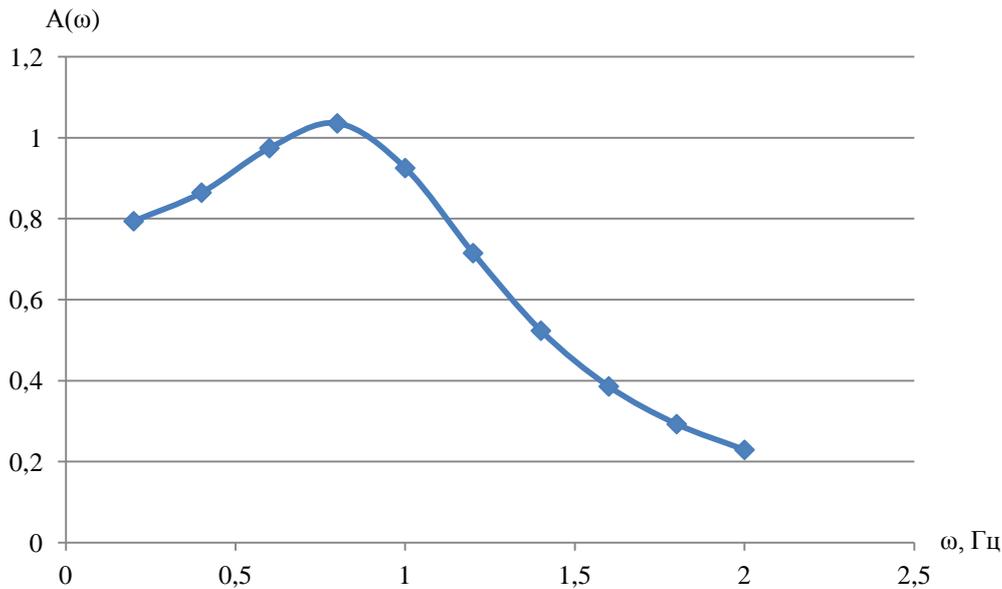


Рис. 2. Пример амплитудно-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с квадратичным трением и сухим трением с коэффициентами передаточной функции

$$e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,5.$$

Обратим внимание, что при $e_0 - e_2\omega^2 = 0$ или при $\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}$ амплитудно-частотная характеристика системы второго порядка на резонансной частоте не имеет разрыва.

С учетом (4), (6) найдем выражение для значений $\varphi(\omega)$ фазо-частотной характеристики системы [8]:

$$\operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{e_1 c_1 A(\omega)\omega + \frac{c_2}{A(\omega)\omega}}{e_0 - e_2\omega^2}. \quad (10)$$

Если учесть, что при $e_0 - e_2\omega^2 > 0$ справедливы неравенства $P(\omega) > 0$, $Q(\omega) < 0$, а при $e_0 - e_2\omega^2 < 0$ — неравенство $P(\omega) < 0$, $Q(\omega) < 0$, то из соотношения (10) получим

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{e_1 c_1 A(\omega)\omega + \frac{c_2}{A(\omega)\omega}}{e_0 - e_2\omega^2} \right), \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 > 0, \quad (11)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{e_1 c_1 A(\omega)\omega + \frac{c_2}{A(\omega)\omega}}{e_0 - e_2\omega^2} \right) - \pi, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 < 0.$$

Пример фазо-частотной характеристики системы, вычисленные по формулам (11) с учетом (9), приведён на рис.3.

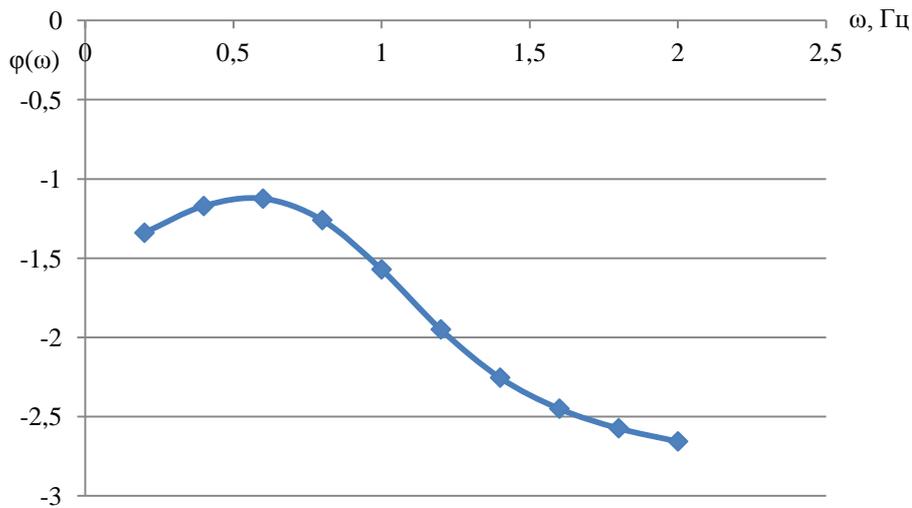


Рис. 3. Пример фазо-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с квадратичным трением и сухим трением с параметрами $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,5$.

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ может быть изображена на комплексной плоскости в виде годографа [8].

Пример годографа системы, вычисленные по формулам (6) с учетом (9), приведен на рис.4.

