электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

 # 04, апрель 2016

УДК 519.688+536.331

Об одном способе повышения эффективности алгоритмизации многомерных задач переноса излучения

Коробков С.С., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Научный руководитель: Градов В.М., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»
gradov@bmstu.ru

Введение

В энергобалансе высокотемпературных сред значительная роль принадлежит радиационной составляющей. При моделировании процессов в таких средах приходится в общем случае решать многомерные уравнения переноса излучения, на которые тратится большая часть машинного времени, поэтому вопросу повышения скорости вычислений радиационной части моделей посвящено большое количество исследований [1 – 3].

Одним из распространённых способов решения таких задач является переход к дифференциальным приближениям (метод сферических гармоник, Шустера-Шварцшильда и др.), однако такие подходы вносят дополнительные погрешности [4] в модель, что часто является нежелательным.

В настоящей работе радиационный перенос рассматривается в интегральной постановке, свободной от допущений дифференциальных методов. Целью работы является разработка оптимального алгоритма решения такой задачи.

1. Математическая постановка задачи

При моделировании высокотемпературных сред часто приходится решать уравнение энергии (1). Данное уравнение включает в себя член $\operatorname{div} F$, отвечающий за вклад переноса излучения в энергетический баланс модели и рассчитывающийся согласно (2). В уравнении (2) $\operatorname{div} F_\nu$ соответствует спектральной плотности такого потока на частоте ν и рассчитывается по формуле (3), где $c, k_\nu, U_\nu, U_\nu^{eq}$ соответствуют скорости

света, коэффициенту поглощения среды, установившейся и равновесной спектральной объёмной плотности излучения на частоте ν. U_ν^{eq}, U_ν рассчитываются по формулам (3, 4) соответственно. В (4) L' соответствует длине луча, вдоль которого ведётся интегрирование. В (5) h, k_B соответствуют постоянной Планка и постоянной Больцмана.

Таким образом, система уравнений модели записывается в виде:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + f - \operatorname{div} F \tag{1}$$

$$\operatorname{div} F = \int_0^\infty \operatorname{div} F_\nu d\nu \tag{2}$$

$$\operatorname{div} F_\nu = c k_\nu (U_\nu^{eq} - U_\nu) \tag{3}$$

$$U_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta \int_0^{L'} k(l') U_\nu^{eq}(l') e^{-\int_0^{l'} k(l'')dl''} dl' \tag{4}$$

$$U_\nu^{eq}(T) = \frac{\pi h \nu^3}{c^3 (e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)} \tag{5}$$

2. Расчётная область

Данная задача решалась на оптическом аналоге, представленном на рис.1. Форма аналога обусловлена тем, что задача решалась в цилиндрическом объёме в двумерной постановке, т.е. рассматривался круговой срез цилиндра; половину области можно отброшена ввиду симметрии задачи относительно оси «центр разряда – центр цилиндра». Важно заметить, что предлагаемый алгоритм не оперирует знанием о геометрии сетки и области в своей наиболее вычислительно ёмкой части, так что он может быть достаточно легко адаптирован и к другим сеткам.

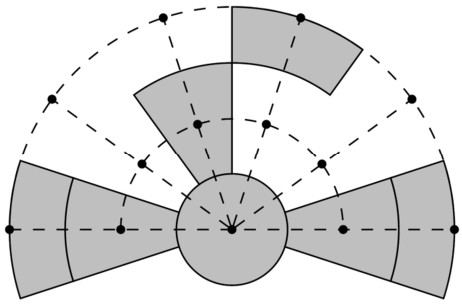

Рис. 1. Конфигурация сетки. Пунктиром обозначены линии сетки, точками – расчётные узлы, тёмными областями – соотвествующие узлам ячейки

3. Алгоритм интегрирования

Расчёт $\operatorname{div} F$ производится в несколько этапов.

На первом, подготовительном этапе производится формирование шаблонов интегрирования. Поскольку интеграл (4) рассчитывается вдоль испускаемых из искомой точки лучей, для ускорения процесса взятия значений k и U_ν^{eq} по координате вида (φ, θ, l') заранее строится разбиение всех лучей интегрирования границами ячеек, образованных узлами сетки (см. рис. 1). Подобное разбиение строится для проекций лучей на плоскость задачи (рис. 2), рассчитывается для всех лучей всех ячеек, и для некоторой конкретной точки выглядит как показано на рис. 3. Поскольку геометрия сетки в нестационарных задачах изменяется достаточно редко, а для расчёта (2) часто необходимо рассчитать $\operatorname{div} F_\nu$ для большого числа частот, время, затраченное на построение шаблонов интегрирования можно считать несущественным. Таким образом, на данном этапе, для каждой точки и зафиксированного угла φ мы определяем луч, состоящий из N сегментов ширины w_i и знающий индекс каждого образующего сегмент узла сетки.

