

12, декабрь 2015

УДК 539.3

Сравнительный анализ решений задачи об изгибе пластины с использованием различных вариантов теории пластин

*Баксараев Г.Д., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
Аэрокосмический факультет,
кафедра «Аэрокосмические системы»*

*Научный руководитель: Дмитриев С.Н., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Аэрокосмические системы»
bauman@bmstu.ru*

Введение

В последнее время в работах [1-5] был вновь поднят вопрос об отказе от теории изгиба пластин Кирхгофа-Клебша как традиционной для учебной литературы классической теории и замены ее какой-либо другой теорией, которая должна будет играть роль классической. Причиной является известный парадокс Пуассона-Кирхгофа, заключающийся в несоответствии числа граничных условий на свободном крае порядку дифференциального уравнения теории Кирхгофа-Клебша. Замена крутящего момента распределенными поперечными силами, предложенная для устранения парадокса Кирхгофом, а затем Томпсоном и Тэтом подвергается [1-5] критическому анализу. Показано, что в ряде случаев эти преобразования могут привести не только к количественному, но и к качественному отличию результатов классической и уточненных теорий. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что теория пластин Кирхгофа Клебша вплоть до сегодняшнего дня широко используется в расчетной практике, на ее основе построены, в частности, многие конечно-элементные модели. Представляется, что необходим сравнительный анализ результатов, которые получаются при использовании различных теорий, на достаточно большом количестве примеров. Желательно использовать максимально полный набор аналитических решений, который может быть дополнен и некоторыми численными. В рамках реализации данного предложения в настоящей работе проведено сравнение трех теорий на задачах о расчете шарнирно опертой пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением и задаче об

изгибе пластины в цилиндрическую поверхность и задаче о чистом изгибе пластины в поверхность двоякой кривизны. Сравнение проведено для трех теорий: Кирхгофа-Клебша, Тимошенко-Миндлина и Рейсснера.

1. Шарнирно-опертая пластина

1.1. Классическая теория

Теория изгиба пластин Кирхгофа-Клебша, которую в настоящее время принято считать классической, основана на двух гипотезах:

1. Материальный элемент нормальный к срединной плоскости пластины до деформации при изгибе пластины не изменяет своей длины, остается прямолинейным и ортогональным к срединной поверхности.

2. Нормальными напряжениями в слоях параллельных срединной плоскости пластины можно пренебречь по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

Разрешающее уравнение теории Кирхгофа-Клебша относительно функции прогибов $w = w(x, y)$ имеет вид [4]:

$$D\Delta\Delta w = p, (1.1.1)$$

где Δ - оператор Лапласа, $\Delta\Delta$ - соответственно, бигармонический оператор;

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ - изгибная жесткость пластины, E - модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона;

h - толщина пластины, p - распределенная нагрузка, приложенная к поверхности пластины. Направления осей координат и размеры пластины представлены на рисунке 1.

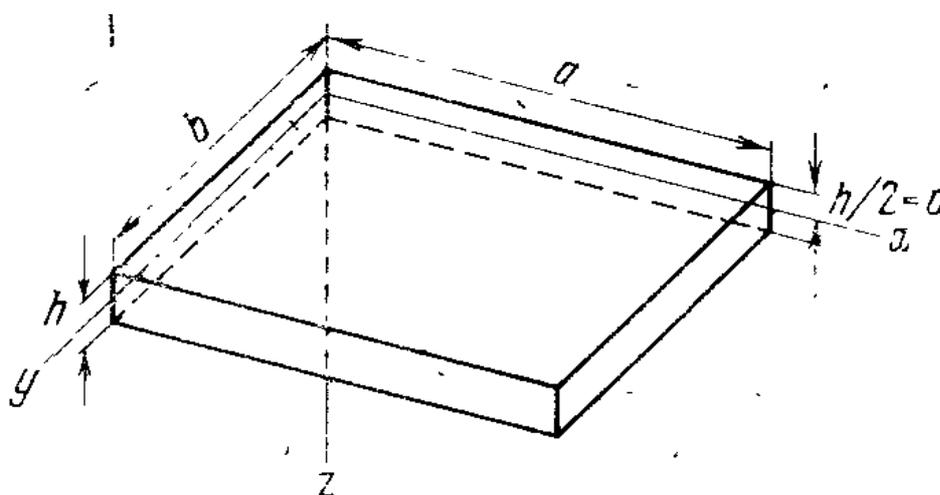


Рис. 1. Направления осей координат и размеры пластины

Углы поворота нормального к срединной плоскости элемента пластины выражаются через прогиб по формулам:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1.2)$$