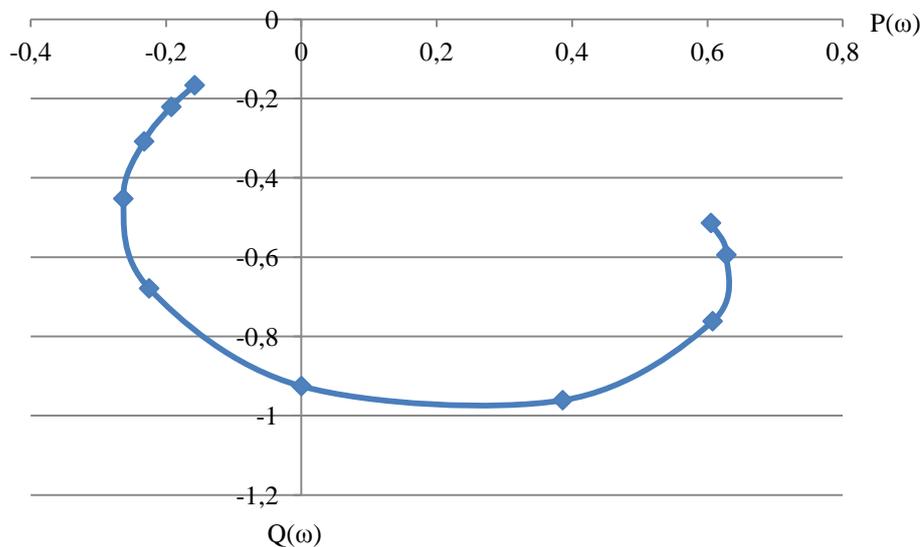


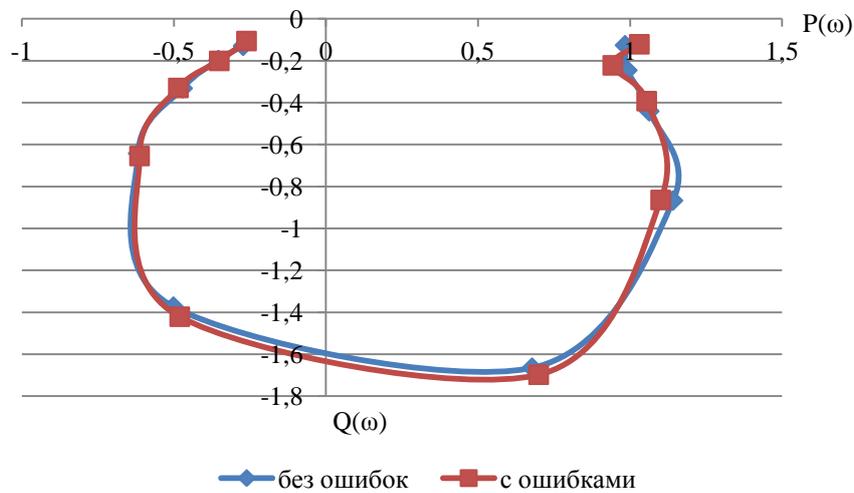
Рис. 4. Пример годографа нелинейной системы второго порядка с квадратичным трением и сухим трением с параметрами $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,5$.

3. Математическое моделирование с целью получения псевдоэкспериментальных данных

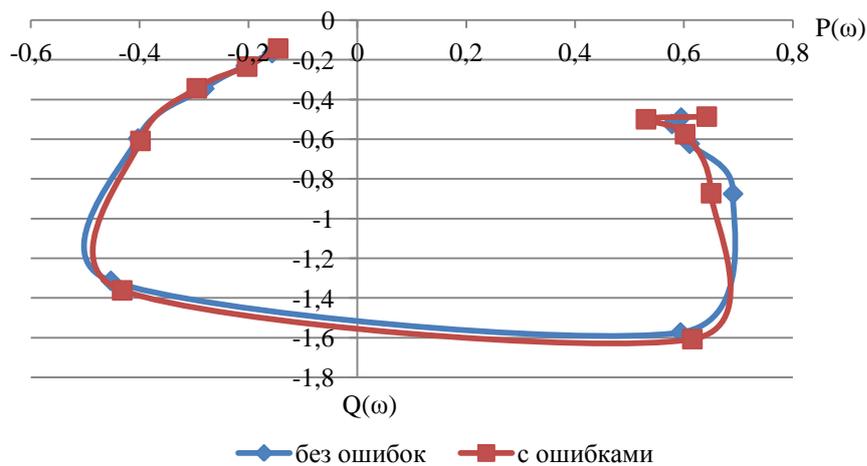
При получении частотных характеристик реальных систем в эксперименты вмешиваются помехи, в результате которых точки годографа смещаются случайным образом. Введем обозначения для определенных с погрешностями вещественных и мнимых значений отсчетов, полученных с учетом соотношений (6), (9) для значений псевдоэкспериментального годографа динамической системы для n_{exp} значений частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_{exp}}$:

$$P_1 = P(\omega_1), \dots, P_{n_{exp}} = P(\omega_{n_{exp}}), Q_1 = Q(\omega_1), \dots, Q_{n_{exp}} = Q(\omega_{n_{exp}}). \quad (12)$$

На рис. 5а и 5б показаны примеры искаженных псевдоэкспериментальных годографов нелинейного звена второго порядка с сухим и квадратичным вязким трением, при наличии случайных погрешностей в диапазоне $[-0,05, 0,05]$ для $n_{exp}=10$.



a) $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b) $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

Рис. 5. Примеры искаженных годографов нелинейной системы второго порядка с квадратичным вязким трением и сухим трением при наличии в псевдоэкспериментальных случайных погрешностей e_0, e_1, e_2, F .

