

02, февраль 2016

УДК 539.3

Исследование удара в плоском движении стержня при учете трения компьютерным способом

Подгуйко Н.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Плазменные энергетические установки»*

Скворцов В.В., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Плазменные энергетические установки»*

Научный руководитель: Дубровина Г.И., к.ф.-м.н., доцент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Теоретическая механика»*

bauman@bmstu.ru

Постановка задачи

Тонкий однородный стержень массой $m = 5,0$ кг, длиной $AB = 2l$ ($l = 1,0$ м), в точке D опирается на вертикальную стену, в точке A на поверхность OA (рис. 1). Высота стенки $OD = h = 1$ м. В начальный момент времени стержень находится в покое и угол между стержнем AB и поверхностью OA составляет $\varphi_0 = 45^\circ$. Расстояние от вертикальной стенки до выступа $OE = 2l$. Коэффициенты трения f в точках A и D считать равными. Ускорение свободного падения g положить равным $g = 9,81 \frac{м}{с^2}$. Найти:

1) f_{min} – минимальный коэффициент трения, при котором стержень ещё ударится о стенку DO (касание точкой B стенки DO);

2) Потери кинетической энергии при ударе о малый выступ E при коэффициенте трения $f_{E1} = \frac{f_{min}}{5}$. Считать, что точка A при ударе неподвижна (При условии, что скольжения в точке A стержня не происходит);

3) f_{E2} – коэффициент трения, при котором потери кинетической энергии стержня после удара о вертикальную стенку равны потерям кинетической энергии при ударе о выступ. Считать, что стержень после удара не отрывается от стенок и продолжает скользить.

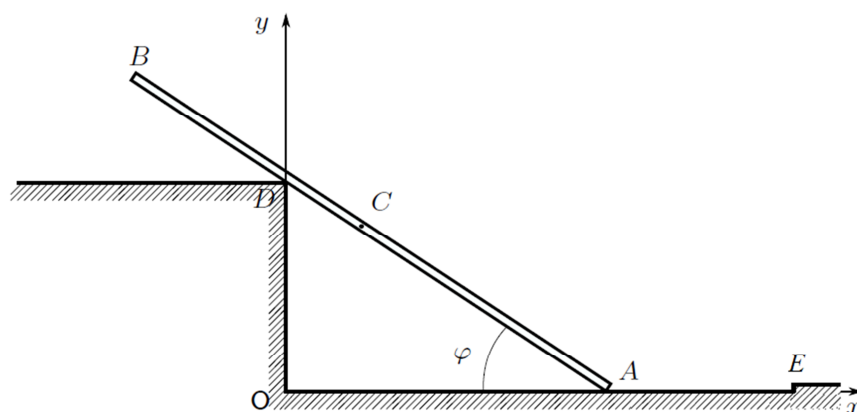


Рис. 1. Условие задачи

Решение

Чтобы приступить к решению первого пункта задачи, найдем диапазон значений для коэффициента трения f , при которых возможен удар стержня о вертикальную стенку.

Найдем коэффициент трения, при котором стержень:

- a) придет в движение;
- b) соскочит с угла D.

a) Определение максимального коэффициента трения f_0 , при котором стержень придет в движение.

