

11, ноябрь 2015

УДК 519.24

Формализация процесса функционирования сложных систем с использованием переходных вероятностей

Трошкина Т.В., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Высшая математика»*

*Научный руководитель: Сидняев Н.И., д.т.н, профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Высшая математика»*

sidnyaev@bmstu.ru

Введение

В сложных системах существующие связи между элементами (подсистемами) при отсутствии отказов элементов, как правило, носят детерминированный характер. Случайный характер поведения присущ только элементам (подсистемам) и выражается он в появлении отказов последних в случайные моменты времени. Отказы приводят к тому, что нарушается (изменяется) алгоритм взаимодействия подсистем. Это, в свою очередь, приводит к определенным изменениям процесса функционирования ЭРИ системы в дискретные моменты времени. Таким образом, отказы элементов, их переходы из исправного в неисправное состояние и наоборот можно положить в основу определения возможных состояний системы. Учитывая, что число N элементов в системе конечно, множество E возможных несовместных состояний системы также будет конечным. Число таких несовместных состояний системы равно $\prod_{i=1}^N k_i$, где k_i — число возможных состояний i -го элемента. Так, если каждый элемент системы может находиться только в двух состояниях: «исправен» или «неисправен», то множество E будет содержать 2^N различных несовместных состояний.

Очевидно, что каждое состояние $x_i \in E$ характеризуется некоторым значением условной вероятности $\alpha_i(t)$ выполнения задачи системой при условии, что она находится в состоянии x_i . Для некоторых состояний x_i величина $\alpha_i(t) = 0$. На этом основании множество E можно разбить на два подмножества Q и R таким образом, чтобы в Q

входили все $x_i \in E$, для которых $\alpha_i(t) = 0$, а в R — все остальные состояния. Множества R и Q удовлетворяют условиям $R \cup Q = E$; $R \cap Q = \emptyset$.

Следовательно, если система исправна $\alpha_i(t) > 0$, то она должна находиться в одном из состояний, удовлетворяющих соотношению $x_i \in R$. Если же выполняется условие $x_j \in Q$, то система утратила работоспособность, т. е. имеет место отказ системы. Подмножества R и Q объединяют эквивалентные по работоспособности состояния.

Следовательно, отказ системы может быть однозначно связан с некоторым подмножеством ее состояний Q . Формализация процесса функционирования системы в целях исследования надежности является достаточной, если она обеспечивает формальное описание переходов системы из состояния в состояние.

1. Метод переходных вероятностей

Определение основных показателей надежности для необслуживаемой системы по существу сводится к вычислению вероятности ее безотказной работы за некоторое время τ . Эта вероятность в рассматриваемом случае численно равна вероятности нахождения системы в технически исправном состоянии в некоторый момент времени t_3 , если интервал времени $[0, t_3]$ равен величине τ .

Ранее отмечалось, что в процессе эксплуатации любая система в результате отказов элементов может оказаться в одном из состояний множества E . Аналогичные состояния x_{0i} , объединяемые в множестве E_0 , возможны и при поступлении ее в эксплуатацию. Каждому состоянию $x_{0i} \in E_0$ соответствует вероятность P_{0i} того, что в момент времени $t_3 = 0$ система находится в состоянии x_{0i} . При этом $\sum_{i=1}^M P_{0i} = 1$, где M — число возможных состояний системы, входящих в множество E_0 .

Переходы системы из любого состояния множества E_0 в любое состояние множества E за время эксплуатации определяются характеристиками надежности элементов. В результате этих переходов формируется уровень надежности системы. Рассмотрим два метода аналитического описания переходов с целью определения надежности необслуживаемых систем.

Обозначим вероятность перехода системы из состояния x_{0j} в состояние x_i за время t_3 символом $P_{ji}(t_3)$. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P_i(t_3) = \sum_{j=1}^M P_{0j} P_{ij}(t_3); i = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

где $P_i(t_3)$ — вероятность того, что в момент времени t_3 система будет находиться в состоянии x_i .

Вероятность нахождения системы в момент времени t_3 в технически исправном состоянии (вероятность безотказной работы) определяется по формуле:

$$P(t_3) = \sum_{j=1}^M P_i(t_3) \alpha_i = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P_{0j} P_{ji} \alpha_i.$$

Уравнения вида (1) могут быть компактно записаны в матричной форме

$$\bar{P}(t_3) = \bar{P}(0) \Pi(t_3), \quad (2)$$

где $\Pi(t_3)$ — матрица переходов системы за время t_3 ; $\bar{P}(0)$ — вектор строка вида $\bar{P}(0) = (P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0M})$.