Решение задачи идентификации для нелинейной системы второго порядка с сухим и квадратичным вязким трением будем искать в классе годографов, задаваемых моделью

$$W_M(j\omega) = \frac{1}{a_0 + \left(\frac{8a_1 A(\omega)\omega}{3\pi} + \frac{4G}{\pi A(\omega)\omega} \right) j + a_2(j\omega)^2} \quad (13)$$

или моделью

$$W_M(j\omega) = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta}, \quad (14)$$

где

$$\alpha = 1; \beta = 0; \gamma = a_0 - a_2\omega^2; \delta = \frac{8a_1 A(\omega)\omega^2}{3\pi} + \frac{4G}{\pi A(\omega)}. \quad (15)$$

Отклонение ΔW_i i -го отсчета $W_M(j\omega_i)$ годографа модели на частоте ω_i от i -го отсчета $W_s(j\omega_i)$ экспериментального годографа идентифицируемой системы равно

$$\Delta W_i = W_s(j\omega_i) - W_M(j\omega_i).$$

С учетом (5), (14) можно записать в виде

$$\Delta W_i = P_i + jQ_i - \frac{\alpha_i + j\beta_i}{\gamma_i + j\delta_i}, \quad (16)$$

где параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ соответствуют частоте ω_i .

Необходимо ввести приемлемый критерий, характеризующий близость двух годографов на всей совокупности экспериментальных точек, и минимизировать его по параметрам модели системы a_0, a_1, a_2, G . В качестве критерия (меры) близости можно выбрать сумму квадратов модулей расхождений ΔW_i :

$$I = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta W_i|^2. \quad (17)$$

Минимизация меры I приводит к нелинейной системе уравнений для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2, G модели. Приведём нелинейную систему уравнений к линейной форме путём умножения соотношения (16) на отличный от нуля комплексный множитель $(\gamma_i + j\delta_i)$ [9]:

$$\Delta H_i = \Delta W_i(\gamma_i + j\delta_i). \quad (18)$$

Тогда с учетом (16), (18) для ΔH_i и для $|\Delta H_i|^2$ получим

$$\Delta H_i = P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i + j(P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i), \quad (19)$$

$$|\Delta H_i|^2 = (P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2.$$

В качестве меры близости годографов вместо меры (17) примем меру J , равную сумме квадратов модулей $|\Delta H_i|^2$ (19):

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta H_i|^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2]. \quad (20)$$

Мера близости J экспериментально полученного годографа системы и годографа модели системы на всей совокупности экспериментальных точек задается формулой (20), которая после некоторого преобразования принимает вид

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2)\gamma_i^2 + (P_i^2 + Q_i^2)\delta_i^2 - 2P_i\gamma_i\alpha_i + 2Q_i\delta_i\alpha_i - 2P_i\delta_i\beta_i - 2Q_i\gamma_i\beta_i + \alpha_i^2 + \beta_i^2] . \quad (21)$$

Мера (21) является функцией параметров a_0, a_1, a_2, G частотной передаточной функции модели (13). Для минимизации меры J приравняем нулю частные производные от J по этим параметрам:

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial G} = 0. \quad (22)$$

Для рассматриваемой нелинейной системы второго порядка система уравнений (22) с учетом (15) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i\omega_i^2, \\ a_1 \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)A^2(\omega_i)\omega_i^4 + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 &= - \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i A(\omega_i)\omega_i^2, \\ a_1 \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \frac{1}{A^2(\omega_i)} &= - \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \frac{1}{A(\omega_i)} \end{aligned}$$

или с учетом (7) – вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i\omega_i^2, \quad (23) \\ a_1 \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)^2 \omega_i^4 + G \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 &= - \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i^2, \\ a_1 \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 + G \frac{4n_{\text{exp}}}{\pi} &= - \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \frac{1}{\sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)}}. \end{aligned}$$

Систему уравнений (23) приведем к матричному виду

$$\Psi \bar{a} = \bar{u}, \quad (24)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_1 \\ G \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Ненулевые элементы матрицы Ψ и элементы вектора \bar{u} в (25) имеют значения