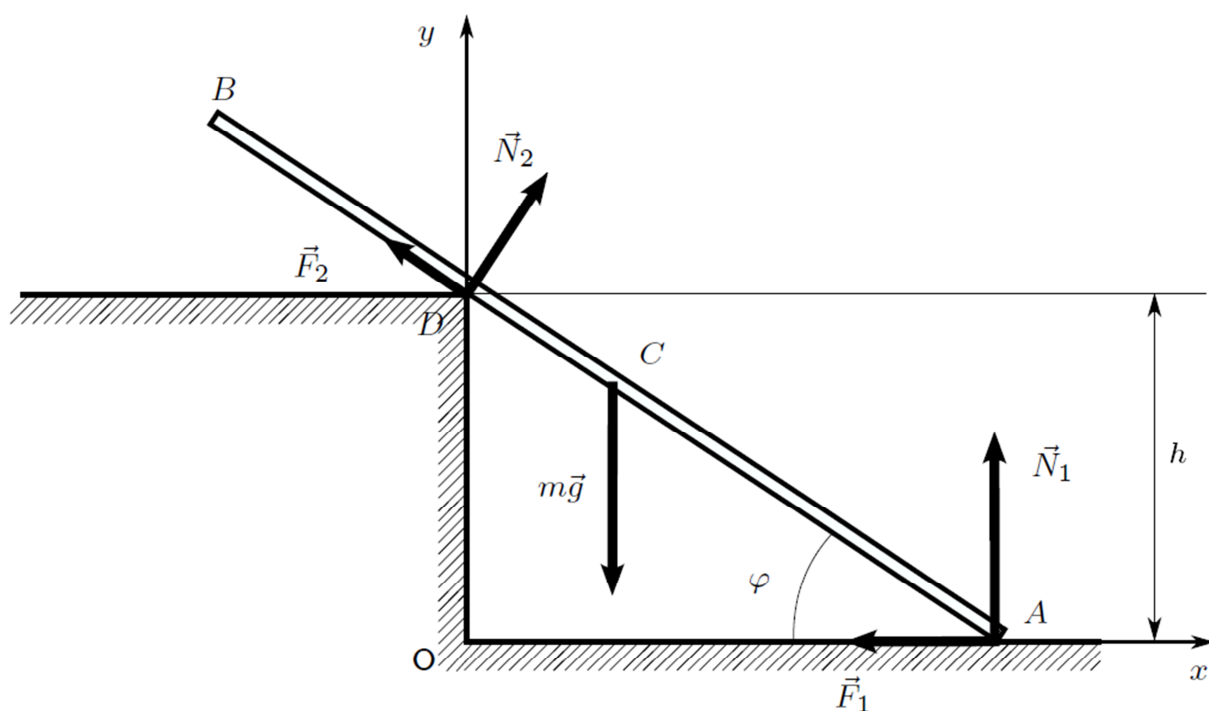


Рис. 2. Расчетная схема к пункту а)

Запишем уравнения равновесия для стержня в произвольном начальном положении в соответствии с рис.2:

$$\sum_k F_{kx} = N_2 \sin(\varphi) - F_1 - F_2 \cos(\varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = N_1 + N_2 \cos(\varphi) + F_2 \sin(\varphi) - mg = 0, \quad (2)$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = mgl \cos(\varphi) - N_2 \frac{h}{\sin(\varphi)} = 0. \quad (3)$$

Условие отсутствия проскальзывания:

$$|F_1| \leq N_1 f_0, \quad (4)$$

$$|F_2| \leq N_2 f_0. \quad (5)$$

Чтобы найти максимальный коэффициент трения f_0 , при котором стержень начнет скользить, положим в условиях (4) и (5) знак равенства. Решая систему алгебраических уравнений приходим к следующему соотношению:

$$(1 + f^2) \sin(2\varphi) \cos(\varphi) = \frac{2h}{l} f_0. \quad (6)$$

Из последнего следует:

$$f_0 = \frac{\frac{h}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{l}\right)^2 - (\sin(2\varphi) \cos(\varphi))^2}}{\sin(2\varphi) \cos(\varphi)}. \quad (7)$$

Из равенств (7) выбираем меньший корень, т.к. при подстановки значений получаем один из коэффициентов трения больше единицы, что невозможно для большинства твердых веществ.

б) Определение максимального коэффициента трения f_1 , при котором конец В стержня соскочит с опоры D.