Выражение (1) для определения показателя $P(t_3)$ может быть получено из соотношения (2) по формуле

$$P(t_3) = \bar{P}(0) \Pi(t_3) \bar{H}, \quad (3)$$

где $\bar{H}$ — вектор-столбец, элементами которого являются вероятности α_i .

Из выражения (3) следует, что при проведении расчетов надежности нет необходимости использовать всю матрицу $\Pi(t_3)$, а можно ограничиться подматрицей $\Pi(t_3)$, охватывающей только работоспособные состояния системы. Кроме того, если учесть, что в качестве элемента системы может быть взята произвольная ее подсистема, то может быть обеспечен вполне приемлемый для проведения расчетов порядок матрицы $\Pi(t_3)$.

Из формулы (3) следует, что для определения надежности систем необходимо знать матрицу $\Pi(t_3)$. Рассмотрим возможные принципы составления матрицы $\Pi(t_3)$. Отметим, что матрица $\Pi(t_3)$ будет определена, если будут определены вероятности переходов $P_{ji}(t_3)$ системы из состояния x_j в состоянии x_i . Для этого, очевидно, необходимо выразить состояния системы через состояния ее элементов.

Допустим, что i -й элемент системы может принимать одно из k_j состояний («исправен», «обрыв», «короткое замыкание», «ложное срабатывание» и т. д.). Так как эти состояния для одного элемента являются несовместными, то в реализовавшемся сос-

тоянии x_i системы каждый из N ее элементов будет находиться в одном из k_j отмеченных выше состояний. Тогда появление состояния x_i системы может быть представлено как некоторое сложное событие, определяемое в виде произведения, простых событий по формуле:

$$x_i = \prod_{j=1}^N h(j, k)_i, \quad (4)$$

где $h(j, k)_i$ — событие заключающееся в том, что i -й элемент ($j = 1, 2, \dots, N$) формирует состояние x_i системы, находясь в состоянии k . Состояние x_i системы от состояния x_s отличается тем, что под знаком произведения хотя бы одного значения j событие $h(j, k)_i \neq h(j, k)_s$.

Для примера рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем, которые резервируют друг друга и могут рассматриваться в качестве ее элементов. Необходимо определить множество E возможных состояний системы, если каждый из ее элементов может находиться в исправном состоянии или в состоянии отказа.

В рассматриваемом примере $N=2$, а величина k принимает значения 1 или 2. Тогда в соответствии с формулой (4): $x_1 = h(1,1)h(2,1)$; $x_2 = h(1,1)h(2,2)$; $x_3 = h(1,2)h(2,1)$; $x_4 = h(1,2)h(2,2)$. Перечисленные состояния исчерпывают множество E возможных состояний системы.

Обычно конструктивное исполнение элементов таково, что для них возможны только переходы из исправного состояния в состояние отказа. Отказавшие элементы в процессе дальнейшей эксплуатации системы не меняют своего состояния. Тогда переход системы из состояния x_i в состояние x_s (в том числе и при $i=s$) за время t_3 обеспечивается только за счет тех элементов, которые в состоянии x_i были исправными ($k=l$). Для необслуживаемой системы при переходе из состояния x_i в состояние x_s множество исправных элементов может либо оставаться постоянным ($t=s$), либо убывать ($i \neq s$). Таким образом, множество элементов n_i , являющихся исправными при нахождении системы в состоянии x_i , применительно к состоянию x_s подразделяется на два подмножества: n_s и m_s , так что $n_i = n_s \cup m_s$, где n_s — множество элементов, являющихся исправными при нахождении системы в состоянии x_s , m_s — множество элементов, отказы которых обеспечили переход системы из состояния x_i в состояние x_s .

Вероятность перехода системы из состояния x_i в x_s на основании изложенного выше может быть определена по формуле:

$$P_{is}(t_3) = \prod_{\vartheta=1}^{n_s} p_{\vartheta}(t_3) \prod_{\mu=1}^{m_s} [1 - p_{\mu}(t_3)], \quad (5)$$

где $p_{\vartheta}(t_3)$ — вероятность безотказной работы ϑ -го элемента из числа, не отказавших за время t_3 ; $1 - p_{\mu}(t_3)$ — вероятность появления отказа μ го элемента из числа, отказавших за время t_3 .

