

10, октябрь 2010

УДК 372.862

Макет и 3D-модель к стереометрической задаче

Тюрин И.Ю., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Проектирование и технология производства электронной аппаратуры»

Научный руководитель: Юренкова Л.Р., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Кафедра «Инженерная графика»
julia-nebova@mail.ru

В учебнике по стереометрии для 11 класса привлекла внимание задача следующего содержания [1]:

«Даны две скрещивающиеся прямые,
угол между которыми равен 90° .

Найти множество середин всех отрезков
данной длины d , концы которых лежат
на этих прямых»

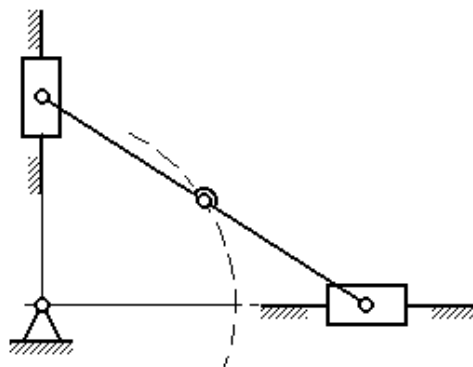


Рис. 1. Синусный шарнирный механизм

Анализ условия показал, что речь идет о синусном шарнирном механизме (рис.1). На рис. 2 приведено исследование механизма в ортогональных проекциях.

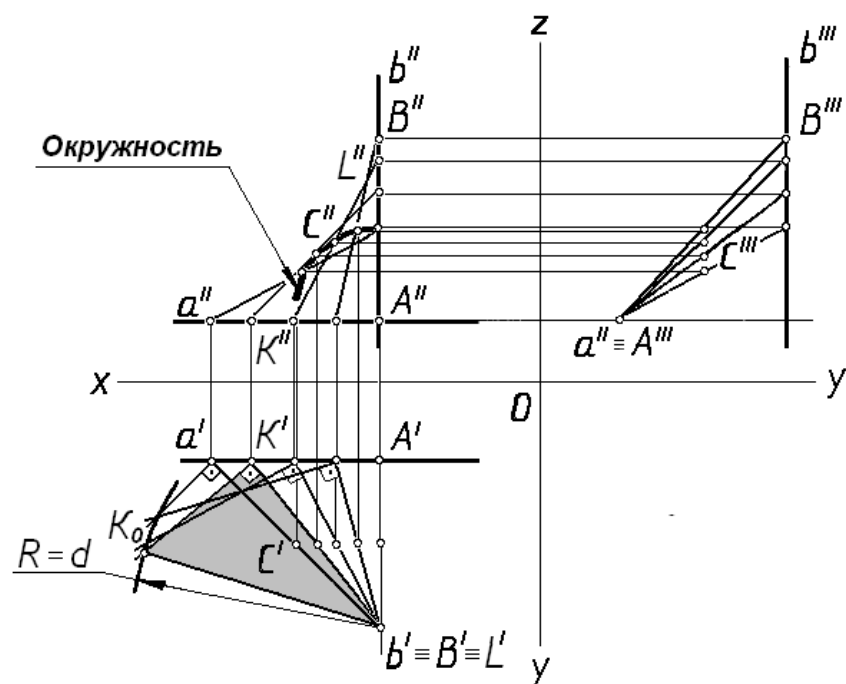


Рис. 2. Исследование механизма в ортогональных проекциях

Перенесем начало координат в точку B' , тогда середина отрезка d – точка C будет иметь координаты (x, y, z) , причем $y = A'B'/2 = h/2$, где h – расстояние между данными скрещивающимися прямыми.

Это следует из теоремы: «расстояние между скрещивающимися прямыми равняется расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскости, перпендикулярной к одной из них». Рассмотрим одно из положений движущегося отрезка – KL . Для определения длины этого отрезка по его ортогональным проекциям построен прямоугольный треугольник $K'L'K_0$ по следующему правилу: «для определения длины отрезка прямой по его проекциям следует построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является, например, горизонтальная проекция отрезка, а другим – абсолютная величина алгебраической разности аппликат концов отрезка. Тогда гипотенуза равна длине отрезка». По теореме Пифагора $KL^2 = K'L'^2 + K'K_0^2$. Квадрат длины катета $K'L'$ равен $(4x^2 + h^2)$, $K'K_0^2 = 4z^2$, а $KL^2 = d^2$. Получим: $d^2 = 4x^2 + h^2 + 4z^2$, а после преобразования: $x^2 + z^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2})^2$. Последнее выражение соответствует

уравнению окружности радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$, множество точек которой соответствует серединам всех отрезков данной длины d , концы которых лежат на данных скрещивающихся прямых. Что требовалось доказать.

Аналитическое исследование синусного рычажного механизма (рис. 3)

1. Пусть начало координат находится в точке O – середине отрезка AB (длина отрезка AB – это расстояния между скрещивающимися прямыми a и b).

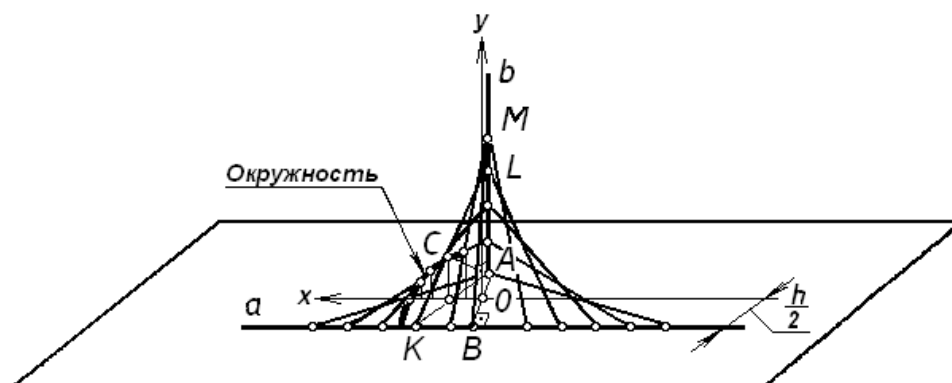


Рис. 3. Исследование механизма

2. В каждом положении отрезка, имеющего длину d и перемещающегося по прямым a и b , его середина – точка C имеет координаты x и y . Рассмотрим одно из положений точки C , тогда из прямоугольного треугольника AKL : $x^2 + y^2 = CO^2$ (рис. 4).