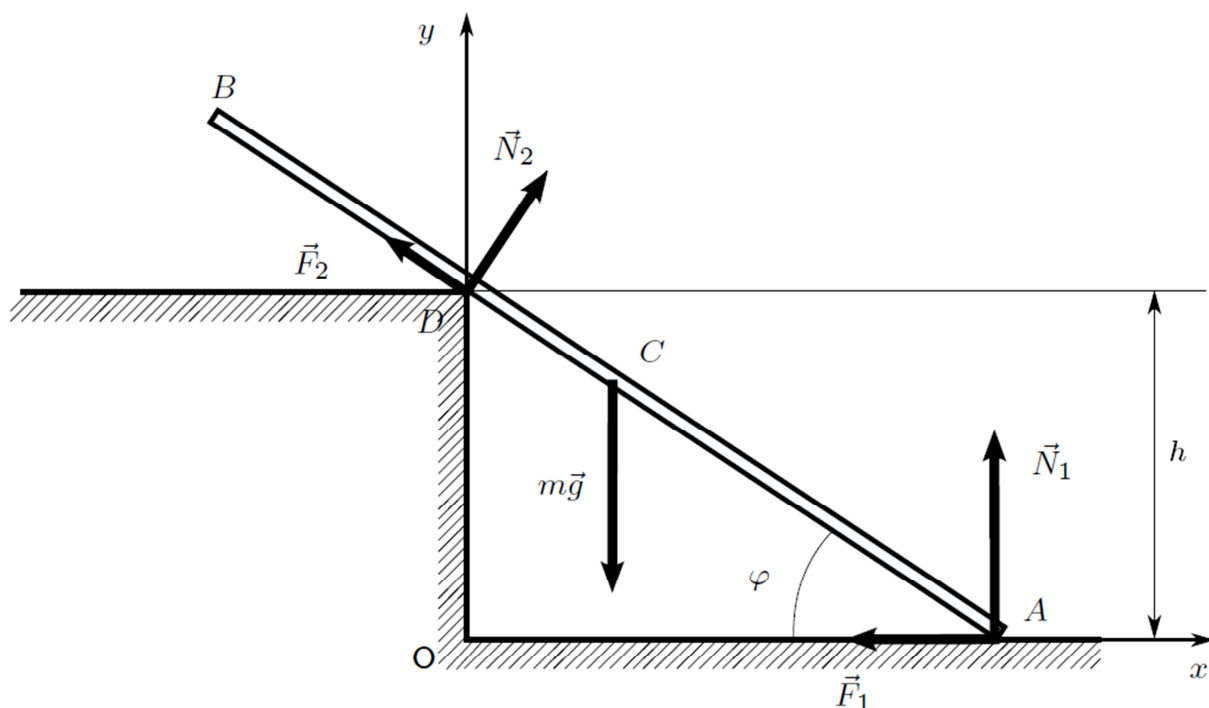


Рис. 3. Расчетная схема к пункту б

Во время скольжения стержня по углу В система имеет одну степень свободы. Возьмем за обобщенную координату угол φ . Тогда стержень соскользнет при условии, что в момент нахождения конца стержня В в точке D ($\varphi = \varphi_1 = \arcsin(\frac{h}{2l})$), угловая скорость стержня – больше нуля, т.е. $\dot{\varphi} \geq 0$. Рассмотрим предельный случай, когда $\dot{\varphi} = 0$, что будет соответствовать максимальному коэффициенту трения f_1 .

Запишем уравнения плоского движения для стержня в соответствии с расчетной схемой (рис. 3):

$$m\ddot{x}_C = N_2 \sin(\varphi) - F_1 - F_2 \cos(\varphi), \quad (8)$$

$$m\ddot{y}_C = N_1 + N_2 \cos(\varphi) + F_2 \sin(\varphi) - mg, \quad (9)$$

$$J_C \ddot{\varphi} = -N_1 l \cos(\varphi) + N_2 \left[\frac{h}{\sin(\varphi)} - l \right] + F_1 l \sin(\varphi). \quad (10)$$

Дополнительные соотношения получим из геометрических связей:

$$x_C = h \operatorname{ctg}(\varphi) - l \cos(\varphi), \quad (11)$$

$$y_C = l \sin(\varphi). \quad (12)$$

Дважды дифференцируя равенства (11) и (12), получим:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi} \left(l \sin(\varphi) - \frac{h}{\sin^2(\varphi)} \right) + \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2h \cos(\varphi)}{\sin^3(\varphi)} + l \cos(\varphi) \right), \quad (13)$$

$$\ddot{y}_C = \ddot{\varphi} l \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 l \sin(\varphi). \quad (14)$$

