электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

 # 11, ноябрь 2015

УДК 532.51+536.24

Математическое моделирование локальных процессов фильтрации в пористо-сетчатых материалах

***Богданов И.О.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

Научный руководитель: Димитриенко Ю.И., д. ф.-м. н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»
bauman@bmstu.ru

Введение

В рамках данной работы рассматриваются процессы фильтрации в пористых материалах сетчатой структуры. Данные материалы применяются для изготовления различных фильтроэлементов (фильтров) для очистки рабочих сред от механических примесей различной природы. В частности в ракетно-космической отрасли данные материалы используются для изготовления так называемых сетчатых разделителей (СР), применяемых в конструкции капиллярных заборных устройств для отбора топлива из баков летательных аппаратов. Основной целью СР является механическое разделение жидкой (топливо) и газовой фаз для предотвращения прорыва газа наддува в топливную магистраль и обеспечения многократного запуска жидкостного ракетного двигателя. При конструировании устройств данного типа возникает необходимость в специализированных математических моделях, которые могли бы описывать как локальные процессы переноса в отдельно взятой поре, так и процессы в пористой системе в целом.

Геометрическая модель расчетной области

На практике микроструктура пористо-сетчатых систем, как правило, обладает сложной трехмерной конфигурацией. По этой причине примем следующие допущения:

1. Пористо-сетчатая среда обладает свойством периодичности (см. рис. 1).

2. В пористой системе отсутствуют тупиковые поры.

3. Ячейка периодичности (ЯП), приведенная на рис. 2, а, представляет собой область между волокнами (пору), заполненную газом, и сами волокна.

4. ЯП имеют геометрическую и физическую симметрию относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат, что дает возможность рассматривать далее 1/8 ЯП, пора которой приведена на рис. 2, б.

Всю область, занятую порами, будем обозначать V, а ее границу (поверхность раздела с твердым телом) – Σ_s. Введем также следующие обозначения: V_ξ – ячейка периодичности, $V_{\xi p}$ – область, занятая порой, $\Sigma_{\xi sp}$ – граница поры с твердым телом.

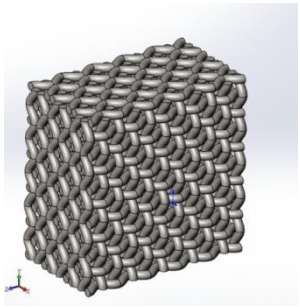

Рис. 1. Трехмерная модель анизотропной пористо-сетчатой структуры

а) б)

Рис. 2. Геометрическая модель ячейки периодичности: а) вид сверху;
б) трехмерная модель поры 1/8 ячейки периодичности

Система уравнений Навье-Стокса для изотермического движения линейно-вязкого газа

Движение газа в пористо-сетчатой структуре описывается системой уравнений Навье-Стокса [4]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \right) = 0, \\ &\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T} \right) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность, $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{T}$ – тензор напряжений, $\otimes$ – тензорное произведение. Примем следующие допущения:

1. Поры заполнены совершенным газом.
2. Газ является изотропной линейно-вязкой средой.
3. Движение газа является изотермическим и баротропным.
4. Плотность массовых сил равна нулю.
5. Газ является объемно невязким, т.е. коэффициент объемной вязкости [3] равен нулю:

$$\varsigma = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \tag{2}$$

где λ, μ – коэффициенты вязкости.

Дополним систему (1) определяющими соотношениями. В МСС показывается [4], что для изотропной линейно-вязкой среды тензор напряжений имеет вид

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mathbf{T}_v\left(\mathbf{D}\right), \tag{3}$$

где p – давление; $\mathbf{T}_v\left(\mathbf{D}\right) = \lambda\left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}$ – тензор вязких напряжений; λ, μ – коэффициенты вязкости; $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T\right)$ – тензор скоростей деформации.

В систему (1) также необходимо включить уравнение состояния. Для случая газа используется уравнение состояния Менделеева-Клапейрона

$$p = \rho R \theta_0, \tag{4}$$

где R – газовая постоянная; $\theta_0 = const$ – температура.

