электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

 # 01, Январь 2016

УДК 629.05

Автономное определение азимута по показаниям акселерометров на базе 4-х осного гиростабилизатора

Онищенко А.А., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
факультет «Приборостроительный»,
кафедра «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации»

Ширков А.К., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
факультет «Приборостроительный»,
кафедра «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации»

Научный руководитель: Парсегов С.Г., заместитель генерального директора
Россия, 111024, г. Москва, Авимоторная ул., дом 55, ОАО «МЗЭМА»
fgup@mzema.ru

Оценка погрешности метода

Начальная выставка платформы – определение ее углового положения относительно географического трёхгранника осуществляется аналитически, путём измерения вектора ускорения свободного падения. Платформа находится в режиме стабилизации и сохраняет неизменное угловое положение, моделируя инерциальную систему координат. Из-за вращения Земли вектор g в системе координат платформы совершает вращательное движение и годограф вектора описывает конус. Положение вертикали места определяется измерением координат вектора g. Для определения направления на север требуется два измерения вектора ускорения свободного падения. Векторное произведение двух векторов g будет направлено по касательной к земному эллипсоиду и направлено на север как это показано на рис. 1.

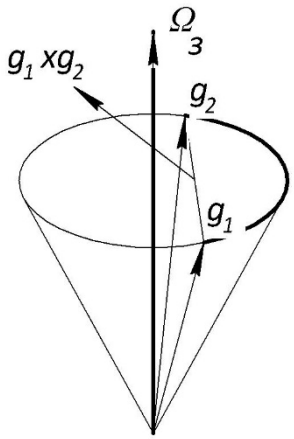

Рис. 1. Определение севера по двум измерениям

Для определения погрешности определения азимута, найдём погрешность определения векторного произведения двух векторов g. Одной из составляющих погрешности определения вектора является погрешность акселерометра, с которой измеряется вектор δg . Причина второй составляющей – собственный уход платформы $\delta\Omega$. Из-за ухода платформы два измерения вектора g производятся в разных системах координат, повёрнутых друг относительно на угол $\delta\Omega \cdot t$. Первое измерение вектора g в системе координат платформы в котором произведено второе измерение можно представить в виде суммы двух векторов. Первое измерение вектора g и погрешность δg_ω обусловленная поворотом платформы рис. 2

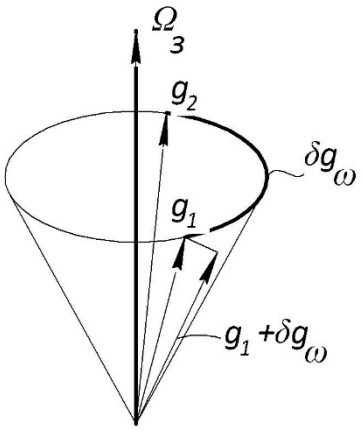

Рис. 2. Погрешность вызванная уходом платформы

При допущении о малости угла, составляющая вызванная уходом платформы определяется выражением:

$$\delta h \quad \delta g_\omega = g \cdot \delta\Omega \cdot t \, .$$

Погрешность векторного произведения найдём как разность векторного произведения измеренного с погрешностью и его идеального значения:

$$\Delta_{\times} = (\vec{g_1} + \vec{\delta g} + \vec{\delta g_{\omega}}) \times (\vec{g_2} + \vec{\delta g}) - \vec{g_1} \times \vec{g_2} \approx \vec{g_1} \times \vec{\delta g} + \vec{\delta g} \times \vec{g_2} + \vec{\delta g_{\omega}} \times \vec{g_2} .$$

Максимальная величина данной погрешности определяется выражением:

$$|\Delta_{\times}| = 2g \cdot \delta g + g^2 \cdot \delta\Omega \cdot t .$$

(Перемножаемые вектора попарно ортогональны, а результаты произведений - коллинеарны) Модуль векторного произведения двух векторов g:

$$|g_{\times}| = g^2 \cdot \Omega_{Земл} \cdot t \cdot \cos\phi .$$

Угловое отклонение при измерении азимута:

$$\Delta\alpha = \frac{|\Delta_{\times}|}{|g_{\times}|} = \frac{2\delta g}{\Omega_{Земл} \cdot \cos\phi \cdot t} + \frac{\delta\Omega}{\Omega_{Земл} \cdot \cos\phi} .$$

На рис. 3 представлен график погрешности определения азимута в зависимости от времени между двумя измерениями для двух значений широты.