Соотношение (5) позволяет определить матрицу переходов $\Pi(t_3)$. Матрица переходов может быть представлена также графически в виде диаграммы переходов (рис. 1) следующим образом. Возможные состояния системы, объединяемые множеством E , представляются в виде вершины диаграммы. Диаграмма переходов, описывающая систему с M состояниями, содержит M вершин. Переходы системы из состояния в состояние на диаграмме изображаются в виде ориентированных дуг, соединяющих вершины.

Ориентированные дуги между вершинами x_i и x_j изображаются в том случае, если возможен переход из состояния x_i в состояние x_j (в том числе и при $i=j$) за время t_3 . Ветвь, имеющая начало и конец в вершине x_j и не касающаяся других вершин диаграммы, в дальнейшем будет называться также петлей или контуром.

В качестве примера построим матрицу и диаграмму переходов системы, состоящей из двух подсистем, предполагая, что вероятность безотказной работы подсистем за время t_3 соответственно равна $p_1(t_3)$ и $p_2(t_3)$.

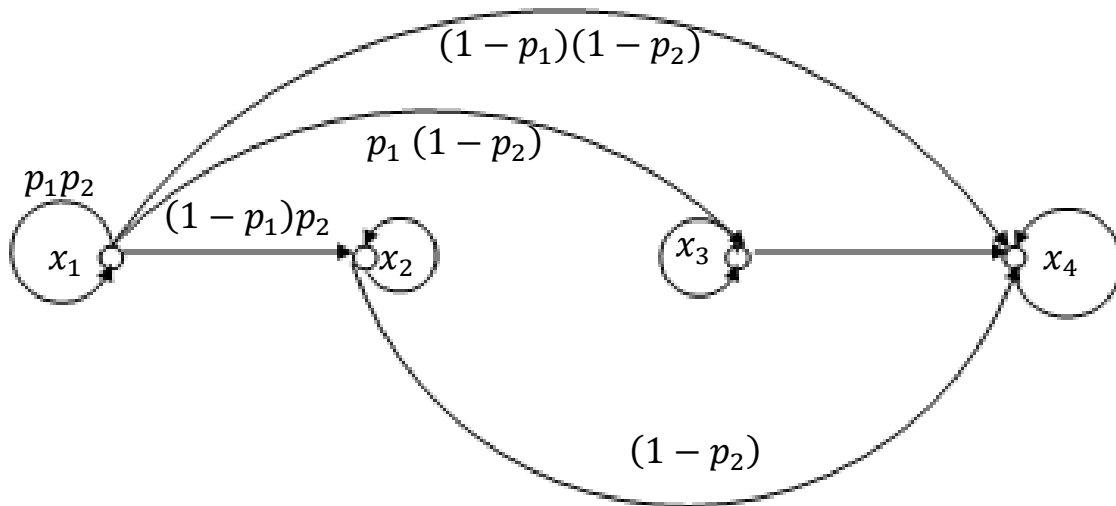


Рис.1. Графический вид диаграммы переходов: $x_1 = h(1,1)h(2,1)$; $x_2 = h(1,1)h(2,2)$; $x_3 = h(1,2)h(2,1)$; $x_4 = h(1,2)h(2,2)$.

Расчет переходных вероятностей производится по формуле (5), результаты которого сводятся к следующему: вероятность $\mathbf{p_{11} = p_1(t_3)p_2(t_3)}$, т.е. равна произведению вероятностей безотказной работы элементов. Кроме того, из формулы (5) следует, что в силу специфики организации эксплуатации системы вероятности $P_{21} = 0$, $P_{31} = 0$ и $P_{41} = 0$, а вероятности $\mathbf{P_{12} = [1 - p_1(t_3)]p_2(t_3)}$ и $\mathbf{P_{13} = p_1(t_3)[1 - p_2(t_3)]}$.

Остальные вероятности соответственно равны:

$$\mathbf{P_{22} = p_2(t_3); P_{23} = 0; P_{24} = 1 - p_2(t_3); P_{32} = 0; P_{33} = p_1(t_3);}$$

$$\mathbf{P_{34} = 1 - p_1(t_3); P_{42} = 0; ; P_{43} = 0; ; P_{44} = 1;}$$

$$\mathbf{P_{14} = [1 - p_1(t_3)][1 - p_2(t_3)].}$$

Матрица переходов системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi(t_3) = & \left(\begin{array}{ccccc} p_1 p_2 & (1-p_1)p_2 & p_1(1-p_2) & (1-p_1)(1-p_2) & \\ 0 & p_2 & 0 & (1-p_2) & \\ 0 & 0 & p_1 & (1-p_1) & \\ 0 & 0 & p_1 & (1-p_1) & \end{array} \right) \\ \text{Применительно} & \\ \mathbf{P(t_3) = I} & \\ & + \mathbf{P_{01}p_1(t_3)[1 - p_2(t_3)] + P_{03}p_1(t_3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если принять $P_{01} = 1, P_{02} = P_{03} = 0$, то выражение (6) сводится к общеизвестному расчетному соотношению для резервированных систем: $P_0(t_3) = 1 - [1 - p_1(t_3)][1 - p_2(t_3)]$.