На поверхностях раздела «твердое тело – газ» Σ ставится граничное условие прилипания

$$\mathbf{v}\big|_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

В начальный момент времени $t = t_0$ считаются заданным давление

$$p\big|_{t=t_0} = p_0. \tag{6}$$

Запишем уравнения в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные функции:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\hat{\rho}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\hat{p}}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{\hat{v}}, \tag{7}$$

где $\hat{\rho}$ – характерная плотность, $\hat{p}$ – характерное давление, $\hat{v}$ – модуль вектора характерной скорости. Введем также характерный размер $\hat{L}$ всей области среды. Это дает возможность определить характерное время $\hat{t} = \dfrac{\hat{L}}{\hat{v}}$. Тогда безразмерное время определим следующим образом:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\hat{t}}. \tag{8}$$

Тогда с учетом соотношений (2) – (8) получаем искомую постановку задачи изотермического течения линейно-вязкого сжимаемого газа в пористой среде (символ ~ далее опускаем):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v_i \right) = 0, \\ \dfrac{1}{\mathrm{Eu}} \left(\dfrac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla_j \left(\rho v_i v_j \right) \right) = -\nabla_i p + \dfrac{1}{\mathrm{EuRe}} \left(\nabla_j \nabla_j v_i + \dfrac{1}{3} \nabla_i \nabla_j v_j \right), \\ p = \mathrm{A}\, \rho, \\ v_i\big|_{\Sigma} = 0, \quad p\big|_{t=t_0} = p_0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathrm{A} = R\hat{\rho}\theta_0 / \hat{p}$ – безразмерная константа; $\mathrm{Eu} = \hat{p} / \hat{\rho}\hat{v}^2$ – число Эйлера; $\mathrm{Re} = \hat{\rho}\hat{v}\hat{L} / \mu$ – число Рейнольдса.

Применение метода асимптотического осреднения (МАО) для постановки задачи на ячейке периодичности

Применение метода асимптотического осреднения для системы уравнений Навье-Стокса рассмотрено, например, в работах [1], [2], [7]. В нашем случае суть метода состоит в следующем. Пусть $\hat{l}$ – линейный размер ячейки периодичности V_ξ среды. В рамках

МАО вводится малый параметр $\kappa = \hat{l}/\hat{L} << 1$ и два типа безразмерных координат: глобальные $\tilde{x}_i = x_i/\hat{L}$ и локальные $\xi_i = x_i/\hat{l} = \tilde{x}_i/\kappa$. В этом случае все функции, описывающие течение газа в порах, можно считать квазипериодическими, а дифференцирование этих функций осуществлять с помощью следующего правила:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}_i} \to \frac{1}{\kappa}\Theta_{/i} + \Theta_{,i} \tag{10}$$

где $\Theta_{,i} = \partial\Theta/\partial\tilde{x}_i$ и $\Theta_{/i} = \partial\Theta/\partial\xi_i$. Кроме того, вводится операция осреднения функций по области $V_{\xi p}$:

$$\langle\Theta\rangle = \frac{1}{\varphi_p}\int\limits_{V_{\xi p}} \Theta dV,$$

где $\varphi_p = \int\limits_{V_{\xi p}} dV$ – пористость среды. Тогда, осредняя функции p, ρ, v_i, получим

$$\langle\rho v_i\rangle = \overline{\rho v_i}; \quad \langle\rho\rangle = \overline{\rho}; \quad \langle p\rangle = \overline{p}. \tag{11}$$

где $\overline{p}$, $\overline{\rho}$, $\overline{v}_i$ – средние значения функций. Соотношения (11) следует понимать, как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в $V_{\xi p}$, либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Введем соотношения между безразмерными параметрами κ, Eu и Re:

$$\mathrm{Eu}\kappa^k = \mathrm{Eu}^0 = \mathrm{O}(1), \ \mathrm{Re}\kappa^n = \mathrm{Re}^0 = \mathrm{O}(1), \tag{12}$$

где $k, n \in \mathbb{Z}$ – некоторые целые числа, которые соответствуют различным режимам течения газа. С учетом (10) и (12) система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} \rho_t + \dfrac{1}{\kappa}\left(\rho v_i\right)_{/i} + \left(\rho v_i\right)_{,i} = 0, \\ \dfrac{\kappa^k}{\mathrm{Eu}^0}\left(\left(\rho v_i\right)_t + \dfrac{1}{\kappa}\left(\rho v_i v_j\right)_{/j} + \left(\rho v_i v_j\right)_{,j}\right) = \\ = -\dfrac{1}{\kappa}p_{/i} - p_{,i} + \dfrac{\kappa^{k+n}}{\mathrm{Eu}^0\,\mathrm{Re}^0}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\kappa^2}v_{j/ij} + \dfrac{1}{\kappa}\left(v_{j/j,i} + v_{j/i,j}\right) + v_{j,ij}\right) + \left(\dfrac{1}{\kappa^2}v_{i/jj} + \dfrac{2}{\kappa}v_{i/j,j} + v_{i,jj}\right)\right], \\ p = \mathrm{A}\,\rho, \\ v_i\big|_{\Sigma} = 0, \quad p\big|_{t=t_0} = p_0, \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{13}$$