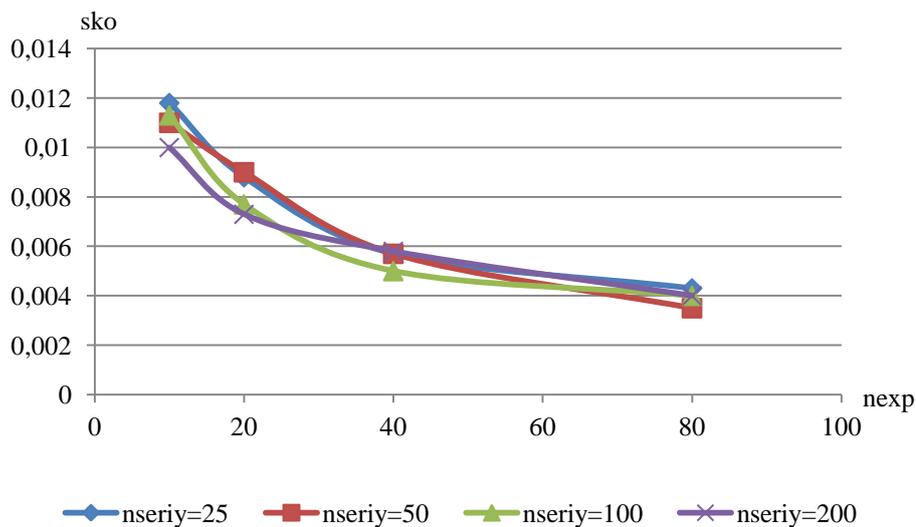
$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2), \quad \Psi_{12} = -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \\ \Psi_{21} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \quad \Psi_{22} = -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4, \\ \Psi_{33} &= \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)^2 \omega_i^4, \quad \Psi_{34} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \\ \Psi_{43} &= \frac{8}{3\pi} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \quad \Psi_{44} = \frac{4n_{\text{exp}}}{\pi}, \\ u_1 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, \quad u_2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i \omega_i^2, \quad u_3 = -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)} \omega_i^2, \quad u_4 = -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \frac{1}{\sqrt{(P_i^2 + Q_i^2)}}. \end{aligned}$$

Решая матричное уравнение (24), получим

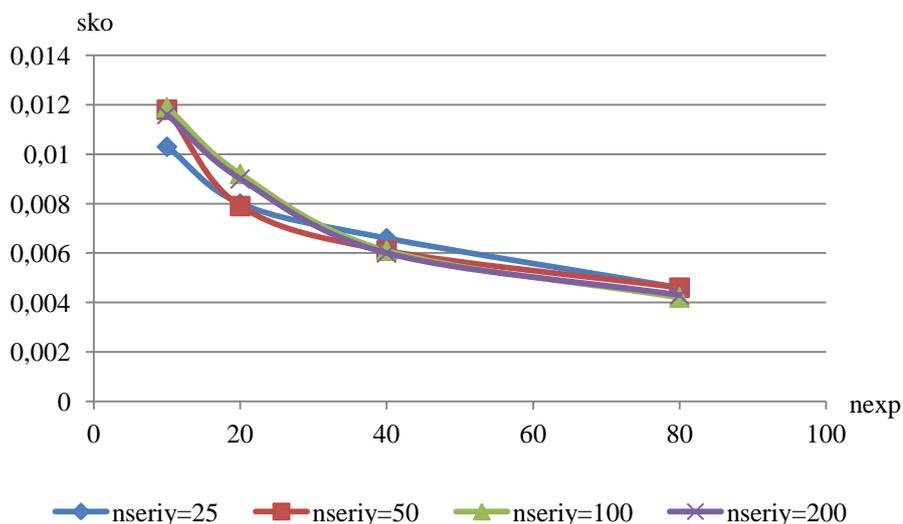
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\Psi_{22}u_1 - \Psi_{12}u_2}{\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}\Psi_{21}}, & a_2 &= \frac{\Psi_{11}u_2 - \Psi_{21}u_1}{\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}\Psi_{21}}, \\ a_1 &= \frac{\Psi_{44}u_3 - \Psi_{34}u_4}{\Psi_{33}\Psi_{44} - \Psi_{34}\Psi_{43}}, & G &= \frac{\Psi_{33}u_4 - \Psi_{43}u_3}{\Psi_{33}\Psi_{44} - \Psi_{34}\Psi_{43}}. \end{aligned}$$

Были проведены иллюстративные вычислительные эксперименты по оценке погрешности, с которой предложенный алгоритм определяет значения параметров частотной передаточной функции нелинейной системы второго порядка с сухим и вязким квадратичным трением. В экспериментах заданы конкретные значения параметров $e_0 = 1$, $e_1 = 0,5$, $e_2 = 1$, $F = 0,1$.

Погрешности измерения значений P_i, Q_i моделировались с помощью генератора случайных чисел с равномерным законом плотности распределения вероятностей в диапазоне $[-0,05, 0,05]$. Количество отсчетов в годографе системы (т.е. количество экспериментов) $n_{\text{exp}} = 10, 20, 40, 80$. Для каждого конкретного количества экспериментов n_{exp} проводилось n_{seriy} серий этих экспериментов $n_{\text{seriy}} = 25, 50, 100, 200$. Рассматривался диапазон частот $[0, \omega_r]$, где $\omega_r = 1$ Гц. В сериях экспериментов вычислялись погрешности $erre_0 = e_0 - a_0$, $erre_1 = e_1 - a_1$, $erre_2 = e_2 - a_2$, $errF = F - G$ определения параметров e_0, e_1, e_2, F и среднеквадратические отклонения sko для случайных величин $erre_0, erre_1, erre_2, errF$, а также строились гистограммы для этих величин.