При известном значении показателя надежности $P(t_3)$ можно вычислить любые другие показатели надежности системы.

2. Метод интенсивностей переходов

Применение метода интенсивностей переходов основано на математическом аппарате теории марковских процессов с непрерывным временем. Обозначим через λ_{ij} интенсивность перехода системы из состояния X_i в состояние X_j , понимая под величиной λ_{ij} число переходов, совершаемых в единицу времени. Величины λ_{ij} определяются следующим образом: за бесконечно малый интервал времени система, находящаяся в состоянии X_i , будет совершать переход в состояние X_j с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta t$. Очевидна связь этого определения с обычными допущениями для пуассоновского процесса. Мы будем рассматривать только такие процессы, для которых интенсивности переходов постоянны. Рассмотрим зависимость надежности системы от интенсивности переходов.

Вероятность того, что система находится в состоянии X_i к моменту времени t_3 после начала эксплуатации, будем по-прежнему обозначать через $P_i(t_3)$. Вероятности состояний в момент времени $t_3 + \Delta t_3$ можно связать с вероятностями состояний в момент t_3 посредством уравнения:

$$P_i(t_3 + \Delta t_3) = P_i(t_3)[1 - \sum \lambda_{ij} \Delta t_3] + \sum P_j(t_3)\lambda_{ij} \Delta t_3. \quad (7)$$

Это уравнение получено на основе следующих предположений. Система может попасть в состояние X_i в момент времени t_3 двумя взаимно исключаящими друг друга путями.

Во-первых, она может находиться в состоянии X_i в момент времени t_3 и не сделать ни одного перехода в течение времени Δt_3 . Вероятность того, что система в момент времени t_3 находится в состоянии X_i , равна $P_i(t_3)$. Вероятность того, что система за время Δt_3 не сделает ни одного перехода, равна $1 - \sum \lambda_{ij} \Delta t_3$.

Во-вторых, в момент времени t_3 система может находиться в одном из состояний X_j и за время Δt_3 совершить переход из состояния X_i в состояние X_j (вероятность

$\lambda_{ij}\Delta t_3$). Перемножая и суммируя эти вероятности, получаем полную вероятность перехода системы из состояния x_i в состояние x_j за время Δt_3 в виде $\sum P_j(t_3)\lambda_{ij}\Delta t_3$. Сумма этих вероятностей дает полную вероятность нахождения системы в состоянии x_i в момент времени $t_3 + \Delta t_3$, что приводит к уравнениям (7).

Введем обозначение: $\lambda_{jj} = -\sum \lambda_{ji}$. (8)

Перепишем уравнение (7) в виде:

$$P_i(t_3 + \Delta t_3) - P_i(t_3) = P_i(t_3)\lambda_{ii}\Delta t_3 + \Delta t_3 \sum P_j(t_3)\lambda_{ji}. \quad (9)$$

После деления обеих частей последнего уравнения на Δt_3 , перехода к пределу при $\Delta t_3 \rightarrow 0$ и суммирования в правой части выражения (9) получим:

$$\frac{d}{dt}P_i(t_3) = \sum P_j(t_3)\lambda_{ji}. \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В матричном виде уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}P(t_3) = P(t_3)\Lambda, \quad (11)$$

где $P(t_3)$ — вектор вероятностей состояний в момент времени t_3 ; Λ — матрица интенсивностей переходов.

Уравнение (11) дополняется начальными условиями в виде вектора $P(0)$. Матрица Λ обладает следующими свойствами:

- внедиагональные элементы матрицы λ_{ji} определяются интенсивностями переходов системы из состояния x_i в состояние x_j ;

- сумма элементов каждой строки матрицы удовлетворяет условию:

$$\sum \lambda_{ij} = 0; \quad (12)$$

- любой элемент матрицы удовлетворяет неравенствам $\lambda_{ij} < 0$ для всех $i = j$; $\lambda_{ij} \geq 0$ для всех $i \neq j$.