В соответствии с общей концепцией МАО решение задачи (13) ищется в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра κ:

$$\begin{aligned} v_i(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) &= v_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \kappa v_i^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \mathrm{O}(\kappa^2), \\ \rho(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) &= \rho^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \kappa\rho^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \mathrm{O}(\kappa^2), \\ p(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) &= p^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \kappa p^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) + \mathrm{O}(\kappa^2). \end{aligned} \qquad (14)$$

После подстановки (14) в систему (13) и группировки слагаемых при одинаковых степенях параметра κ можно показать [5, 6], что возможно семь вариантов значений целочисленных параметров k и n:

$$\begin{aligned} &k=0, \quad n=1; \quad k=0, \quad n=2; \\ &k=1, \quad n=0; \quad k=1, \quad n=1; \quad k=1, \quad n=2; \\ &k=2, \quad n=0; \quad k=2, \quad n=1; \end{aligned} \qquad (15)$$

Другие сочетания значений чисел k и n приводят к повтору уравнений для одного из уже перечисленных сочетаний значений чисел k и n. Рассмотрим случай $k=2$ и $n=0$, т.е. $\mathrm{Eu} \gg \mathrm{O}(1)$, $\mathrm{Re} = \mathrm{O}(1)$. Тогда давление $p^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi}) = \bar{p}(\tilde{\mathbf{x}})$ и плотность $\rho^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}},\boldsymbol{\xi},t) = \bar{\rho}(\tilde{\mathbf{x}})$ не зависят от локальных координат ξ_j.

Локальная задача «на ячейке периодичности» для вычисления функций $v_i^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$ для рассматриваемого случая формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} v_{i/i}{}^{(0)} = 0, \\ -p_{/i}{}^{(1)} + \mu^0 v_{i/jj}^{(0)} = p_{,i}{}^{(0)}, \\ p^{(1)} = \mathrm{A}\,\rho^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ \left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0, \quad [\![v_i^{(0)}]\!] = 0, \quad [\![p^{(1)}]\!] = 0; \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases} \qquad (16)$$

где $\mu^0 = 1/\left(\mathrm{Eu}^0\mathrm{Re}^0\right)$, а символом $[\![\cdot]\!]$ обозначены условия периодичности, причем $-1/2 \le \xi_i \le 1/2$ – область ячейки периодичности $V_{\xi p}$. Градиент давления $p_{,i}^{(0)}$ в системе (16) зависит только от глобальных координат $\tilde{x}_i$ и рассматривается как «входные данные» локальной задачи переноса.

Будем рассматривать далее трехмерную пористую структуру, в которой движение газа может происходить вдоль координатных осей $O\xi_i$ (см. рис. 2, б) В силу линейности

локальной задачи (16) ее решение можно представить в виде линейной функции от входных данных, т.е. $p_{,i}^{(0)}$:

$$p^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^{3} P^{(\alpha)}(\xi)\, p_{,\alpha}{}^{(0)}, \quad v_i^{(0)} = -\sum_{\alpha=1}^{3} W_i^{(\alpha)}(\xi)\, p_{,\alpha}{}^{(0)}, \tag{17}$$

где функции $P^{(\alpha)}(\xi)$ и $W_i^{(\alpha)}(\xi)$ зависят от ξ.

Подставив выражения (17) в локальную задачу (16), после исключения градиента $p_{,i}^{(0)}$ получим набор локальных задач для определения функций $P^{(\alpha)}(\xi)$, $W_i^{(\alpha)}(\xi)$, которые не содержат констант, описывающих физические свойства газов, и не зависят от входных данных:

$$\begin{cases} W_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ P_{/i}^{(\alpha)} - \mu^0 W_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ W_i^{(\alpha)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \\ \left\langle P^{(\alpha)} \right\rangle = 0, \quad \left[\!\left[W_i^{(\alpha)} \right]\!\right] = 0, \quad \left[\!\left[P^{(\alpha)} \right]\!\right] = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь введены функции, позволяющие учитывать вырожденный случай пористой структуры, когда сквозные каналы пор по одному из координатных направлений отсутствуют:

$$h_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq \alpha \text{ или при } i = \alpha \;\; P_{,\alpha}^{(0)} = 0, \\ 1 \text{ при } i = \alpha \text{ и } P_{,\alpha}^{(0)} \neq 0. \end{cases}$$