a) $erre_0; e_0$

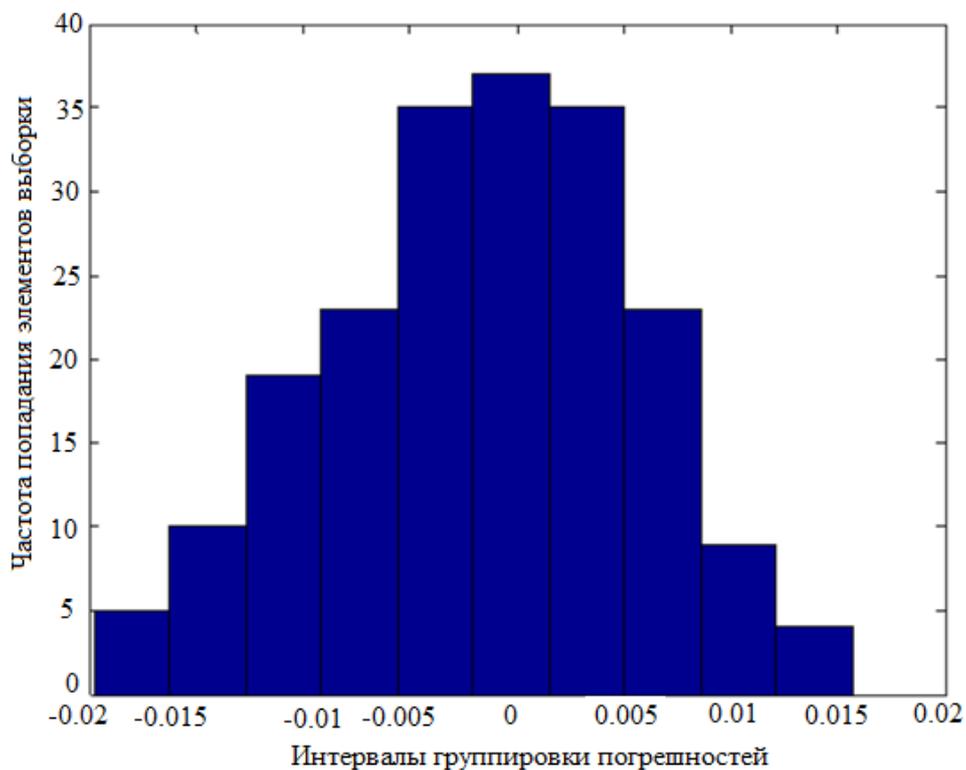


b) $erre_1; e_1$

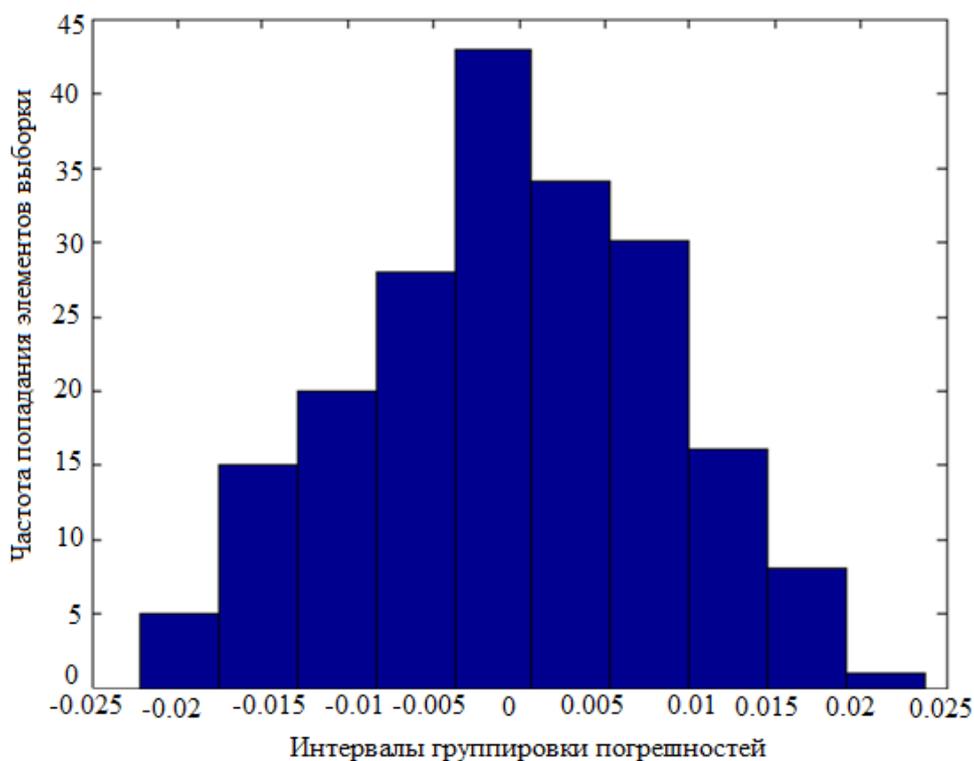
Рис. 6. Зависимости среднеквадратического отклонения s_{ko} погрешностей $erre_0, erre_1$ определения коэффициентов e_0, e_1 от количества отсчетов n_{exp} годографа системы при погрешности измерений в диапазоне $[-0,05, 0,05]$ и числе серий $n_{seriy}=25, 50, 100, 200$.

Из рис. 6а, 6б видно, что в рассматриваемых случаях величины погрешностей определения коэффициентов стабилизируются при количестве отсчетов годографа от 20 до 40.