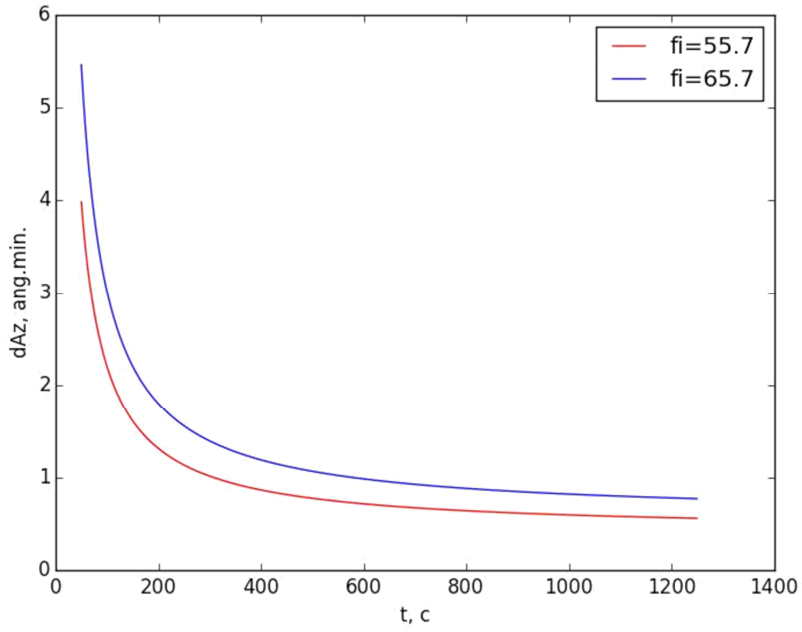

Рис. 3. Погрешность начальной выставки

Для экспериментальной проверки точности определения азимута необходимо знать точное направление на север в системе координат связанной с платформой. Так как определение этого значения может оказаться затруднительно, а так же по причине ухода платформы предлагается в качестве показателя точности определения азимута использовать точность определения широты места проведения испытания, которое хорошо известно. Это допустимо ввиду того, что значения погрешности определения

широты и погрешности определения азимута при широтах 30…60 [град] имеют одинаковый порядок.

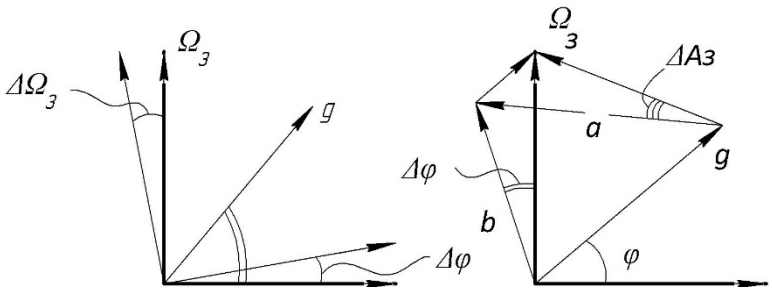

Рис. 4. Связь погрешности широты и азимута

Как показано на рис. 4 максимальная погрешность определения широты совпадает с погрешность определения положения оси вращения Земли.

Отклонение расчётной оси от действительной связанно с погрешность определения азимута:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta Аз} = \frac{a}{b} = \cos\phi \Rightarrow \Delta Аз = \frac{\Delta\phi}{\cos\phi}.$$

Таким образом на средних широтах для экспериментальной проверки точности выставки достаточно определить широту места проведения испытаний и сравнить её с действительным значением.