Физическая интерпретация локальной задачи

Из анализа системы (18) можно сделать следующий вывод. На локальном уровне для каждого фиксированного значения α задача (18) представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой жидкости. Решение задач (18) определяется только внутренней геометрией пор, поэтому их решение применимо для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных выше допущений. Данная задача имеет ряд специфических свойств. Во-первых, поскольку функция $p^{(1)}$ в выражении (14) представляет собой пульсацию давления p по отношению к среднему значению $\overline{p}$:

$$\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + \mathrm{O}(\kappa^2), \quad \left\langle p^{(0)} \right\rangle = \overline{p}, \quad \left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0,$$

то функция $p^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Во-вторых, наличие условия $\left\langle p^{(1)} \right\rangle = 0$ делает задачу (18) интегрально-дифференциальной, что вместе с условиями периодичности принципиально отличает ее от классической задачи Стокса.

Постановка локальной задачи на 1/8 ячейки периодичности

Упростить решение задачи (18) позволяет следующая теорема о продолжении решения [5, 6].

Пусть ячейка периодичности $V_{\xi p}$ 3D-структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей $O\xi_1\xi_2$, $O\xi_1\xi_3$, $O\xi_2\xi_3$. Тогда решение $P^{(\alpha)}$, $W_i^{(\alpha)}$ задачи (18) *получается с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций $\tilde{P}^{(\alpha)}$, $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, определенных в $1/8$ ячейки периодичности (в первом квадранте $\{\xi_i : 0 \le \xi_i \le 1/2\}$) (см. рис.1, б) и являющихся решениями следующих задач:*

$$\begin{cases} \tilde{W}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{/i}^{(\alpha)} - \mu^0 \tilde{W}_{i/jj}^{(\alpha)} = h_i^{(\alpha)}, \ \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0, \ \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}. \end{cases} \qquad (19)$$

Изменение знаков функций $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, $\tilde{P}^{(\alpha)}$ для $\alpha = 1$ при их симметричном или антисимметричном продолжении во всю ЯП может осуществляться так, как представлено на рис. 2. Для $\alpha = 2,3$ продолжение осуществляется аналогичным образом с циклической перестановкой индексов и функций. Знак «+» на рис. 2 означает, что при переходе из первого квадранта функция не изменяет знак (симметричное продолжение), а знак «–» – изменяет (антисимметричное продолжение).

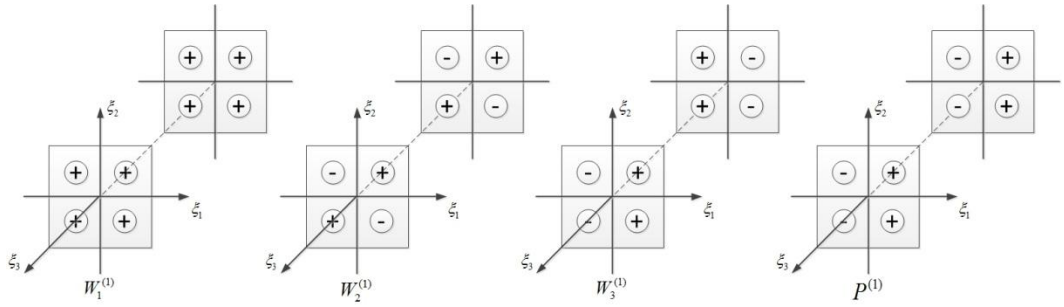

Рис. 3. Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении

Используя симметричное и антисимметричное продолжение решения системы (19), можно записать граничные условия на граничных плоскостях 1/8 ячейки периодичности $\tilde{V}_{\xi p}$ [6]:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = 0 \text{ и } \xi_1 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_1} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \tilde{P}^{(1)} = 0; \\
&\xi_2 = 0 \text{ и } \xi_2 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \tilde{W}_2^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0; \\
&\xi_3 = 0 \text{ и } \xi_3 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{W}_1^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{W}_2^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0; \quad \tilde{W}_3^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{P}^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Вариационная формулировка локальной задачи