Изгибающие M_x , M_y и крутящий M_{xy} моменты равны:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2} D (1 - \mu) \left[2 \times \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right] \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Поперечные силы Q_x и Q_y в теории Кирхгофа-Клебша не могут быть определены из физических уравнений, так как соответствующие им сдвиговые деформации приняты равными нулю. Поэтому они определяются из условий равновесия:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (1.1.4)$$

Откуда:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (1.1.5)$$

Разрешающее уравнение (1.11) имеет четвертый порядок по координате x и четвертый по координате y , следовательно, на каждом крае пластины можно удовлетворить двум граничным условиям. Но физически на краю можно сформулировать 3 граничных условия для трех кинематических переменных θ_x, θ_y, w , и соответствующих статических переменных M_x, M_{xy}, Q_x на крае $x=\text{const}$ и M_y, M_{xy}, Q_y на крае $y=\text{const}$. Для большинства случаев стандартных условий закрепления – заделка, шарнир, скользящая заделка не возникает каких-либо противоречий, связанных с удовлетворением граничным условиям. Проблема появляется при выполнении граничных условий на свободном крае, где необходимо добиться одновременного обращения в нуль внутренних силовых факторов. Томпсоном и Тэтом было введено преобразование, в рамках которого в общем случае поперечное усилие и крутящий момент сводятся к обобщенным поперечным усилиям K_x, K_y :

$$K_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad K_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (1.1.6)$$

В результате преобразований Томпсона-Тэта из числа силовых факторов исключается крутящий момент, однако при этом в углах прямоугольной пластины появляются сосредоточенные силы $R_c = M_{xy}$, как показано на рис. 2. Эти силы обсуждаются в [6].

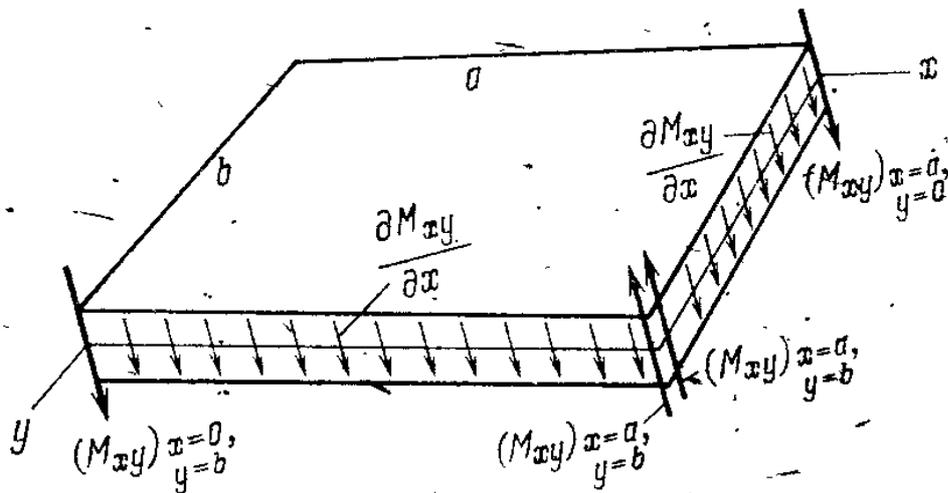


Рис. 2.

В шарнирно-опертой пластине есть возможность сократить число граничных усилий до двух, поэтому в вышеупомянутых преобразованиях нет необходимости. Найдем соответствующее решение и сравним результаты с решениями с применением неклассических теорий.