На рис. 7а, 7б в качестве примеров показаны гистограммы погрешностей $erre_0, erre_1$ определения коэффициентов e_0, e_1 , соответственно.



a) $erre_0$; e_0 ; $sko=0,0073$



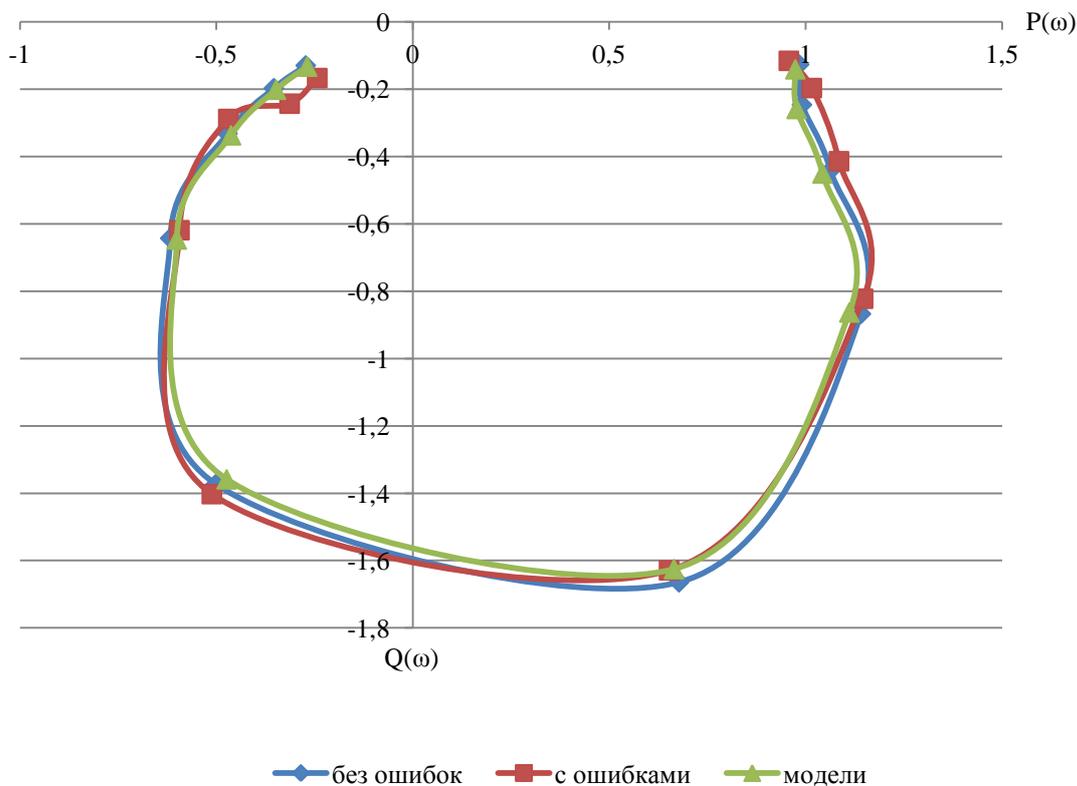
b) $erre_1$; e_1 ; $sko=0,0090$

Рис. 7. Гистограммы погрешностей $erre_0$, $erre_1$ определения коэффициентов e_0 , e_1 с соответствующими среднеквадратическими отклонениями sko ($nexp=20$, диапазон погрешности измерений $[-0,05, 0,05]$, количество серий $nseriy=200$).

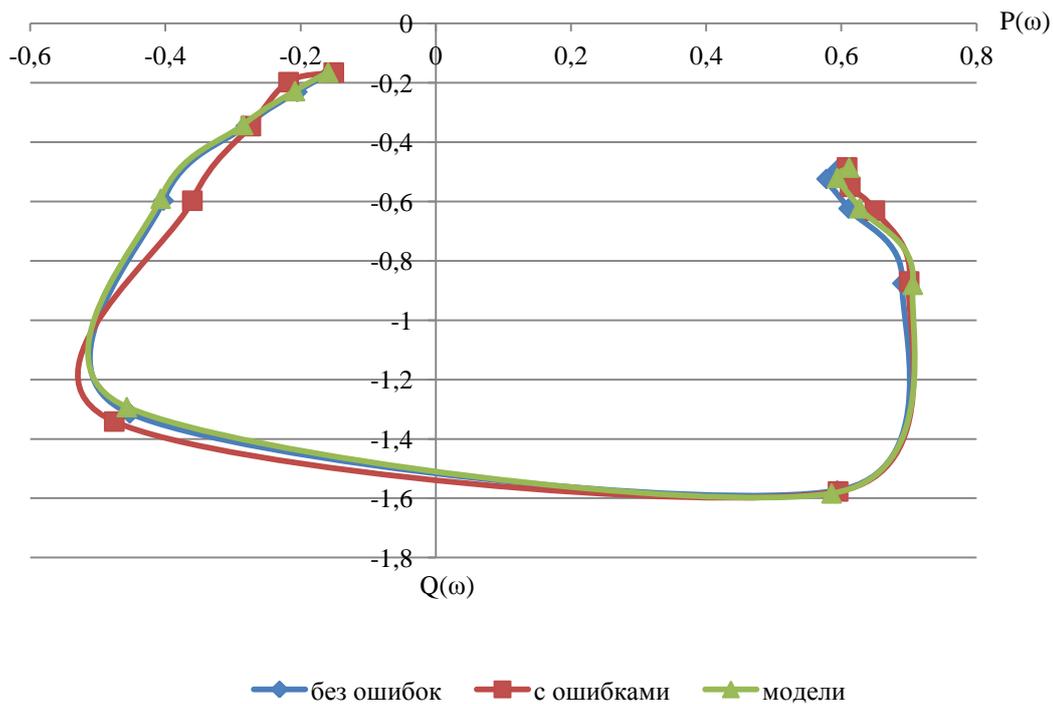
Вычислительный эксперимент показал, что погрешности имеют близкий к нормальному закон распределения и среднеквадратическое отклонение равно $sko=0,0073$. Это значит, что ~68% погрешностей находятся в диапазоне $\pm sko=0,0073$, а 99% погрешностей – в диапазоне $\pm 3sko=\pm 0,0219$. Таким образом, погрешность определения значения коэффициента $e_0=1$ в иллюстративном вычислительном эксперименте значительно меньше диапазона погрешности измерений отсчетов годографа $[-0,05, 0,05]$.