Вводя обозначения для компонент тензора напряжений $T_{ij}^{(\alpha)}$ и тензора скоростей деформаций $D_{ij}^{(\alpha)}$:

$$T_{ij}^{(\alpha)} = -\tilde{P}^{(\alpha)}\delta_{ij} + 2\mu^0 D_{ij}^{(\alpha)}, \quad D_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{W}_{j/i}^{(\alpha)}\right), \tag{21}$$

а также кинематически возможное поле скоростей $\delta\tilde{W}_i^{(\alpha)}$, как векторное поле, удовлетворяющее граничным условиям 1-го рода на части поверхности ячейки периодичности $W_i^{(\alpha)} = 0,\ \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}$, и вариацию давления $\delta\tilde{P}^{(\alpha)}$, то с учетом формулы преобразования произведения векторов

$$T_{ij/j}^{(\alpha)}\delta\tilde{W}_i^{(\alpha)} = (T_{ij}^{(\alpha)}\delta\tilde{W}_i^{(\alpha)})_{/j} - T_{ij}^{(\alpha)}\delta\tilde{W}_{i/j}^{(\alpha)} \tag{22}$$

и формулы Остроградского-Гаусса, можно записать вариационную постановку задачи (19) [6]:

$$\int_{V^{(e)}} D_{ii}^{(\alpha)} \delta \tilde{P}^{(\alpha)} dV = 0,$$
$$\int_{V^{(e)}} T_{ij}^{(\alpha)} \delta D_{ij}^{(\alpha)} dV = \int_{\Sigma^{(e)}} S_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} h_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV, \quad \xi_i \in V_{\xi p}. \tag{23}$$

Здесь $S_i^{(\alpha)} = n_j T_{ij}^{(\alpha)}$ – компоненты вектора усилий на поверхности $\Sigma^{(e)}$ области $V^{(e)} \subset \tilde{V}_{\xi p}$, где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности $\Sigma^{(e)}$. Отметим, что на всей границе области течения $\tilde{V}_{\xi p}$ в соответствии с граничными условиями из задачи (19) работа вектора поверхностных усилий обращается в ноль.

Для решения системы вариационных уравнений (23) был применен метод конечных элементов (МКЭ) [8] с десяти узловым конечным элементом (КЭ) в форме тетраэдра (см. рис. 4), который отличается от классического 10-узлового КЭ тем, что имеет 34 степени свободы: по 3 компоненты скорости $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$ в каждом узле и по одному значению давления $\tilde{P}^{(\alpha)}$ в каждой вершине тетраэдра.

В каждом КЭ использовалась квадратичная аппроксимация функций по скоростям и линейная по давлению:

$$\underset{3}{\{W\}} = \underset{3x30}{[N_W]} \underset{30}{\{w\}}, \quad \underset{1}{p} = \underset{4}{\{N_P\}^T} \underset{4}{\{p\}}, \tag{24}$$

где $\{W\} = \left(\tilde{W}_1^{(\alpha)}, \tilde{W}_2^{(\alpha)}, \tilde{W}_3^{(\alpha)}\right)^T$ – координатный столбец скоростей в КЭ, $\{w\}$ – координатный столбец скоростей в узлах, $\{p\}$ – координатный столбец давлений $p = \tilde{P}^{(\alpha)}$ в вершинах КЭ. Матрицы функций формы $[N_W]$ и $\{N_P\}$ имеют следующий вид:

$$\underset{3x30}{[N_W]} = \begin{bmatrix} N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & 0 & 0 & \dots & N_{W10} & 0 & 0 \\ 0 & N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & 0 & \dots & 0 & N_{W10} & 0 \\ 0 & 0 & N_{W1} & 0 & 0 & N_{W2} & \dots & 0 & 0 & N_{W10} \end{bmatrix},$$

$$\{N_P\}^T = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{pmatrix},$$

где

$$N_{W1}=(2L_1-1)L_1,\quad N_{W2}=(2L_2-1)L_2,\quad N_{W3}=(2L_3-1)L_3,\quad N_{W4}=(2L_4-1)L_4,\quad N_{W5}=4L_1L_2,$$
$$N_{W6}=4L_2L_3,\qquad N_{W7}=4L_1L_3,\qquad N_{W8}=4L_1L_4,\qquad N_{W9}=4L_2L_4,\qquad N_{W10}=4L_3L_4. \tag{25}$$

В последней формуле $L_i,\ i=\overline{1,4}\ -\ L$ -координаты.