Предположим, что определены вероятности переходов за бесконечно малый промежуток времени Δt_3 . Тогда вероятность безотказной работы i -го элемента за время равна $1 - \lambda_i\Delta t_3$. Заменяя на диаграмме (рис. 2) вероятности переходов $P_{ij}(t_3)$ соответствующими приближенными значениями и пренебрегая в силу свойства

ординарности переходами с вероятностью $O(\Delta t_3)$, получим диаграмму вероятностей переходов с системы за Δt_3 . Если при этом удалить сомножитель Δt_3 у каждой вероятности переходов и использовать свойство интенсивностей переходов, то диаграмма вероятностей переходов преобразуется в диаграмму интенсивностей переходов, вид которой показан на рис. 2.

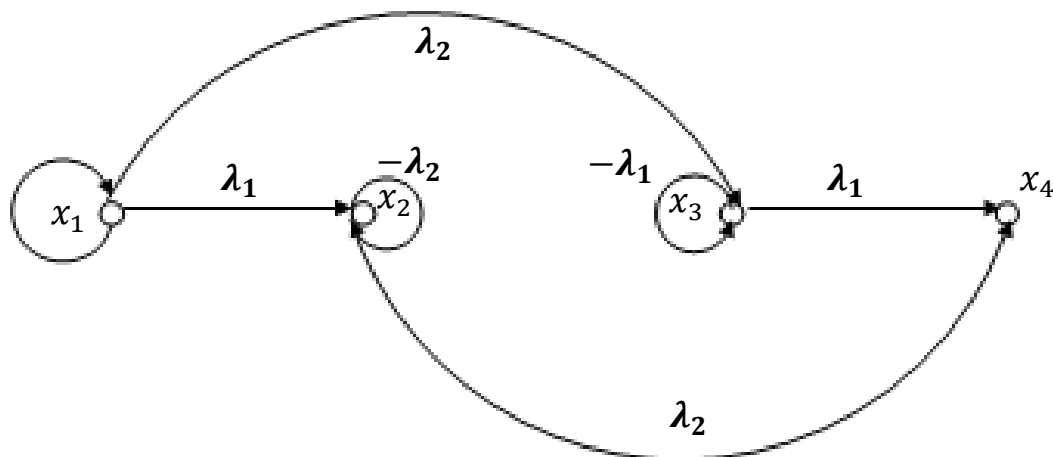


Рис. 2. Диаграмма интенсивностей переходов

Между диаграммой переходов и матрицей Λ уравнений вида (11) легко установить однозначное соответствие, заключающееся в том, что элементами i -й строки матрицы Λ являются ветви, описывающие переходы из состояния x_i в состояние x_j . При нахождении решения (11) обычно пользуются преобразованием Лапласа дифференциальных уравнений путем вычисления интеграла:

$$P_i(s) = \int_0^{\infty} P_i(t) e^{-st} dt. \quad (13)$$

При этом уравнение (11) преобразуется к виду:

$$\bar{P}(s) = \bar{P}(s) \frac{1}{s} \Lambda + \frac{1}{s} \bar{P}(0). \quad (14)$$

Это уравнение может быть решено по правилу Крамера, что сопряжено с громоздкими вычислениями. В последнее время особенно в теории линейных электрических цепей для решения системы линейных алгебраических уравнений используется теория линейных графов. Покажем, что применение теории линейных графов к исследованию надежности приводит к более простому алгоритму расчета.

Из выражения (14) следует, что диаграмма переходов будет полностью описывать первое слагаемое, если интенсивности переходов, приписанные ее ветвям, разделить на

величину s . Второе слагаемое соответствует прибавлению к диаграмме M новых (дополнительных) вершин с ветвями, направленными от дополнительных к основным вершинам, при этом длина i -ой ветви равна $\frac{P_{0i}}{s}$. Преобразованная таким образом диаграмма будет соответствовать линейному графу; вид ее применительно к рис. 2 показан на рис. 3.

При анализе графа методами, изложенными ранее, легко определить величины $P_j(s)$, представляющие собой преобразованные в соответствии с выражением (13) вероятности состояний системы, как передачи графа $\Pi_{ij}(s)$ по формуле:

$$P_j(s) = \sum_{i=1}^M \Pi_{ij}(s) = \frac{[\Pi(1 - L_k) \sum k_{ijl}]}{\Pi(1 - L_k)}, \quad (15)$$

где L_k — передача k -го контура, имеющего начало и конец в одной и той же вершине; k_{ijl} — передача пути от i -й дополнительной вершины к j -й вершине; m — число контуров графа.