Алгоритм начальной выставки

В системах работающих в реальном времени мы не ограничены двумя измерениями вектора g. Измерение вектора производится с известной и фиксированной частотой ν. Основная задача - по известному массиву данных измерений определить положение географической системы координат в системе координат платформы. Для нахождения вектора оси вращения земли $\overrightarrow{Oz}$ достаточно решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \overrightarrow{g_1}\cdot\overrightarrow{Oz} = |g_1|\sin\phi \\ \overrightarrow{g_2}\cdot\overrightarrow{Oz} = |g_2|\sin\phi \\ (\overrightarrow{g_1}\times\overrightarrow{g_2})\cdot\overrightarrow{Oz} = |(g_1\times g_2)|\cdot\cos\phi \end{cases}, \quad (2)$$

где $\overrightarrow{Oz}$ – искомый вектор.

Вектор направления на север $\vec{N}$ находится из следующей системы:

$$\begin{cases} \vec{N} \cdot (\overrightarrow{g_2} \times \overrightarrow{Oz}) = 0 \\ \vec{N} \cdot \overrightarrow{g_2} = 0 \\ \vec{N} \cdot \overrightarrow{Oz} = \cos\phi \end{cases} . \qquad (3)$$

Для проверки точности выставки через нахождение широты можно определять широту по формуле:

$$\phi = \arccos(\arccos(\frac{\overrightarrow{g_1} \cdot \overrightarrow{g_2}}{|g_1| \cdot |g_2|}) / \Omega_{Земл} \cdot T) . \qquad (4)$$

Компьютерное моделирование испытаний

Для проверки работы данного алгоритма определения азимута были сгенерированы файлы с входными данными моделирующими данные полученные с акселерометров, установленных на гиростабилизаторе. В первом приближении будем считать, что уход платформы с индикаторной стабилизацией определяется уходом гироскопов. В таком случае можно считать, что скорость ухода платформы – постоянный вектор в системе координат платформы. Вектор угловой скорости Земли в этой системе координат совершает вращение вокруг этого вектора. Движение вектора g в системе координат платформы является решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_x = \omega_z \cdot \Omega_y - \omega_y \cdot \Omega_z \\ \dot{\Omega}_y = \omega_x \cdot \Omega_z - \omega_z \cdot \Omega_x \\ \dot{\Omega}_z = \omega_y \cdot \Omega_x - \omega_x \cdot \Omega_y \\ \dot{g}_x = \Omega_z \cdot g_y - \Omega_y \cdot g_z \\ \dot{g}_y = \Omega_x \cdot g_z - \Omega_z \cdot g_x \\ \dot{g}_z = \Omega_y \cdot g_x - \Omega_x \cdot g_y \end{cases} ,$$

где ω_i – постоянная величина равная уходу i-го гироскопа, Ω_i - координата оси вращения Земли в с.к. платформы. Случайная погрешность добавляется пересчётом координат вектора g по формуле

$$g_i = g_i + g_i \cdot \delta g ,$$

где δg случайная величина, распределенная по нормальному закону с мат. ожиданием равным нулю и средним квадратичным отклонением σ_g . Пример графика входных данных приведён на рис. 5.

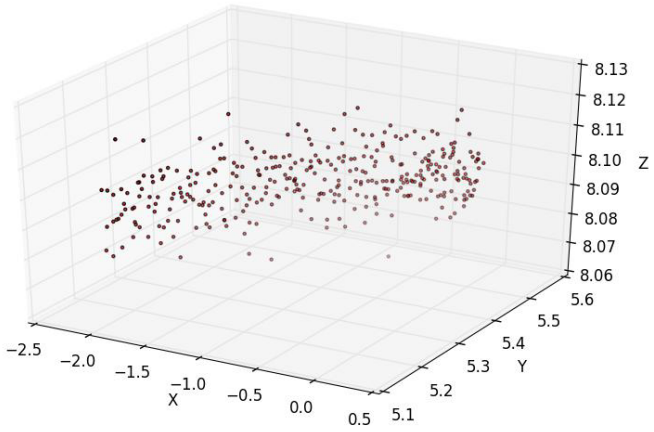

Рис. 5. Моделирование показаний акселерометров

Результаты использования решения СЛАУ в зависимости от интервала между измерениями приведены на графике рис. 6. Сплошной линией показан график соответствующий уравнению 1 при тех же условиях ($\delta\omega$ = 0, σ_g = 0.001).