Аналогичные результаты были получены для погрешностей определения коэффициентов e_1, e_2, F . Например, для погрешности $erre_1$ определения коэффициента e_1 ($nexp=20$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,05, 0,05]$, количество серий $nseriy=200$) среднеквадратическое отклонение $sko=0,0090$.

На рис. 8а, 8б для каждого из двух вариантов значений параметров e_0, e_1, e_2, F соответственно приведены три годографа: годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа равна нулю; годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа не равна нулю; годограф найденной модели системы.



а) $e_0 = 1; e_1 = 0,5; e_2 = 1; F = 0,1$



b) $e_0 = 1; e_1 = 0,2; e_2 = 1; F = 0,5$

Рис. 8. Годограф системы при нулевой ошибке измерения отсчетов, годограф системы при ненулевых ошибках измерения отсчетов в диапазоне $[-0,05, 0,05]$; годограф найденной модели системы (количество экспериментов $n_{exp}=10$).

Выводы

В статье предложен алгоритм идентификации нелинейной динамической системы, имеющей в своём составе две существенных нелинейности по экспериментально полученным отсчетам частотного годографа. В качестве меры близости годографов системы и модели системы выбрана сумма квадратов модулей модификации отклонений отсчетов годографа модели системы от соответствующих экспериментально полученных отсчетов системы.

В иллюстративном вычислительном эксперименте показано, что для нелинейной системы второго порядка можно ограничиться количеством отсчетов годографа в диапазоне от 20 до 40.

Иллюстративный вычислительный эксперимент также показал, что при использовании предложенного алгоритма идентификации нелинейной динамической системы по частотному годографу погрешность определения значений коэффициентов частотной передаточной функции системы второго порядка с сухим и квадратичным вязким трением значительно меньше диапазона погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы. Важным результатом является также положительный ответ на вопрос о возможности селекции нелинейностей при их одновременном присутствии в дифференциальных уравнениях исследуемых систем.

Список литературы

1. Жданов А.И., Кацюба О.А. Идентификация методом наименьших квадратов параметров авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29-38.
2. Болквядзе Г.Р. Класс моделей Гаммерштейна в задачах идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 42-55.
3. Павленко С.В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерры // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2010. Т. 6, № 4 (48). С. 65-70.
4. Райбман Н.С., Капитоненко В.В., Овсепян Ф.А., Варлаки П.М. Дисперсионная идентификация // под ред. Н.С. Райбмана. М.: Наука, 1981. 336 с.
5. Павленко С.В. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов // Электронное моделирование. 2010. Т. 32, № 3. С. 3-18.
6. Райбман Н.С. Методы нелинейной и минимаксной идентификации // Современные методы идентификации систем: сб. / под ред. П. Эйкхоффа; пер. с англ. Я.З. Цыпкина. М.: Мир, 1983. С. 177-277.
7. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: ГИФМЛ, 1960. 790 с.
8. Основы автоматического управления / под ред. В.С. Пугачева. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 680.
9. Боевкин В.И., Павлов Ю.Н. Регрессионный анализ в прикладной задаче идентификации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. (Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана; № 546).
10. Боевкин В.И., Недашковский В.М., Павлов Ю.Н. Идентификация линейных динамических звеньев по частотному годографу // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 9. С. 349-360. DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917)
11. Павлов Ю.Н., Недашковский В.М., Тихомирова Е.А., Шавырин И.Б. Метод гармонической линеаризации в задаче идентификации нелинейных динамических систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 4. С. 382-397. DOI: [10.7463/0414.0704613](https://doi.org/10.7463/0414.0704613)

Identification of Nonlinear Dynamic Systems Possessing Some Non-linearities

Y.N. Pavlov¹, V.M. Nedashkovskii^{1,*},

[*vmniu3@bmstu.ru](mailto:vmniu3@bmstu.ru)

E.A. Tihomirova¹

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: harmonic linearization, identification, nonlinear dynamical systems, quadratic friction, dry friction, frequency hodograph

The subject of this work is the problem of identification of nonlinear dynamic systems based on the experimental data obtained by applying test signals to the system. The goal is to determinate coefficients of differential equations of systems by experimental frequency hodographs and separate similar, but different, in essence, forces: dissipative forces with the square of the first derivative in the motion equations and dissipative force from the action of dry friction. There was a proposal to use the harmonic linearization method to approximate each of the non-linearity of "quadratic friction" and "dry friction" by linear friction with the appropriate harmonic linearization coefficient.