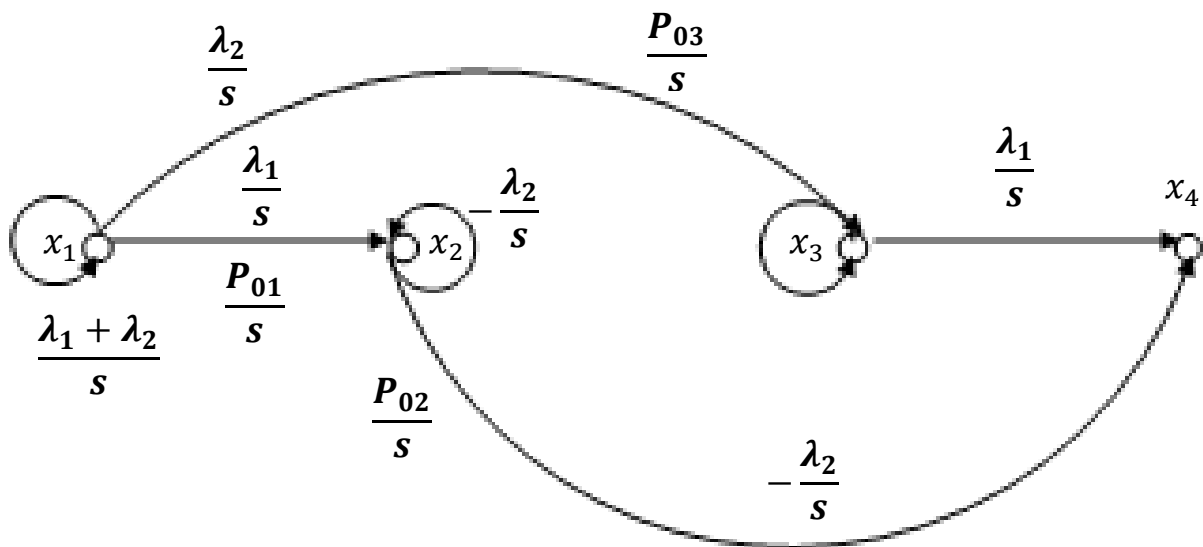


Рис.3. Диаграмма линейного графа

Здесь использованы следующие определения: *путь* — непрерывная последовательность ветвей в указанном направлении, вдоль которой каждая вершина встречается не более одного раза; *передача пути* — произведение передачи ветвей вдоль этого пути; *контур* — простой замкнутый путь, вдоль которого каждый узел встречается не больше одного раза за один обход контура; *передача контура* — произведение передачи ветвей в этом контуре.

Учитывая то, что диаграмма переходов и линейный граф системы могут быть построены достаточно просто, изложенные выше правила позволяют производить исследование надежности систем без составления соответствующих дифференциальных уравнений. Это упрощает процедуру вычислений.

Для примера, используя граф, приведенный на рис. 3, решим систему уравнений (14) и определим вероятности состояний системы.

Контур графа содержит у вершин x_1, x_2, x_3 . При этом

$$L_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s}, \quad L_2 = -\frac{\lambda_2}{s}, \quad L_3 = -\frac{\lambda_1}{s}.$$

К вершине x_1 от дополнительных вершин имеется только одна ветвь $\frac{P_{01}}{s}$. Тогда по формуле (15):

$$P_1(s) = \frac{[(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s})(1 + \frac{\lambda_2}{s})(1 + \frac{\lambda_1}{s}) \frac{P_{01}}{s}]}{[(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s})(1 + \frac{\lambda_2}{s})(1 + \frac{\lambda_1}{s})]}.$$

Раскрывая скобки в числителе, опуская произведения, сомножители которых принадлежат ветвям с общими вершинами

$$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s} \frac{P_{01}}{s}; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s} \frac{\lambda_1}{s} \frac{P_{01}}{s}; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s} \frac{\lambda_2}{s} \frac{P_{01}}{s}; \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s} \frac{\lambda_1}{s} \frac{\lambda_2}{s} \frac{P_{01}}{s} \right)$$

и сокращая числитель и знаменатель, получим:

$$P_1(s) = \frac{P_{01}}{s + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Для вершины x_2 контура остаются прежними. Кроме того, имеются 2 ветви от I_1 и I_2 к x_2 . При этом

$$K_{12} = \frac{\lambda_1}{s} \frac{P_{01}}{s}, \quad K_{22} = \frac{P_{02}}{s}.$$