Дана шарнирно-опертая пластина, находящаяся под распределенной нагрузкой, которую можно представить в виде разложения в двойной тригонометрический ряд:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_0 \times \sin[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.1.8)$$

где $\lambda m = \pi \times m / a$, $\lambda n = \pi \times n / b$

Граничные условия шарнирного опирания:

$$x = \text{const}: w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad y = \text{const}: w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.9)$$

Представим прогиб, удовлетворяющий граничным условиям (1.1.9) в виде:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_0 \times \sin[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.1.10)$$

Подставим (1.18) и (1.10) в (1.1.1). После преобразований получим:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{D} \times \frac{1}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} \times \sin[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y]$$

(1.1.11)

Подставляя (1.1.11) в (1.1.3), (1.1.5) получим следующее выражение для поперечного усилия Q_x :

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda m}{\lambda m^2 + \lambda n^2} \times \cos[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.1.12)$$

Для Q_y усилие записывается аналогично. Сравнивая равнодействующие распределенных по краям сил с равнодействующей внешней нагрузки, приложенной к поверхности пластины, можем убедиться, что они уравнивают друг друга. Если воспользоваться преобразованиями Томпсона-Тэта, то полученные обобщенные усилия K_x, K_y не уравнивают внешнюю нагрузку. Для достижения равновесия необходимо в углах ввести сосредоточенные силы.

1.2. Теория Рейсснера

В 1944 году Э. Рейсснер предложил теорию, которая учитывает деформацию поперечного сдвига. Углы поворота в отличие от (1.12) определяются следующими равенствами:

$$\theta_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

Здесь φ - так называемый проникающий потенциал, удовлетворяющий бигармоническому уравнению:

$$D \Delta \Delta \varphi = p \quad (1.2.2)$$

Прогиб пластины выражается через проникающий потенциал следующим образом:

$$w = \varphi - \frac{D}{S} \times \Delta \varphi, \quad (1.2.3)$$

где $S = c \times G \times h$ - сдвиговая жесткость пластины

Функция ψ является потенциалом, описывающим кручение пластины, и удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \psi - k^2 \times \psi = 0, \quad k^2 = \frac{2 \times c}{D \times (1 - \mu)} \quad (1.2.4)$$

Моменты и усилия выражаются через потенциалы φ и ψ следующим образом:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (1 - \mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \quad (1.2.5)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (1 - \mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right]$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} D (1 - \mu) \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]$$

$$Q_x = S \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = S \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Система уравнений имеет шестой порядок по каждой координате, поэтому на каждом крае пластины должно быть задано по три граничных условия.

Потенциалы должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$x = \text{const}: \varphi = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$y = \text{const}: \varphi = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Данные граничные условия удовлетворяются, если искать решение в виде:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{mn} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.7)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{mn} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Cos}[\lambda n \times y] \quad (1.2.8)$$

Подставим (1.2.8) в (1.24):

$$(\lambda m^2 + \lambda n^2 + k^2) \times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{mn} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Cos}[\lambda n \times y] = 0 \Rightarrow \psi_{mn} = 0$$

и (1.2.7) в (1.2.2). Получим:

$$D\Delta\Delta\varphi = p \Rightarrow (\lambda m^4 + 2 \times \lambda n^2 \times \lambda n^2 + \lambda n^4) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{mn} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y]$$

$$= p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{mn} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y]$$

$$\varphi_{mn} = \frac{p_0}{D \times (\lambda m^2 + \lambda n^2)^2}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{D \times (\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.9)$$

Зная ряд для φ найдем прогиб:

$$w = \varphi - \frac{D}{S} \times \Delta\varphi \Rightarrow w_{ij} = \frac{p_0}{D} \left(\frac{1}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} + \frac{1}{S \times (\lambda m^2 + \lambda n^2)} \right)$$

Отсюда находим результирующее выражение для прогиба:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{D} \left(\frac{1}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} + \frac{D}{S \times (\lambda m^2 + \lambda n^2)} \right) \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.10)$$

От решения полученного в теории Кирхгофа-Клебша решение отличается вторым слагаемым в круглых скобках. Построим график (рис.3) влияния второго члена для квадратной стальной пластины.

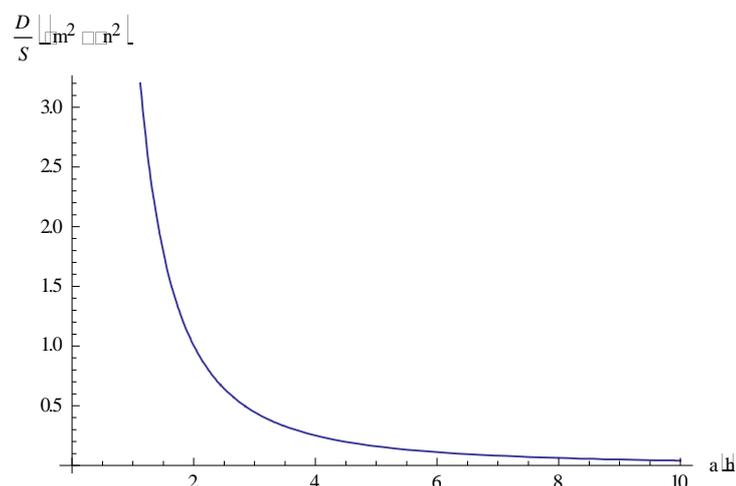


Рис. 3. График влияния второго члена для квадратной стальной пластины

Видно, что для тонких пластин деформацию поперечного сдвига можно не учитывать.