Assume that a frequency transfer function of the identified system has a known form. Assume as well that there are disturbances while obtaining frequency characteristics of the real-world system. As a result, the points of experimentally obtained hodograph move randomly. Searching for solution of the identification problem was in the hodograph class, specified by the system model, which has the form of the frequency transfer function the same as the form of the frequency transfer function of the system identified. Minimizing a proximity criterion (measure) of the experimentally obtained system hodograph and the system hodograph model for all the experimental points described and previously published by one of the authors allowed searching for the unknown coefficients of the frequency transfer function of the system model. Solution of nonlinear dynamic system identification in frequency hodograph was reduced to solving the system of equations, which is linear relative to the unknown parameters of the frequency transfer function of the system model. The paper shows the possibility to identify a nonlinear dynamic system with multiple nonlinearities, obtained on the experimental samples of the frequency system hodograph. The proposed algorithm allows to select the nonlinearity of the type "quadratic friction" and "dry friction", i.e. also in the case where the nonlinearity is dependent on the same dynamic parameter, in particular, on the derivative of the system output value. For the dynamic system of the second-order with nonlinearity of the type "quadratic friction" in combination with nonlinearity of the type "dry friction", was developed a software to simulate a process for

providing pseudo experimental data containing random accuracy and to determine the parameters of the system. A conducted computational experiment enabled an estimate of the accuracy with which the proposed algorithm determines the parameters of the system. The illustrative numerical simulation has demonstrated that with using the proposed nonlinear dynamic system identification algorithm in frequency hodograph the accuracy of determining the coefficient values of the frequency transfer function of the second order system with a dry and quadratic friction is comparable with the range of measurement accuracy of experimental samples of this system hodograph. Well-known publications do not mention this identification method of the nonlinear dynamic systems. The nonlinear dynamical systems identification method the article describes can find application when determining parameters of various kinds of actuators. The using method of harmonic linearization and identification of dynamical systems by hodographs is promising for solving the problem of the identification of nonlinear systems with different types of nonlinearities.

References

1. Zhdanov A.I., Katsiuba O.A. Identification by the method of least squares of autoregression equation parameters with additive measurement errors. *Avtomatika i telemekhanika*, 1982, no. 2, pp. 29-38. (English translation of journal: *Automation and Remote Control*, 1982, vol. 43, no. 2, pp. 158-166.).
2. Bolkvadze G.R. Hammerstein Models for Identification of Stochastic Systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 2003, no. 1, pp. 42-55. (English translation of journal: *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, iss. 1, pp. 37-48. DOI: [10.1023/A:1021820307806](https://doi.org/10.1023/A:1021820307806)).
3. Pavlenko S.V. Application of wavelet filtering in the process of identification of nonlinear systems in the form of kernels of Volterra. *Vostochno-evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii = Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2010, vol. 6, no. 4 (48), pp. 65-70. (in Russian).
4. Raibman N.S., Kapitonenko V.V., Ovsepian F.A., Varlaki P.M. *Dispersionnaia identifikatsiia* [Dispersion identification]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 336 p. (in Russian).
5. Pavlenko S.V. Identification of Nonlinear Dynamic Systems in the Form of the Volterra Kernels on the Basis of the Data of Pulse Response Measurements. *Elektronnoe modelirovanie*, 2010, vol. 32, no. 3, pp. 3-18. (in Russian).
6. Rajbman N.S. Extensions to nonlinear and minimax approaches. In: Eykhoff P., ed. *Trends and Progress in System Identification*. Oxford, Pergamon Press, 1981, pp. 185-237. (Russ ed.: Rajbman N.S. Metody nelineinoi i minimaksnoi identifikatsii. In: Eykhoff P., ed. *Sovremennye metody identifikatsii sistem: sb.* Moscow, Mir Publ., 1983, pp. 177-277.).
7. Popov E.P., Pal'tov I.P. *Priblizhennyye metody issledovaniya nelineynykh avtomaticheskikh system* [Approximate methods of study of nonlinear automatic systems]. Moscow, GIFML Publ., 1960. 790 p. (in Russian).

8. Pugachev V.S., ed. *Osnovy avtomaticheskogo upravleniya* [Basics of automatic control]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 680 p. (in Russian).
9. Boevkin V.I., Pavlov Yu.N. *Regressionnyy analiz v prikladnoy zadache identifikatsii* [Regression analysis in applied problem of identification]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1990. (*Trudy MGTU im. N. E. Baumana № 546* [Proceedings of the Bauman MSTU; no. 546]). (in Russian).
10. Boevkin V.I., Nedashkovskii V.M., Pavlov Iu.N. Identification of linear dynamic elements using a frequency locus. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9, pp. 349-360. DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917) (in Russian).
11. Pavlov Yu.N., Nedashkovskii V.M., Tikhomirova E.A., Shavyrin I.B. Harmonic linearization method in the identification of nonlinear dynamical systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 4, pp. 382-397. DOI: [10.7463/0414.0704613](https://doi.org/10.7463/0414.0704613) (in Russian).