Тогда

$$P_2(s) = \frac{P_{01}\lambda_1 + (s + \lambda_1 + \lambda_2)P_{02}}{(s + \lambda_1 + \lambda_2)(s + \lambda_2)}.$$

Аналогично

$$P_3(s) = \frac{P_{01}\lambda_1 + (s + \lambda_1 + \lambda_2)P_{03}}{(s + \lambda_1 + \lambda_2)(s + \lambda_1)}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$P_1(t_3) = P_{01}e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t_3};$$

$$P_2(t_3) = [P_{02} + P_{01}(1 - e^{-\lambda_1 t_3})]e^{-(\lambda_2)t_3};$$

$$P_3(t_3) = [P_{03} + P_{01}(1 - e^{-\lambda_2 t_3})]e^{-(\lambda_1)t_3}.$$

Решение уравнений вида (14) позволяет определить вероятности $P_i(t_3)$ состояний системы в момент времени t_3 . Показатель надежности системы может быть определен как сумма вероятностей состояний $x_i \in R$ по формуле:

$$P(t_3) = \sum_{i=1}^{N_p} P_i(t_3). \quad (16)$$

Применительно к условиям рассматриваемого выше примера формула (16) при $P_{01} = 1, P_{02} = 0, P_{03} = 0$ принимает вид:

$$P(t_3) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t_3})(1 - e^{-\lambda_2 t_3}).$$

Большой практический интерес представляет вычисление среднего времени безотказной работы системы T_0 . Покажем, что применение теории линейных графов и в этом случае приводит к упрощению процедуры вычислений.

Учитывая то, что вероятность безотказной работы системы определяется в общем случае соотношением (16), получим

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t)dt = \sum_{i=1}^{N_p} \int_0^{\infty} P_i(t)dt. \quad (17)$$

Введем обозначение $T_i = \int_0^{\infty} P_i(t)dt$. Тогда соотношение (17) может быть переписано в виде

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N_p} T_i, \quad (18)$$

где T_i — время пребывания системы в состоянии x_i .

Для вычисления интегралов вида $T_i = \int_0^{\infty} P_i(t)dt$ может быть использовано известное свойство преобразования Лапласа, заключающееся в том, что

$$T_i = \int_0^{\infty} P_i(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} P_i(s). \quad (19)$$

Кроме того, следует отметить, что предельные вероятности состояний системы P_i на основе преобразования Лапласа функции $P_i(t)$ могут быть определены по формуле

$$P_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sP(s). \quad (20)$$

Используем уравнение вида:

$$s\bar{P}(s) - \bar{P}(0) = \bar{P}(s)\Lambda.$$

Тогда на основе предельного перехода с использованием выражений (19) и (20) получим

$$\bar{P}_i - \bar{P}(0) = \bar{T}_i \Lambda, \quad (21)$$

где $\bar{T}_i$ — вектор-строка, элементы которого определены из выражения (19).

Для рассматриваемых систем предельные вероятности P_i удовлетворяют условию

$$P_i = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i \in R; \\ 1 & \text{при } x_i \in Q. \end{cases} \quad (22)$$

Учитывая выражение (22), на основании зависимости (21) получаем соотношение для определения величины T_j в виде

$$T_j = \frac{1}{\lambda_{jj}} \sum_{k=j} T_k \lambda_{kj} + \frac{1}{\lambda_{jj}} P_{0j}. \quad (23)$$

В матричной форме записи выражение принимает вид

$$\bar{T} = \bar{T}\Lambda_c + \bar{P}_c(0),$$

где $\bar{T}$ — вектор-строка, элементы которого равны T_j ; Λ_c — матрица, внедиагональные элементы которой

$$\lambda'_{ij} = \lambda_{ij}/(-\lambda_{jj}), \quad (24)$$

а диагональные элементы $\lambda'_{ij} = 0$, $\bar{P}_c(0)$ — вектор-строка, элементы которого получены из $\bar{P}(0)$ заменой элементов P_{0j} на элементы

$$P'_{0j} = P_{0j}/-\lambda_{jj}. \quad (25)$$

Правила (24) и (25) указывают формальный путь преобразования линейного графа для определения показателя $P(t)$ в линейный граф для определения показателя T_0 . Формальные правила применительно к преобразованию графов сводятся к следующему:

- удалены все петли у вершин графа, удалены вершины, соответствующие состояниям отказов системы;
- интенсивности переходов λ_{ij} разделены на отрицательные значения интенсивностей переходов λ_{ij} .