Подставляя (1.2.10) в (1.2.1) найдем угол поворота

$$\theta_x = - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda_m}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.11)$$

Согласно (1.2.5) поперечное усилие примет вид:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda_m}{\lambda m^2 + \lambda n^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.12)$$

Для Q_y аналогично. Выражения (1.1.12) и (1.2.12) совпадают. Таким образом, поперечные силы, найденные по теории Рейсснера, соответствуют обычным, а не обобщенным силам теории Кирхгофа-Клебша. При этом никаких особенностей в угловых точках не возникает. Вопреки соображениям, приведенным в [6] угловые силы следует считать фиктивными. В данной задаче разница между теориями Рейсснера и Кирхгофа-Клебша возникает только в прогибах :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{s \times (\lambda m^2 + \lambda n^2)} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.2.13)$$

Причем с уменьшением относительной толщины это разница уменьшается.

1.3. Теория Тимошенко-Миндлина

Теория пластин Тимошенко-Миндлина основана на двух следующих гипотезах:

1. Материальный элемент нормальный к срединной плоскости пластины при изгибе пластины не изменяет своей длины, остается прямолинейным

2. Нормальными напряжениями в слоях параллельных срединной плоскости можно пренебречь по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

В отличие от первой гипотезы теории Кирхгофа-Клебша материальный элемент нормальный к срединной плоскости до деформации после деформации может быть не ортогональным к деформированной срединной поверхности. Разрешающие уравнения теории пластин Тимошенко-Миндлина записываются относительно перемещения $w(x, y)$ и углов поворота нормали θ_x и θ_y :

$$\frac{c * E * h}{2 * (1 + \mu)} \times \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = 0 \quad (1.3.1)$$

$$D \times \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right) = \frac{c * E * h}{2 * (1 + \mu)} \times \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$D \times \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) = \frac{c * E * h}{2 * (1 + \mu)} \times \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Система (1.3.1) имеет шестой порядок по координате x и шестой по координате y , на каждом крае пластины должно быть задано по три граничных условия.

Решение ищем в виде:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \times \sin[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.3.2)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{xij} \times \cos[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.3.3)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{yij} \times \sin[\lambda m \times x] \times \cos[\lambda n \times y] \quad (1.3.4)$$

Граничные условия:

$$x = \text{const}: w = 0, M_x = 0 \quad (1.3.5)$$

$$y = \text{const}: w = 0, M_y = 0$$

Окончательно для прогибов получим:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \times \sin[\lambda m \times x] \times \sin[\lambda n \times y] \quad (1.3.6)$$

$$w_{ij} = \frac{p_0(c * E * h + 2 * D * (\lambda m^2 + \lambda n^2)(1 + \mu))}{c * D * E * h * (\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} = \frac{p_0}{D * (\lambda m^2 + \lambda n^2)^2} + \frac{p_0 * 2 * (1 + \mu)}{c * E * h * (\lambda m^2 + \lambda n^2)} \quad (1.3.7)$$

Моменты и усилия выражаются через углы поворота θ_x , θ_y и прогиб w следующим образом:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \quad (1.3.8)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right]$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}D(1-\mu) \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right]$$

$$Q_x = S \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = S \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

С учетом того, что: $G = \frac{E}{2 \times (1+\mu)}$ и $S=c \times G \times h$ получим Q_x :

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda m}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y] \quad (1.3.9)$$

Сравним полученные выражения в теориях Рейсснера и Тимошенко-Миндлина:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda m}{\lambda m^2 + \lambda n^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y]$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda m}{(\lambda m^2 + \lambda n^2)} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \times \text{Sin}[\lambda n \times y].$$

Видно, что они идентичны. Сравнение результатов решения данной задачи с использованием трех различных теорий показывает, что теория Кирхгофа-Клебша дает некоторые отличия в определении перемещений, которые убывают, по мере уменьшения относительной толщины пластины, совпадают так же обычные, а не обобщенные по Томпсону-Тэту силы.