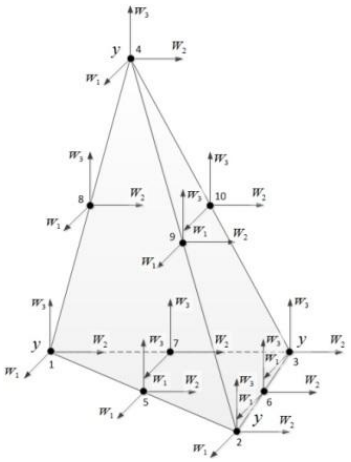

Рис. 4. Вид десяти узлового тетраэдрального КЭ с 34 степенями свободы

Применение метода конечных элементов для данной задачи осуществляется в целом так же, как описано в работе [6]. Отметим, что в результате применения МКЭ к задаче моделирования локальных процессов фильтрации возникает несимметричная и сильно разреженная глобальная СЛАУ. По этой причине для ее решения использовался стабилизированный метод бисопряженных градиентов (Biconjugate Gradient Stabilized, BICGSTAB) [9].

Численный метод определения характеристик пористой среды

Решение локальной задачи фильтрации на 1/8 ЯП позволяет произвести расчет характеристик пористой системы, основываясь только на геометрической форме пор. Действительно, запишем второе из выражений (17), в виде:

$$\rho^{(0)}v_i^{(0)}=-\rho^{(0)}W_i^{(j)}p_{,j}^{(0)} \tag{26}$$

и произведем его осреднение:

$$\left\langle \rho^{(0)} v_i^{(0)} \right\rangle = -\left\langle \rho^{(0)} W_i^{(j)} p_{,j}^{(0)} \right\rangle.$$

Учитывая (11), приходим к закону фильтрации Дарси:

$$\overline{v}_i = -\frac{K_i^j}{\mu^0} \overline{p}_{,j}, \tag{27}$$

где $\overline{v}_i = \left\langle v_i^{(0)} \right\rangle$ – скорость течения (фильтрации), $K_i^j = \mu^0 \left\langle W_i^{(j)} \right\rangle = const$ – компоненты тензора проницаемости пористой среды. Рассмотрим их более подробно. Т.к. функции $W_\beta^{(\alpha)}$ для $\alpha \neq \beta$ являются антисимметричными (см. рис. 3), то матрица $\mathbf{K} = \left(K_i^j \right)$ является диагональной. Если $K_1^1 = K_2^2 = K_3^3 = K$, то пористая среда является изотропной, в противном случае – анизотропной. Отметим, что безразмерные коэффициенты проницаемости K_i^j определяются только на основе данных о геометрии отдельно взятой поры в силу независимости компонент скорости $W_i^{(j)}$ от физических свойств среды, текущей по пористой системе.

Применим теперь метод конечных элементов для вычисления коэффициентов проницаемости и пористости, входящие в закон Дарси (27). Учитывая симметричность функций $W_\beta^{(\alpha)}$ при $\alpha = \beta$, оператор осреднения можно расписать в виде

$$\begin{gathered} K_i^j = \frac{\mu^0}{\varphi_p} \int\limits_{V_{\xi p}} W_i^{(j)} dV = \frac{8\mu^0}{\varphi_p} \int\limits_{\tilde{V}_{\xi p}} \tilde{W}_i^{(j)} dV = \frac{8\mu^0}{\varphi_p} \sum_{e=1}^{E} \int\limits_{V^{(e)}} \tilde{W}_i^{(j)} dV, \\ \varphi_p = \int\limits_{V_{\xi p}} dV = 8 \int\limits_{\tilde{V}_{\xi p}} dV = 8 \sum_{e=1}^{E} \int\limits_{V^{(e)}} dV. \end{gathered} \tag{28}$$

где E – количество конечных элементов.

Введем матрицу функций формы

$$\left\{ N_W \right\}^T = \left(N_{W1} \quad N_{W2} \quad \ldots \quad N_{W10} \right), \tag{29}$$

где N_{Wi}, $i = \overline{1,10}$ определены в (25). Тогда

$$\tilde{W}_i^{(j)} = \underset{1\times 10}{\left\{ N_W \right\}^T} \underset{10}{\left\{ w_i^{(j)} \right\}} \tag{30}$$

Таким образом, приходим к следующим формулам для расчета коэффициентов проницаемости и пористости:

$$K_i^j = \frac{8\mu^0}{\varphi_p}\sum_{e=1}^{E}\left[\int\limits_{V^{(e)}}\{N_W\}^T\left|\det[\mathbf{J}]\right|dL_1dL_2dL_3\right]\cdot\left\{w_i^{(j)}\right\}^{(e)},$$
$$\varphi_p = 8\sum_{e=1}^{E}\int\limits_{V^{(e)}}\left|\det[\mathbf{J}]\right|dL_1dL_2dL_3, \quad (31)$$

где $\left|\det[\mathbf{J}]\right|$ – модуль определителя Якобиевой матрицы, L_i, $i=\overline{1,4}$ – L-координаты.