3. Далее из прямоугольного треугольника ACO : $AC^2 = CC_1^2 + AO_1^2 = y^2 + x^2 + (h/2)^2$.

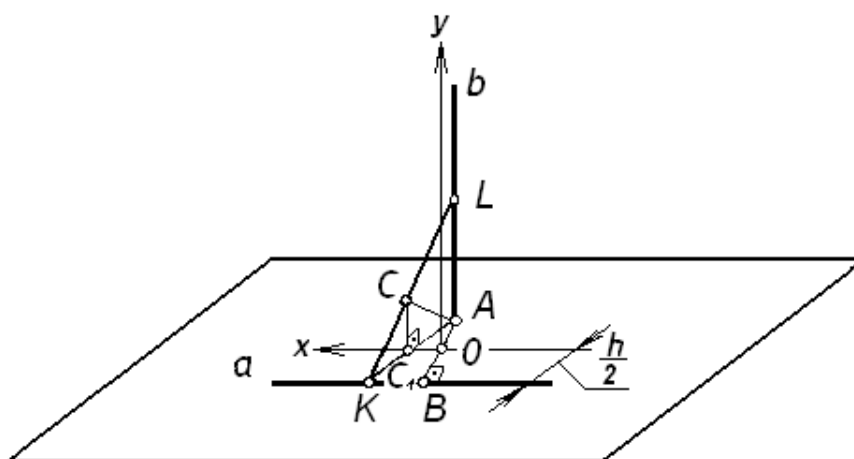


Рис. 4. Одно из положений точки C

Так как середина гипотенузы прямоугольного треугольника есть центр описанной в него окружности, то ее радиус равен половине гипотенузы, то есть $R^2 = AC^2 = (d/2)^2$ или. $(d/2)^2 = x^2 + y^2 + (h/2)^2$. После преобразования окончательно, получим:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}\right)^2.$$

Это выражение представляет собой уравнение окружности, и, значит, точка C – середина отрезка, перемещающегося по двум скрещивающимся прямым, описывает в пространстве дугу окружности. Что и требовалось доказать.

Для лучшего понимания этой задачи выполнены макет (рис.5) и 3D–модель в программе Autodesk Inventor (рис. 6) .

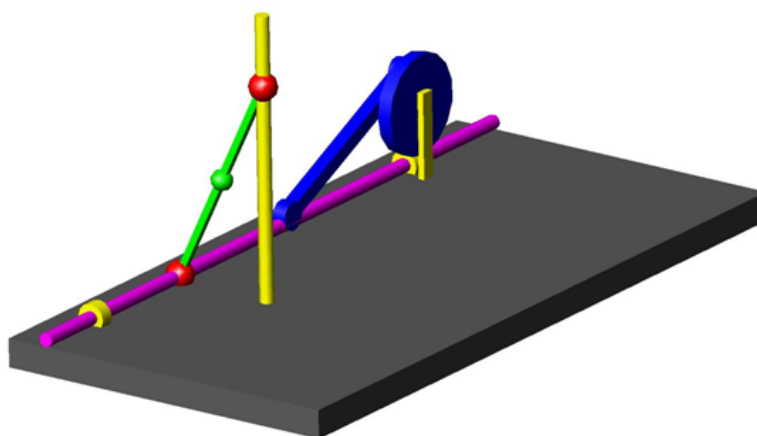


Рис. 5. Макет

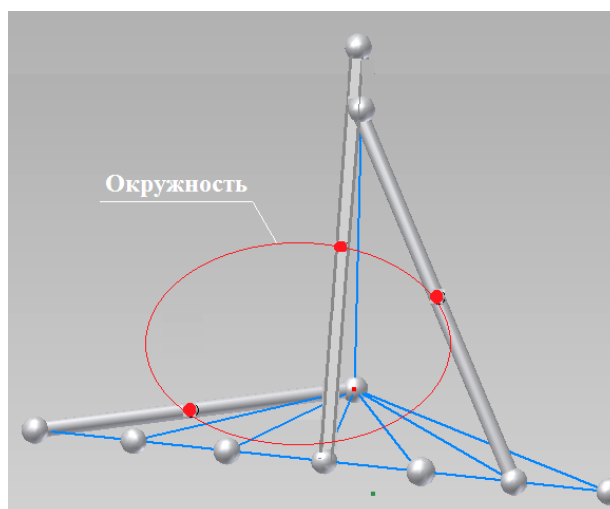


Рис. 6. 3D модель

Список литературы

1. Александров А.Д., Вернер А.Л, Рыжик В.И. Геометрия: учебник для 10-11 классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2000. 238 с.
2. Федоренков А. П., Полубинская Л. Г. Autodesk Inventor. Шаг за Шагом. М.: изд-во: ЭКСМО, 2008.
3. Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник. М: ИНФРА-М, 2007. 285 с.
4. Трембли Том Autodesk Inventor 2013 и Inventor LT 2013: Autodesk Official Training Guide. М.: ДМК Пресс 2013. 344 с.