2. Цилиндрический изгиб

2.1. Теория Кирхгофа-Клебша

Рассмотрим цилиндрический изгиб шарнирно-опертой пластины, находящей под нагрузкой, представленной рядом:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_0 \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.1.1)$$

Будем искать прогиб w в виде :

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \times \text{Cos}[\lambda m \times x].$$

С учетом граничных условий и разрешающего уравнения выражения для получим:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{D} \frac{1}{\lambda m^4} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.1.2)$$

Из уравнения (1.1.3) найдем моменты:

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_0 \frac{1}{\lambda m^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.1.3)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu \times p_0 \frac{1}{\lambda m^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x]$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2} D(1 - \mu) \left[-2 \times \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right] = 0$$

Соответственно поперечные усилия при подстановке (2.1.3) в (1.1.5) равны:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_0 \times \frac{1}{\lambda m} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \quad (2.1.4)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0.$$

Так как крутящий момент в данной задаче равен нулю, обобщенные силы получаются равными поперечным силам.

2.2. Теория Рейсснера

Примем потенциал φ в виде:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ijn} \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.2.1)$$

Потенциал ψ как и в предыдущем примере равен нулю.

Подставим ряд для φ в уравнение (1.2.2). Получим:

$$\varphi = p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{D \times \lambda m^4} \right) \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.2.2)$$

Подставим (2.2.2) в (1.2.3) найдем прогиб:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{D \times \lambda m^4} \left(1 + \frac{D \times \lambda m^2}{s} \right) \times \text{Cos}[\lambda m \times x] \quad (2.2.3)$$

Найдем угол поворота:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0 \times \lambda m}{D \times \lambda m^4} \times \text{Sin}[\lambda m \times y] \quad (2.2.4)$$

Подставим (2.2.3) и (2.2.4) в (1.2.5). Поперечные усилия примут вид:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{\lambda m} \times \text{Sin}[\lambda m \times x] \quad (2.2.5)$$

$$Q_y = 0.$$

Разница в прогибах между теориями: Рейсснера и классической:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_0}{S \times \lambda m^2} \times \text{Cos}[\lambda m \times x].$$

Таким образом, решение задачи о цилиндрическом изгибе с использованием двух теорий совпадают.

3. Изгиб пластины в поверхность отрицательной гауссовой кривизны

3.1. Теория Кирхгофа-Клебша

Рассмотрим пластину, нагруженную по краям изгибающими моментами, как показано на рисунке 4. Поверхность пластины свободна от поперечной нагрузки. Подобный изгиб пластины принято называть чистым [6]. В зависимости от направления моментов пластину можно изогнуть как в поверхность положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны В [6] такой изгиб называют кластическим и антикластическим соответственно.

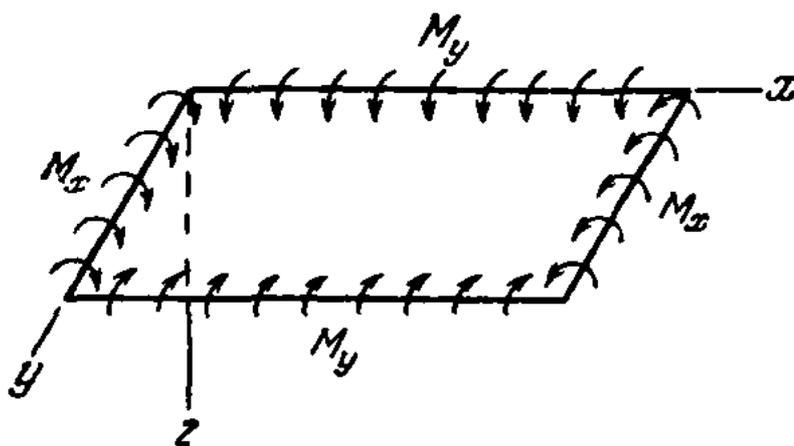


Рис. 4. Пластина, нагруженная по краям изгибающими моментами

Положим $M_2 = -M_1$ и подставим в (1.1.3). Получим уравнение поверхности, показанной на рисунке 5. :

$$w = -\frac{M_1}{2 \times D \times (1 - \mu)} \times (x^2 - y^2) \quad (3.1.1)$$