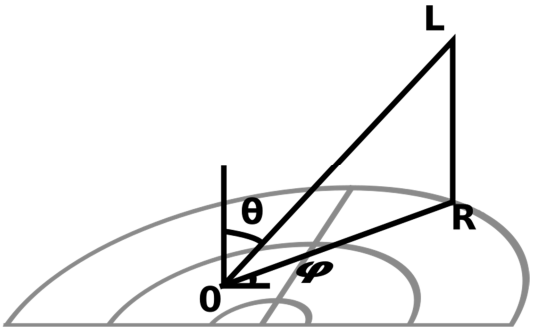

Рис. 2. Проецирование луча интегрирования

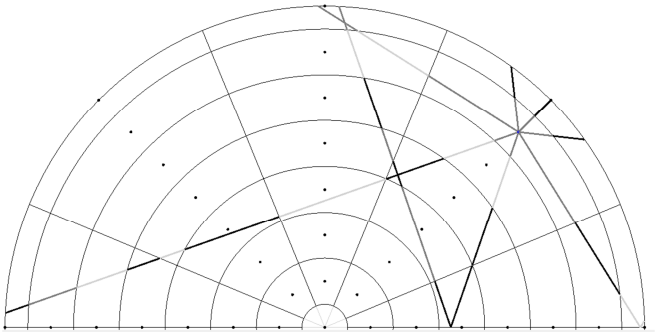

Рис. 3. Пример шаблона интегрирования для одной точки

На втором, основном этапе происходит собственно расчёт U_ν согласно (4), однако для значительного повышения скорости счёта необходимо избавиться от части подынтегрального выражения. Для конкретной расчётной точки и угла интегрирования φ, проделаем следующие преобразования:

1. Исходная форма подынтегрального выражения выглядит как
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(\theta) d\theta \int_0^L k(l') U(l') e^{-\int_0^{l'} k(l'') dl''} dl'$$
2. Спроецировав луч интегрирования с учётом $l \sin(\theta) = r$, и преобразовав интегралы по l', l'' с учётом постоянности k_ν, U_ν^{eq} в рамках одного сегмента:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sum_{i=0}^{N-1} U_i k_i \int_0^{w_i} e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j w_j csc(\theta)} e^{-k_i r' csc(\theta)} dr'$$

3. Сделав замену $c_i = e^{-\sum_{j=1}^{i-1} k_j w_j}$ и вынеся сумму наружу, получим:

$$\sum_{i=0}^{N-1} U_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(\theta) d\theta \int_0^{k_i w_i csc(theta)} c_i^{csc(\theta)} e^{-z} dz$$

4. С учётом замены $a_i = k_i w_i$ перегруппируем выражение:

$$\sum_{i=0}^{N-1} U_i \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} c_i^{csc(\theta)} sin(\theta) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (c_i e^{-a_i})^{csc(\theta)} sin(\theta) d\theta \right)$$

С учётом ещё одной замены $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{csc(\theta)} sin(\theta) d\theta$, получим, что интеграл (4), взятый Q лучами, с учётом введённого сегментного разбиения лучей, принимает вид:

$$\frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{i=0}^{N-1} U_i (f(c_i) - f(c_i e^{-a_i})) \qquad (6)$$

Функция f является достаточно гладкой, определённой на интервале $(0,1]$ и потому может быть приближена полиномом. График этой функции приведён на рис. 4.

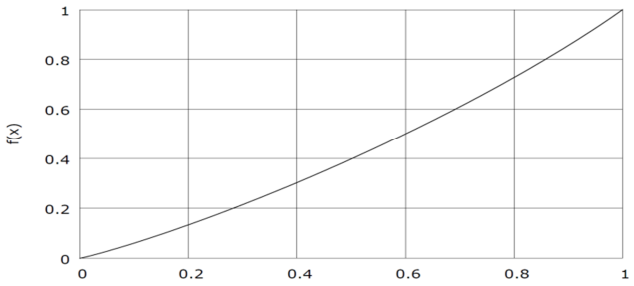

Рис. 4. График функции f

Наконец, на последнем, заключительном этапе происходит расчёт $\operatorname{div} F$ согласно (2). Этот этап занимает крайне незначительное время, и может быть реализован с применением любого алгоритма численного интегрирования по рассчитанным на основном этапе значениям $\operatorname{div} F_v$.