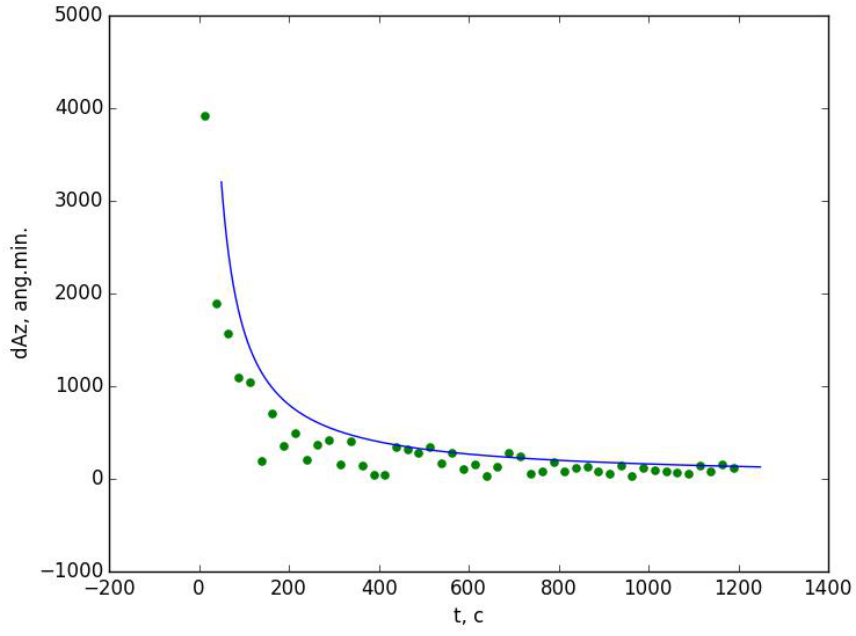

Рис. 6. Зависимость погрешности от интервала измерений

Для уменьшения влияния случайной составляющей погрешности измерений очевидным решением является применение фильтрации сигналов акселерометров. Так как нам известен вид движения измеряемого вектора, на основании предыдущих измерений

мы можем «предсказывать» следующее измерение вектора g. И далее использовать это значение для уменьшения погрешности измерений. Для решения задачи фильтрации сигнала будем использовать фильтр Калмана. [1]

Фильтр калмана

В фильтре Калмана истинное состояние в момент k получается из истинного состояния в момент k-1 в соответствии с уравнением:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k,$$

где $\mathbf{F}_k$ – матрица эволюции процесса/системы, которая воздействует на вектор; $\mathbf{B}_k$ – матрица управления, которая прикладывается к вектору управляющих воздействий; $\mathbf{w}_k$ – нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{Q}_k$.

В момент k производится наблюдение (измерение) $\mathbf{z}_k$ истинного вектора состояния $\mathbf{x}_k$, которые связаны между собой уравнением:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{H}_k$-матрица измерений, связывающая истинный вектор состояния и вектор произведённых измерений, vk — белый Гауссовский шум измерений с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_k$.

Начальное состояние и векторы случайных процессов на каждом такте считаются независимыми.

Состояние фильтра задаётся двумя переменными:

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ — апостериорная оценка состояния объекта в момент k полученная по результатам наблюдений вплоть до момента k включительно (в русскоязычной литературе часто обозначается $\hat{\mathbf{x}}_k$, где ^ означает «оценка», а k — номер такта, на котором она получена);
- $\mathbf{P}_{k|k}$ — апостериорная ковариационная матрица ошибок, задающая оценку точности полученной оценки вектора состояния и включающая в себя оценку дисперсий погрешности вычисленного состояния и ковариации, показывающие выявленные взаимосвязи между параметрами состояния системы (в русскоязычной литературе часто обозначается $\mathbf{D}_k$).