Применяя формулу (25), получаем T_i . Тогда формула (18) дает окончательный ответ. Таким образом, диаграмма переходов является одной из тех форм представления модели надежности системы, на основании которой путем формальных преобразований по правилам, изложенным выше, могут быть получены все необходимые характеристики надежности.

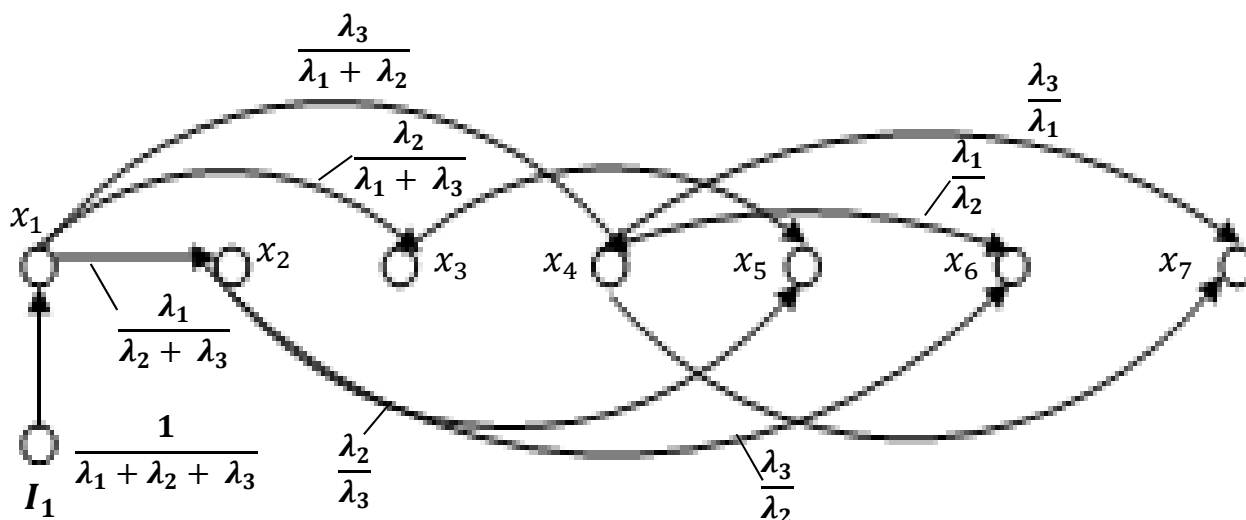


Рис. 4. Линейный граф системы

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из трехподсистем. Система считается отказавшей, если отказали все три подсистемы. Интенсивности отказов подсистем соответственно равны λ_1, λ_2 и λ_3 . Начальная надежность систем характеризуется вектором $\bar{P}(0) = (1, 0, \dots, 0)$. Необходимо определить среднее время безотказной работы системы T_0 . Используя приведенные выше правила, строим линейный граф системы (рис. 4). После преобразования получим:

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; T_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_3};$$

$$T_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3}; T_4 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2};$$

$$T_5 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3} \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right);$$

$$T_6 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right);$$

$$T_7 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right).$$

Используя формулу (18), получим:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_3} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_3} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right].$$

Эта формула может быть использована при проведении расчетов надежности соответствующих систем.

Заключение

В статье были рассмотрены сложные системы со случайным характером поведения элементов. Для формализации процесса функционирования был предложен метод переходных вероятностей и метод интенсивностей отказов. Для обоих методов получены формулы для определения показателя надежности. Рассмотрены примеры резервированных систем, построены матрицы и диаграммы переходов. Для упрощения алгоритма расчёта была применена теория линейных графов.

Список литературы

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984. 328 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов: учебное пособие для вузов. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 570 с.
3. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения: пер. с англ. В. В. Калашникова и др./под ред. А.Н. Ширяева. М.: Наука, 1969. 511 с.[Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications].
4. Сидняев Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: Издательство Юрайт, ИД «Юрайт», 2011. 310 с.
5. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учебное пособие. М.: Издательство Юрайт, ИД Юрайт, 2011. 399 с.
6. Сидняев Н.И., Мельникова Ю.С. Метод нахождения показателей структурной надежности//Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко: тезисы докладов / под. ред. А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева. М.:ЛЕНАНД, 2012. С. 260-261.
7. Павлов И. В. Оценка показателей надежности сложных систем с восстановлением по результатам испытаний их компонент. // Актуальные направления развития прикладной

математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф., посвящ. 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. С. 113-121.

8. Левин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 3. С. 59-70.
9. Павлов И. В. Расчет показателей надежности в условиях переменного режима работы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 5. С. 103 - 108.