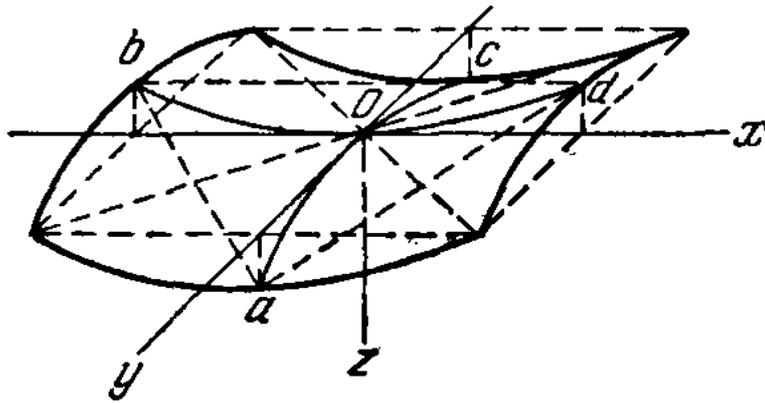


Рис. 5.

Подставим (3.1.1) в (1.1.5) и получим поперечные силы:

$$Q_x = 0 \quad (3.1.2)$$

$$Q_y = 0.$$

3.2. Теория Рейсснера

Решая эту задачу по теории Рейсснера, положим потенциал ψ , входящий в (1.2.4) равным нулю. Проникающий потенциал примем в виде:

$$\varphi = -A \times x^2 + C \times y^2 \quad (3.2.1)$$

Подставим (3.2.1) в (1.2.5) и найдем коэффициенты A и C:

$$A = -\frac{M_1}{2 \times D \times (1 - \mu)} \quad (3.2.2)$$

$$C = -\frac{M_1}{2 \times D \times (1 - \mu)}$$

Окончательно φ примет вид:

$$\varphi = -\frac{M_1}{2 \times D \times (1 - \mu)} \times (x^2 - y^2) \quad (3.2.3)$$

Подставим полученное выражение для проникающего потенциала в (1.2.3) и получим выражение для прогиба в виде:

$$w = -\frac{M_1}{2 \times D \times (1 - \mu)} \times (x^2 - y^2) \quad (3.2.4)$$

Из (3.2.4) видно, что прогиб, полученный по классической теории Кирхгофа-Клебша и Рейсснера одинаковые, поперечные силы так же равны нулю.

3.3. Теория Тимошенко-Миндлина

Изгибающие моменты по всей пластине при числом изгибе:

$$M_x = D \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] = M_1 \quad (3.3.1)$$

$$M_y = D \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] = -M_1$$

Разрешим систему уравнений (3.3.1) относительно углов поворота:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_1}{D \times (1 - \mu)} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = - \frac{M_1}{D \times (1 - \mu)}$$

Подставим систему (3.3.2) в уравнения (1.3.1). Так как углы поворота представляют собой линейные функции, то обнулится левая часть 2-ух последних уравнений. В итоге получим выражения для углов поворота, принятые в классической теории:

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3.3)$$

$$\theta_y = - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

И, следовательно, совпадающее решение.

4. Заключение

Решения, приведенные в настоящей статье, в целом согласуются с выводами работ [1-5]. Обобщенные перерезывающие силы не имеют физического смысла и силы в угловых точках, вытекающие из преобразования Томпсона-Тэта являются фиктивными. Вместе с тем в случаях, когда введение этого преобразования не является необходимым, теория Кирхгофа-Клебша дает результаты совпадающие или достаточно близкие к решениям по теориям Рейсснера и Тимошенко-Миндлина. Таким образом, существенную роль играет характер напряженно-деформированного состояния. Сравнительный анализ других случаев, например результатов известного эксперимента Надаи [6], требует применения численных методов.

Список литературы

1. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа С позиций современной теории пластин // Изв. АН МТТ. 1992 № 3. С.48-64.
2. Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразовании Кельвина-Тэта // Изв. АН МТТ. 1995 № 4. С. 134-140.
3. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. АН МТТ. 1992 № 3. С. 65-72.
4. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ // Изв. АН МТТ. 1998 № 3. С.46-58.

5. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта в классической теории пластин // Изв АН МГТ. 2012, №5. С. 98-107.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.635 с.