Результаты

Рассмотрим результаты моделирования течения среды по анизотропной пористо-сетчатой системе в нормальном (для $\alpha=1$) и тангенциальном (для $\alpha=3$) направлениях. Порядок интегрирования при составлении локальных матриц был принят равным 3. Решение глобальной СЛАУ производилось на основе стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) с точностью $\varepsilon=10^{-6}$. Параметры расчета приведены в таблице 1, а результаты – на рис. 5 и в таблице 2.

Таблица 1

Параметры расчета

Параметр	**Значение**	
	Задача $L^{(1)}$	**Задача** $L^{(3)}$
Радиус волокна	0,125	0,125
Количество вершинных узлов / общее количество	11 865 / 81 125	10 286 / 69 821
Количество КЭ	51 258	43 682
Количество поверхностных КЭ	12 276	11 136

Из рис. 5 следует, что максимумы и минимумы давлений $\tilde{P}^{(1)}$ и $\tilde{P}^{(3)}$ приходятся на области переплетения волокон, максимум компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$ находится на оси 1/8 ЯП, вдоль которой происходит течение газа, максимум компоненты скорости $\tilde{W}_3^{(3)}$ приходится на области переплетения волокон. При этом компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(1)}$, $\tilde{W}_3^{(1)}$ и $\tilde{W}_1^{(3)}$ различимых минимумов и максимумов на поверхностях 1/8 ЯП не имеют и достигаются во внутренней области, компонента $\tilde{W}_2^{(3)}$ достигает локальных минимумов и максимумов на противоположенных гранях 1/8 ЯП.

Таблица 2

Минимальные и максимальные значения давления и компонент скорости

Локальная задача	**Параметр**	**Значение**	
		минимальное	**максимальное**
$\alpha = 1$	$\tilde{P}^{(1)}$	– 0,198	0,201
	$\tilde{W}_1^{(1)},\ \times 10^{-2}$	– 0,00198	1,425
	$\tilde{W}_2^{(1)},\ \times 10^{-3}$	– 1,367	1,370
	$\tilde{W}_3^{(1)},\ \times 10^{-3}$	– 1,362	1,336
$\alpha = 3$	$\tilde{P}^{(3)}$	– 0,242	0,231
	$\tilde{W}_1^{(3)},\ \times 10^{-3}$	– 1,117	1,127
	$\tilde{W}_2^{(3)},\ \times 10^{-3}$	– 1,847	1,834
	$\tilde{W}_3^{(3)},\ \times 10^{-2}$	– 0,00116	1,186

Результаты расчета характеристик пористо-сетчатой системы приведены в таблице 3. Как видно из данной таблицы, проницаемость данной среды в нормальном и тангенциальном направлениях различается незначительно.

Таблица 3

Результаты расчета пористости и коэффициентов проницаемости для случая пористо-сетчатой структуры с радиусом волокон $R = 0{,}125$

Локальная задача	**Пористость**	**Безразмерный коэффициент проницаемости**
$\alpha = 1$	0,555	0,003687676
$\alpha = 3$	0,555	0,002496272

Заключение

Разработана математическая модель локальных газодинамических процессов в трехмерных пористо-сетчатых структурах, основанная на методе асимптотического осреднения. Получена вариационная формулировка задачи. Предложен численный метод определения характеристик пористо-сетчатой системы, основанный только на данных о геометрии отдельно взятой поры. Получены результаты, показывающие характер

распределения давления и компонент скоростей для случаев течения среды в нормальном и тангенциальном направлениях относительно плоскости волокон в пористо-сетчатой среде.