Так как на данном этапе стержень скользит то силы трения соответственно равны:

$$F_1 = N_1 f_1, \quad (15)$$

$$F_2 = N_2 f_1. \quad (16)$$

Из условия однородности стержня можно записать:

$$J_C = \frac{1}{12} m l^2. \quad (17)$$

Подставив уравнения (13) – (17) в (8) – (10) получим систему дифференциальных уравнений. Запишем систему в матричном виде:

$$A \bar{y} = \bar{b}, \quad (18)$$

где матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} m \left(\frac{h}{\sin^2(\varphi)} - l \sin(\varphi) \right) & -f_1 & \sin(\varphi) - f_1 \cos(\varphi) \\ -m l \cos(\varphi) & 1 & \cos(\varphi) + f_1 \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{12} m l^2 & l(f_1 \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) & \left(\frac{h}{\sin(\varphi)} - l \right) \end{bmatrix},$$

столбец свободных членов

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} m \omega^2 \left(\frac{2h \cos(\varphi)}{\sin^3(\varphi)} + l \cos(\varphi) \right) \\ m(g - \omega^2 l \sin(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

столбец неизвестных

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}.$$

Система ОДУ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon. \end{cases} \quad (19)$$

Системы уравнений (18) и (19) используем для решения задачи методом подбора коэффициента трения для получения необходимых конечных кинематических параметров стержня, а именно:

Задав начальные условия для переменных φ и ω , а также некоторую величину коэффициента трения (например, $f_1=0$), с помощью системы (18) определяем угловое ускорение стержня ε . Далее используя численный метод решения системы дифференциальных уравнений (например, метод Эйлера), интегрируем систему ОДУ (19). Количество итераций ограничено условием задачи. В данном пункте это условие на координату конца стержня В по оси “х”, она должна быть равна 0, так как это – координата угла ступеньки. Проверяя выполняется ли условия покоя стержня, т.е. равенство нулю угловой скорости, увеличиваем коэффициент трения на заданный точностью шаг в случае невыполнения последнего условия и интегрируем систему ОДУ заново с новым коэффициентом трения. В противном случае выводим ответ.

1. Определение минимального коэффициент трения f_{min} , при котором стержень ударится о стенку DO (касание точкой B стенки DO).

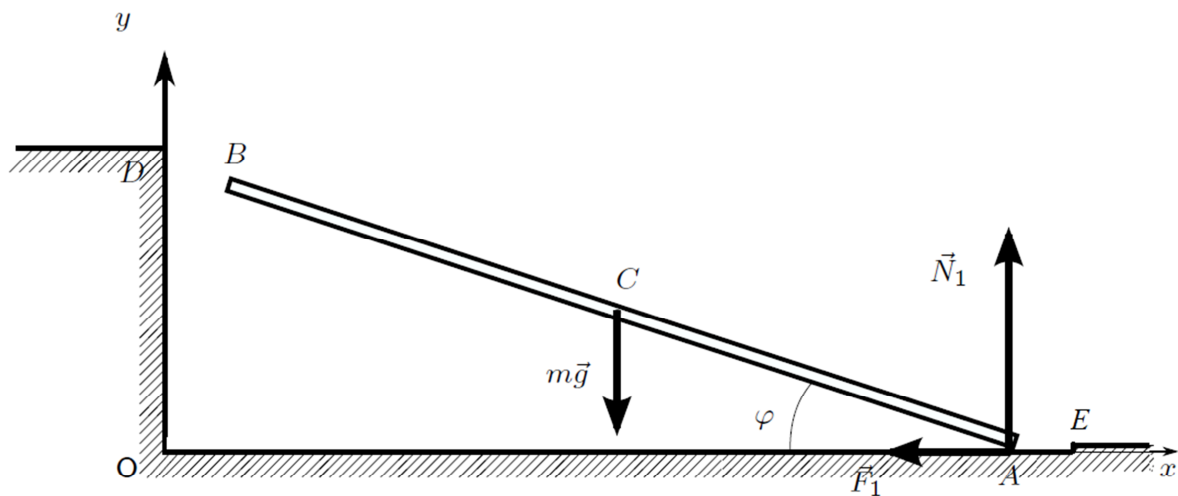


Рис. 4. Расчетная схема к пункту 1

Запишем уравнения плоского движения для стержня в соответствии с расчетной схемой (рис.4):

$$m\ddot{x}_C = -F_1, \quad (20)$$

$$m\ddot{y}_C = N_1 - mg, \quad (21)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_1 l \sin(\varphi) - N_1 l \cos(\varphi). \quad (22)$$