Итерации фильтра Калмана делятся на две фазы: экстраполяция и коррекция. Во время экстраполяции фильтр получает предварительную оценку на следующий такт по итоговой оценке текущего шага. В фазе коррекции априорная экстраполяция дополняется соответствующими текущими измерениями для коррекции оценки.

Этап экстраполяции

Экстраполяция (предсказание) вектора состояния системы по оценке вектора состояния и применённому вектору управления с шага (k-1) на шаг k:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k .$$

Ковариационная матрица для экстраполированного вектора состояния:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k .$$

Этап коррекции

Отклонение полученного на шаге k наблюдения от наблюдения, ожидаемого при произведённой экстраполяции:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} .$$

Ковариационная матрица для вектора отклонения (вектора ошибки):

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k .$$

Оптимальная по Калману матрица коэффициентов усиления, формирующаяся на основании ковариационных матриц имеющейся экстраполяции вектора состояния и полученных измерений (посредством ковариационной матрицы вектора отклонения):

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} .$$

Коррекция ранее полученной экстраполяции вектора состояния — получение оценки вектора состояния системы:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k .$$

Расчёт ковариационной матрицы оценки вектора состояния системы:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (I - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} .$$

Составим перечисленные матрицы применительно к нашей системе. Начальный вектор измерения:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} .$$

Модель погрешности акселерометра:

$$\Delta a = a\delta h + \delta a,$$

где δh – погрешность масштабного коэффициента и – смещение нуля будем считать случайными величинами с нормальным распределением. Ковариационная матрица ошибок будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} \delta h & 0 & 0 \\ 0 & \delta h & 0 \\ 0 & 0 & \delta h \end{bmatrix}.$$

Матрица измерений Hk - единичная матрица. Вектор шума измерений и соответствующая ему матрица:

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta a \\ \delta a \end{bmatrix}, \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \delta a & 0 & 0 \\ 0 & \delta a & 0 \\ 0 & 0 & \delta a \end{bmatrix}.$$

Матрица управления Bk отсутствует т.к. нет управляющего воздействия. На k-1 шаге мы получаем вектор g, модуль которого нам известен с большой точностью заранее. При прогнозировании следующего измерения мы совершаем поворот этого вектора вокруг оси вращения Земли. Ошибка совершаемая при этом направлена перпендикулярно вектору. В таком случае проекция погрешности на оси координат будет пропорциональна синусу угла между вектором g и соответствующей осью.

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \delta g \cdot \sqrt{1 - \frac{X_k}{|X_k|}^2} \\ \delta g \cdot \sqrt{1 - \frac{Y_k}{|Y_k|}^2} \\ \delta g \cdot \sqrt{1 - \frac{Z_k}{|Z_k|}^2} \end{bmatrix}.$$

Погрешность δg определится как $\delta g = g \cdot \delta h$

Матрица эволюции системы представляет собой матрицу поворота вектора g вокруг оси вращения Земли. Матрица поворота вокруг произвольной оси на угол θ [2]:

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)x^2 & (1-\cos\theta)xy - (\sin\theta)z & (1-\cos\theta)xz + (\sin\theta)y \\ (1-\cos\theta)yx + (\sin\theta)z & \cos\theta + (1-\cos\theta)y^2 & (1-\cos\theta)yz - (\sin\theta)x \\ (1-\cos\theta)zx - (\sin\theta)y & (1-\cos\theta)zy + (\sin\theta)x & \cos\theta + (1-\cos\theta)z^2 \end{bmatrix},$$

где для нашей задачи угол θ равен $\Omega_{Земл} \cdot T$, а x,y,z - координаты оси вращения Земли.