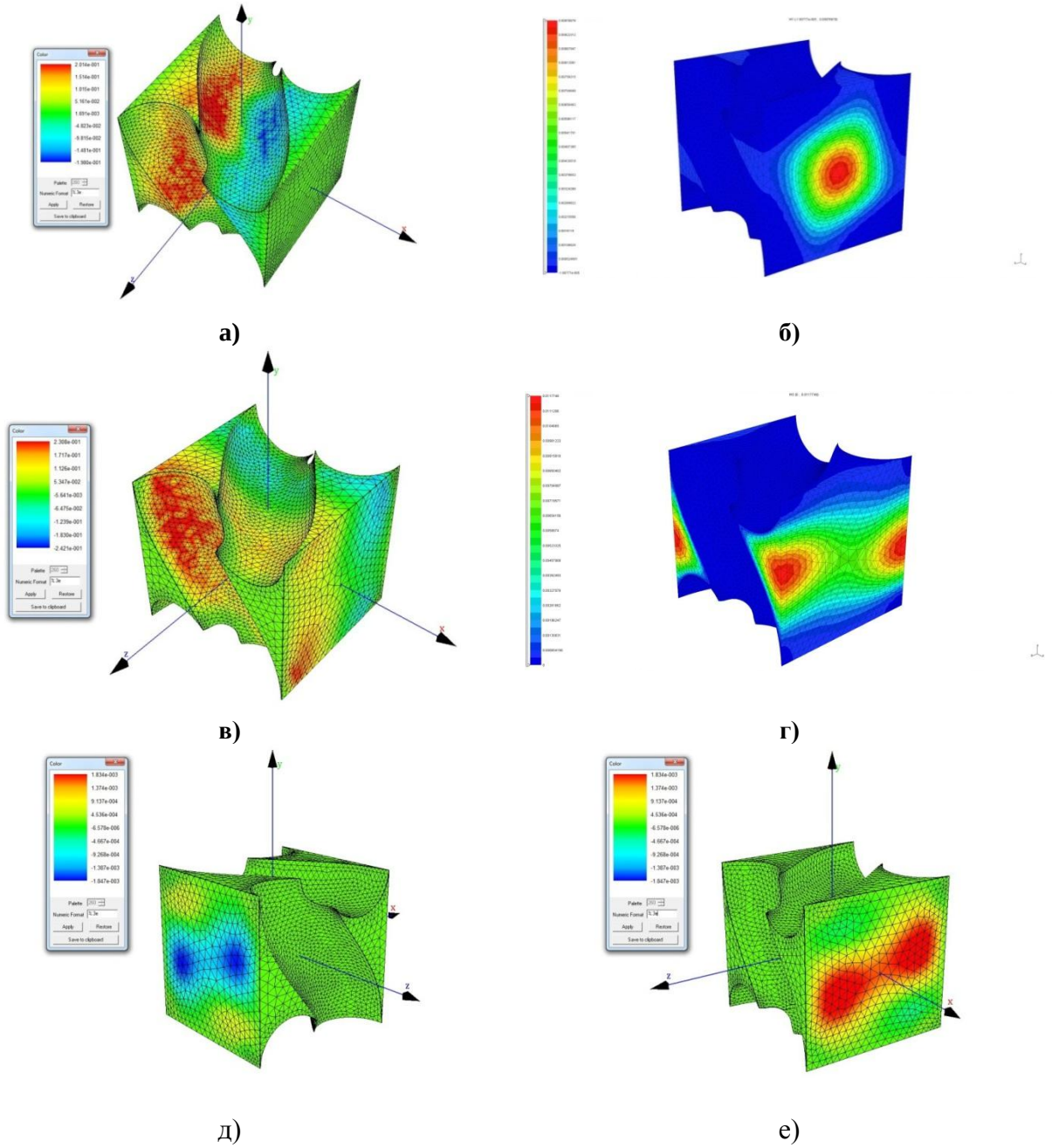

Рис. 5. Результаты расчета: а) распределение давления $\tilde{P}^{(1)}$; б) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_1^{(1)}$; в) распределение давления $\tilde{P}^{(3)}$; г) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_3^{(3)}$; д) распределение компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид слева); е) распределение

компоненты скорости $\tilde{W}_2^{(3)}$ (вид справа)

Список литературы

1. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 352 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике: учеб. пособие / под ред. Н.Н. Поляхова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 296 с.
4. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды: учеб. пособие. В 4 т. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 559 с.
5. Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 1. С. 59–71.
6. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Галицын А.А. Конечно-элементное моделирование локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование». С. 50–65.
7. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. / под ред. О.А. Олейника. М.: Мир, 1984. 472 с. [Enrique Sanchez-Palencia. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. New York : Springer-Verlag, 1980.].
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. / под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1979. 392 с. [Larry J. Segerlind. Applied Finite Element Analysis. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1976.].
9. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB : учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 320 с.