Геометрические связи дают следующее уравнение:

$$y_C = l \sin(\varphi). \quad (23)$$

Дважды дифференцируя (23), получим:

$$\ddot{y}_C = \ddot{\varphi} l \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 l \sin(\varphi). \quad (24)$$

Для силы трения можем записать:

$$F_1 = N_1 f_{min}. \quad (25)$$

Аналогично предыдущему пункту из уравнений (20) – (25) получим систему дифференциальных уравнений. Запишем систему в матричном виде:

$$A\bar{y} = \bar{b}, \quad (26)$$

где матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} -m & 0 & -f_{min} \\ 0 & -ml \cos(\varphi) & 1 \\ 0 & -\frac{1}{12}ml^2 & l(f_{min} \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{bmatrix},$$

столбец свободных членов

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ m(g - \omega^2 l \sin(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

столбец неизвестных

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} a \\ \varepsilon \\ N_1 \end{bmatrix},$$

где $a = \ddot{x}_C$ – ускорение центра масс по горизонтали.

Система ОДУ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \\ \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = a. \end{cases} \quad (27)$$

Удар о стенку произойдет при условии $x_A \leq 2l * \cos(\varphi)$. Также необходимо учесть, что в случае остановки крайней точки стержня А, сила трения скольжения перейдет в силу трения покоя и появиться дополнительное уравнение связи:

$$x_C = x_A - l \cos(\varphi), \quad (28)$$

где x_A – расстояние от стенки до точки А по оси “х”.

Дважды дифференцируя (28), получим:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi}l \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 l \cos(\varphi). \quad (29)$$

Решая систему уравнений (20) – (22) совместно с (24) и (29) получим выражения для определения силы трения покоя, нормальной реакции и углового ускорения:

$$F_1 = \frac{3}{8}mg \sin(2\varphi) - m\dot{\varphi}^2 l \cos(\varphi), \quad (30)$$

$$N_1 = mg - \frac{3}{8}mg \cos^2(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 l \sin(\varphi), \quad (31)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{4}\frac{g}{l} \cos(\varphi). \quad (32)$$

При условии, что:

$$|F_1| \leq f_2 N_1. \quad (33)$$

Чтобы определить минимальный коэффициент трения f_{min} , при котором стержень ещё удариться о вертикальную стенку используем аналогичный метод подбора, что был использован в предыдущем пункте. Начальные условия, необходимые для интегрирования системы дифференциальных уравнений (27) находим из решения системы уравнений (19) (до момента $\varphi = \varphi_1$) для текущего коэффициента трения. При $\varphi < \varphi_1$ на каждом шаге итерации интегрирования системы ОДУ необходимо проверять условие остановки крайней правой точки стержня А, а так же условие отсутствия удара о выступ Е ($x_A < OE$). В случае если $v_A = v + \dot{\varphi}l \sin(\varphi) = 0$, необходимо использовать уравнения (30) – (32) для дальнейших расчетов, используя последние данные (кинематические параметры) как начальные. При этом проверять условие (33), в случае невыполнения последнего, переходить на исходную систему уравнений.

Исследование удара.

Удар может быть вызван действием ударного импульса или мгновенным наложением или снятием связей. За время удара скорости точек тела изменяются на конечную величину, а в опорах возникают импульсы ударных реакций. Определение импульсов ударных сил реакций, скоростей точек тел после удара необходимо для исследования дальнейшего движения тела или системы тел, для определения прочности элементов конструкций.

В качестве модели удара выбрана модель Гюйгенса-Ньютона, в которой интегрально учитываются потери энергии при появлении местных упругопластических деформаций.

При этом связи в механической системе при ударе можно классифицировать:

- 1) Связи, существующие до удара, во время и после него.
- 2) Связи, не существующие до удара и возникающие во время удара и сохраняющиеся после удара.
- 3) Связи, существующие до удара, сохраняющиеся во время удара и не сохраняющиеся после удара.
- 4) Связи, существующие только во время удара, но не сохраняющиеся после него.

Для определения скоростей точек тела после удара применяются общие теоремы динамики при ударе.