4. Параллелизация алгоритма

Несмотря на проведённые выше математические оптимизации алгоритма, он всё

ещё значительно проигрывает по скорости вычислений дифференциальным приближениям. Для значительного сокращения разрыва производительности разработанное ПО реализовывалось с применением технологии Nvidia CUDA.

Несколько особенностей разработанного метода делают его крайне интересным с точки зрения расчёта на видеокарте. Во-первых, в преобразованной форме он алгоритмически крайне прост, что позволяет реализовать его на малом числе регистров, доступных вычислительному блоку видеокарты. Во-вторых, даже при расчёте $\operatorname{div} F_\nu$ для всего одной частоты, имеется возможность выделить столько потоков, сколько узлов имеется в расчётной сетке, что означает тысячи потоков. В-третьих, поскольку общая, медленная память видеоускорителя преимущественно лишь читается, большую часть проблем с доступом к ней решит включение константного кеша. Ввиду вышесказанного, разработанный алгоритм позволяет эффективно использовать вычислительные мощности современных графических процессоров, в то же время не страдая от их архитектурных особенностей (задержка на доступ к памяти, крайне малое число памяти для локальных переменных).

Сравнение времени расчёта интеграла средствами видеокарты GeForce GTX660M с временем расчёта диффузионного приближения с решением СЛАУ методом матричной прогонки на процессоре Intel Core i7-3630QM 2.4ГГц с 8 аппаратными потоками показало сравнимую скорость решения (замедление по сравнению с диффузионным приближением всего на 20-30%). Такая скорость расчёта является высокой для алгоритма, свободного от погрешностей, поскольку дифференциальные приближения изначально были предложены как раз для ускорения расчёта подобных задач.

5. Результаты работы ПО

Для иллюстрации результата работы алгоритма был проведён расчёт дивергенции лучистого потока для тестового температурного профиля. Данные по коэффициентам поглощения среды (ксенон) были взяты из [1]. Температурный профиль приведён на рис. 5, рассчитанное значение $\operatorname{div} F$ – на рис. 6.

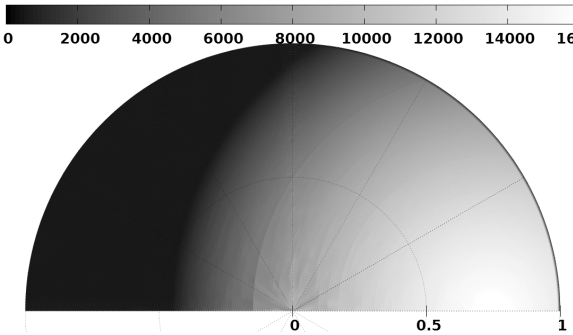

Рис. 5. Температурный профиль, K

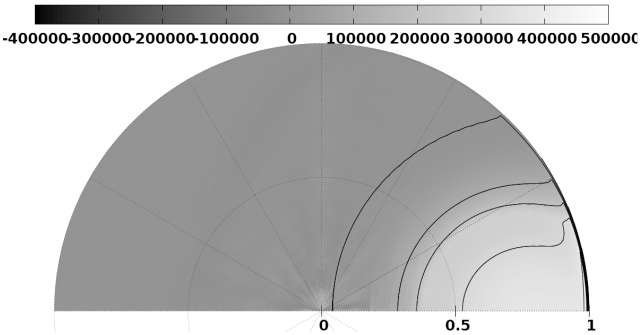

Рис. 6. Распределение $\operatorname{div} F$, Вт/см^2

Заключение

Таким образом, разработан эффективный алгоритм для расчёта двумерных задач с учётом переноса излучения в интегральной постановке. Проведённые преобразования 4-кратного интеграла, содержащего ещё один интеграл в показателе степени экспоненты, позволили оптимизировать задачу без внесения дополнительных погрешностей в исходную постановку. Выполнена программная реализация описанного алгоритма. Результаты тестирования показали сравнимую с дифференциальными приближениями скорость вычислений. Разработанный алгоритм может быть использован в вычислительно ёмких задачах, для которых дивергенция должна быть рассчитана с точностью, недостижимой в дифференциальных приближениях.

Список литературы

[1]. Градов В.М. Математическое моделирование радиационных процессов в системах сложной геометрии с селективно излучающей плазмой // Вестник МГТУ им Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 1998. № 1. С. 48–58.

[2]. Градов В.М., Егоров П.С. Моделирование процессов в селективно излучающих разрядов высокого давления с учётом эффектов неравновесности // Вестник МГТУ МГТУ им Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2002. № 2. С. 43–54.

[3]. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. 544 с.

[4]. Суржиков С.Т. Радиационная и газовая динамика спускаемых космических аппаратов. Многотемпературные модели. М.: ИПМ РАН, 2013. 706 с.