Применение фильтрации

В начальный момент времени положение оси вращения Земли неизвестно поэтому начало фильтрации начинается через время t после начала измерений. Далее использую метод решения СЛАУ определяется первое приближенное положение оси и на следующем шаге начинает работу фильтр. После получения отфильтрованного значения вектора g снова определяется положение оси вращения Земли. Так как для измерения оси вращения Земли используется два измерения вектора g, фильтр Калмана для уточнения положения оси имел бы шестую размерность матриц. Так же мы не можем заранее предположить следующее измерение оси. Поэтому для последовательного приближения к истинному положению оси будем пользоваться следующим соотношением:

$$\Omega_k = K \cdot \Omega_{изм} + (1-K) \cdot \Omega_{k-1},$$

где коэффициент К выбирается из интервала от 0 до 1.

После уточнения положения оси вращения Земли, новое положение используется для дальнейшей фильтрации измерений вектора g.

На рис. 7 представлено сравнение результатов фильтрованного и не фильтрованного результата. В таблице 1 представлены результаты обработки этим алгоритмом входных данный с различными параметрами.

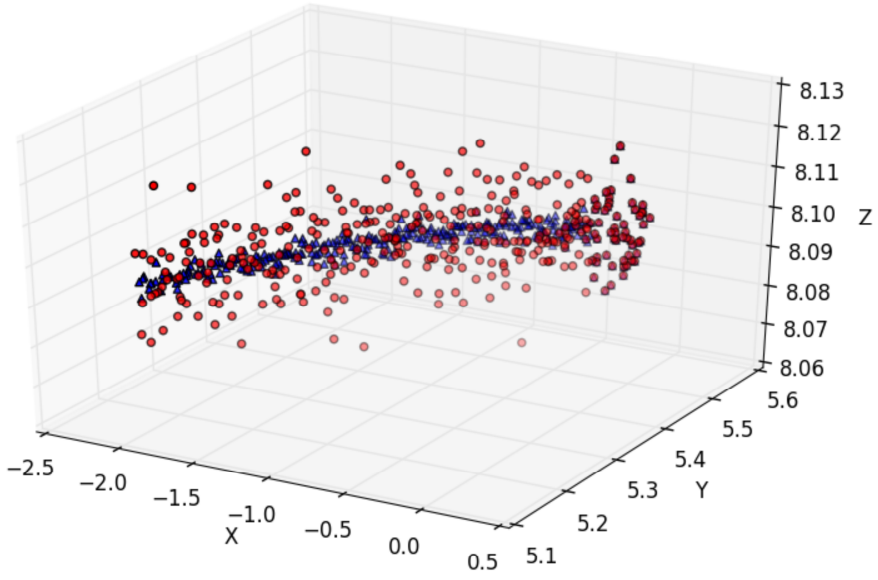

Рис. 7. Результат фильтрации сигнала

Параметры модели	Погрешность азимута, угл.мин.	Погрешность широты, угл. мин.
$\sigma_g = 0.001,\ \delta\omega = 0$	7.411	39.87
$\sigma_g = 0.0001,\ \delta\omega = 0$	0.72	4.01
$\sigma_g = 0.00001,\ \delta\omega = 0$	0.071	0.4
$\sigma_g = 0,\ \delta\omega = 0.1$	14.85	14.58
$\sigma_g = 0.001,\ \delta\omega = 0.1$	24.83	21.98
$\sigma_g = 0.0001,\ \delta\omega = 0.1$	17.16	18.58
$\sigma_g = 0.001,\ \delta\omega = 0.01$	1.8	5.47
$\sigma_g = 0.0001,\ \delta\omega = 0.01$	1.23	1.86
$\sigma_g = 0.00001,\ \delta\omega = 0.001$	0.44	0.55

Список литературы

[1] Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. 1960. №82. D. P. 35—45.

[2] Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 824 с.

[3] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, Chris G. Bartone global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration. Wiley-Interscience, 2013. 608 p.