Теорема об изменении количества движения системы при ударе:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)}$$

Или

$$M(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)},$$

где M – масса системы материальных точек, $\bar{Q}_0, \bar{Q}$ – количество движения механической системы соответственно до и после удара, $\bar{u}_C, \bar{v}_C$ – скорости центра масс системы до и после удара соответственно, $\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^{(e)}$ – главный вектор импульсов внешних ударных сил.

При непоступательном движении тел используют *теорему об изменении главного момента количеств движения системы при ударе*:

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_0 \left(\bar{S}_k^{(e)} \right),$$

где $\bar{K}_0, \bar{K}_0^{(0)}$ – главные моменты количеств движения системы после и до удара соответственно, $\sum_{k=1}^N \bar{M}_0 \left(\bar{S}_k^{(e)} \right)$ – главный момент внешних ударных импульсов сил.

Для определения скоростей тел после удара удобно применять *общее уравнение механике при ударе*:

$$\sum_{k=1}^N \left(\bar{S}_k^{(e)} - m_k \Delta \bar{v}_k \right) \cdot \delta \bar{r}_k = 0,$$

где $\bar{S}_k^{(e)}$ – ударный активный импульс, приложенный в точке M_k , $\Delta \bar{v}_k = \bar{u}_k - \bar{v}_k$ – изменение скорости точки M_k при ударе, $\delta \bar{r}_k = (\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k)$ – вариация радиуса-вектора точки M_k .

Гипотеза Рауса при ударе: условие отсутствия проскальзывания при ударе

$$|S_\tau| \leq S_{\tau max} = f S_n,$$

где f – коэффициент трения скольжения при ударе, S_τ, S_n – соответственно касательные и нормальные импульсы ударных реакций.

При наличии проскальзывания

$$|S_\tau| = S_{\tau max} = f S_n.$$

2. Определение потери кинетической энергии при ударе о малый выступ при

$$f_1 = \frac{f_2}{5}.$$

Для определения кинематических параметров непосредственно до удара стержня о выступ выполняем вычисления по системам уравнений представленных выше до тех пор, пока координата точки А по горизонтали не станет больше или равной длине стержня, т.е. $x_A \geq 2l$.

Расчет с предложенными входными параметрами показал, что удар происходит в точке, т.е. стержень не успевает упасть на горизонтальную плоскость ($\varphi_{уд} = 0.22355$).

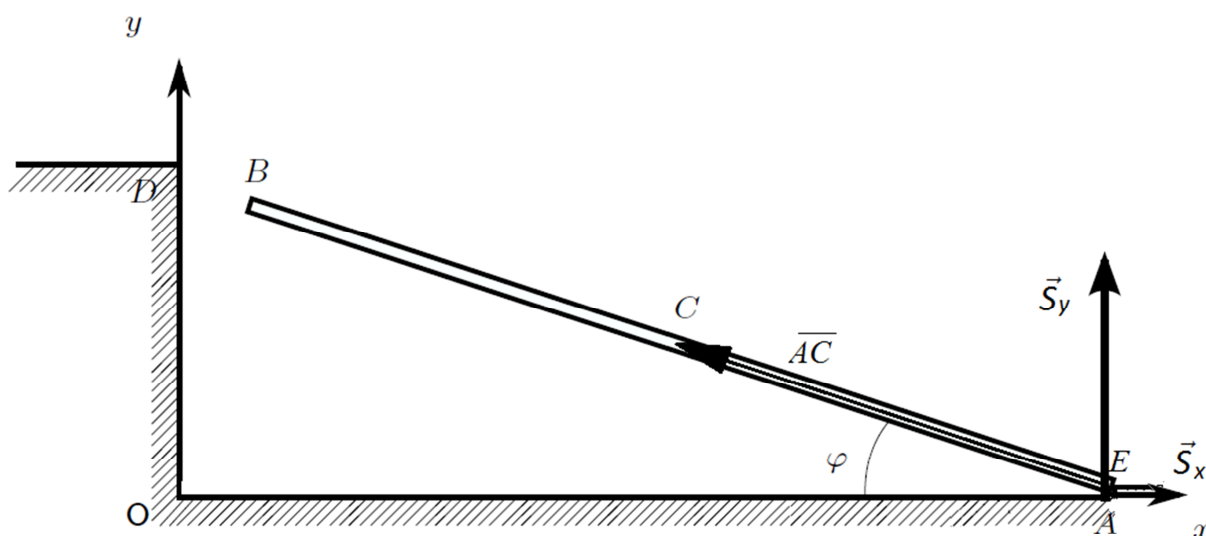


Рис. 5. Расчетная схема к пункту 2

Запишем изменение кинетического момента стержня при ударе:

$$K_A^1 - K_A^0 = \sum_k M(\bar{S}) = 0, \quad (34)$$

где индекс 1 – соответствует параметрам после удара, а 0 – до удара.

Из (34) получаем:

$$K_A^1 = K_A^0. \quad (35)$$

Запишем уравнение связи до удара и продифференцируем его:

$$y_C = l \sin(\varphi), \quad (36)$$

$$\dot{y}_C = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}. \quad (37)$$

Кинетический момент относительно неподвижной точки А определяется по формуле (рис 5):

$$\vec{K}_A = \vec{K}_C + [\vec{AC}; m\vec{v}_C].$$

Тогда с учетом (37) для кинетического момента до удара имеем:

$$K_A^0 = J_C \omega_0 + (r_x \dot{y}_C^0 - r_y \dot{x}_C^0) m = J_C \omega_0 + (-l^2 \cos^2(\varphi) \omega_0 - l \sin(\varphi) \dot{x}_C^0) m,$$

где $r_x = AC_x = -l \cos(\varphi)$, $r_y = AC_y = l \sin(\varphi)$.

Уравнения связей и их производные по времени после удара имеют вид:

$$y_C = l \sin(\varphi), \quad (38)$$

$$\dot{y}_C = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \quad (39)$$

$$x_C = x_A - l \cos(\varphi), \quad (40)$$

$$\dot{x}_C = l \sin(\varphi) \dot{\varphi}. \quad (41)$$

С учетом уравнений связи (39) и (41) кинетический момент после удара:

$$K_A^1 = J_C \omega_1 + (r_x \dot{y}_C^1 - r_y \dot{x}_C^1) m = J_C \omega_1 - l^2 m \omega_1.$$

Запишем кинетическую энергию стержня до и после удара:

$$T^0 = \frac{m[(\dot{x}_C^0)^2 + (\cos(\varphi)\omega)^2]}{2} + J_C \frac{\omega_0^2}{2},$$

$$T^1 = (J_C + ml^2) \frac{\dot{\omega}_1^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии при ударе соответственно равно $\Delta T = T^1 - T^0$.

3. Определение коэффициента трения f_D , при котором потери кинетической энергии стержня после удара о вертикальную стенку равны потерям кинетической энергии при ударе о выступ.

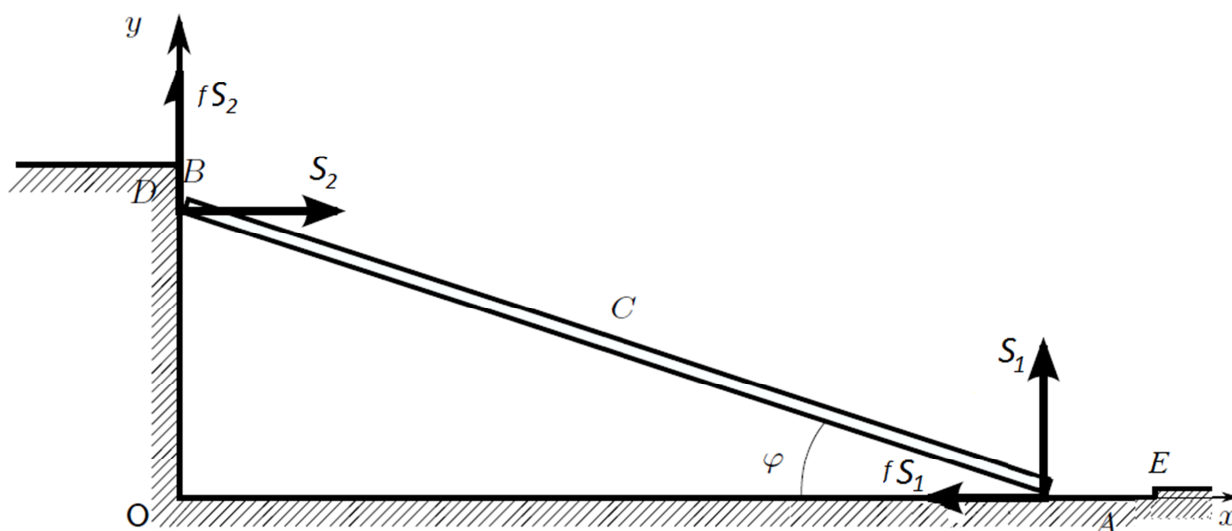


Рис. 6. Расчетная схема к пункту 3

Потеря кинетической энергии может происходить как вследствие пластических деформаций, так и быть обусловлена возникновением ударного трения. То есть, при наличии проскальзывания потери будут максимальными. Примем, что удар происходит с проскальзыванием, которое присутствует на протяжении всего времени удара. Тогда, если расчеты покажут, что стержень остановился или начал скользить обратно, то наше предположение окажется неверным. Однако, расчеты показали, что для данных начальных условий при ударе стержень замедляется, но продолжает скользить вниз. Следовательно предположение верно.

Запишем уравнения удара стержня о вертикальную стенку в соответствии с расчетной схемой (рис. 6):

$$m(\dot{x}_C^1 - \dot{x}_C^0) = S_2 - fS_1, \quad (42)$$

$$m(\dot{y}_C^1 - \dot{y}_C^0) = S_1 + fS_2, \quad (43)$$

$$J(\dot{\phi}_C^1 - \dot{\phi}_C^0) = l(-S_1 \cos(\varphi) + S_2 \sin(\varphi) + fS_2 \cos(\varphi) + fS_1 \sin(\varphi)), \quad (44)$$

где l – полудлина стержня.

Уравнения связи и их производные:

$$y_c = l \sin(\varphi), \quad (45)$$

$$\dot{y}_c = l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, \quad (46)$$

$$x_c = l \cos(\varphi), \quad (47)$$

$$\dot{x}_c = -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}. \quad (48)$$

Аналогично пункту 3 из уравнений (42) – (48) получим систему уравнений. Запишем систему в матричном виде:

$$A\bar{y} = \bar{b}, \quad (49)$$

где матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} m l \sin(\varphi) & -f & 1 \\ -m l \cos(\varphi) & 1 & f \\ -J & l(f \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) & l(\sin(\varphi) + f \cos(\varphi)) \end{bmatrix},$$

столбец свободных членов

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_c^0 m \\ -\dot{y}_c^0 m \\ -J \dot{\varphi}_c^0 \end{bmatrix},$$

столбец неизвестных

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

Система ОДУ имеет вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (22)$$

Запишем кинетическую энергию стержня до и после удара:

$$T^0 = \frac{m[(\dot{x}_C^0)^2 + (\dot{y}_C^0)^2]}{2} + J \frac{\omega_0^2}{2},$$

$$T^1 = (J + ml^2) \frac{\omega_1^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии находит аналогично пункту 2.

Чтобы найти искомый коэффициент трения, поступаем аналогично пункту 1. Т.е. методом подбора с помощью системы уравнений (49) производя интегрирование с начального момента времени используя системы представленные в предыдущий пунктах и проверяя условие равенства потерь кинетической энергии стержня.

Список литературы

- [1]. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М., Колесников К.С., Космодемьянский В.А., Назаренко Б.П., Панкратов А.А., Русанов П.Г., Саратов Ю.С., Степанчук Ю.М., Тушева Г.М., Шкапов П.М. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. 760 с.
- [2]. Дубинин В.В., Калиниченко В.А., Машковский В.Л., Песоцкий Ю.С., Ремизов А.В., Солохин. Е.Н. Применение ЭВМ при решении задач динамики (Курс теоретической механики: Общие теоремы динамики. Удар). М.: Институт проблем механики Академия Наук СССР. Препринт № 487, 1991. 43 с.
- [3]. Дубинин В.В., Тушева Г.М., Нарская Н.Л., Дубровина Г.И., Саратов Ю.С. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 56 с.
- [4]. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2001. 375 с.