

УДК 519.816:371.261

К вопросу выбора операторов агрегирования для формирования интегральных оценок успеваемости учащихся

Сакулин С. А.^{1,*}

[*ss141291@yandex.ru](mailto:ss141291@yandex.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Интегральные оценки успеваемости учащихся широко используются для принятия решений о зачислении, назначении стипендий и т.п. Интегральные оценки формируются путём агрегирования оценок по отдельным дисциплинам. В статье рассматривается вопрос выбора оператора агрегирования оценок по отдельным дисциплинам. Рассматриваются варианты применения в этой области различных операторов агрегирования. На основе анализа возможных вариантов применения различных операторов агрегирования обосновывается применение в этой прикладной области интеграла Шоке. Рассматривается выбор метода идентификации нечёткой меры для агрегирования оценок по отдельным дисциплинам и обосновывается применение метода на основе минимизации дисперсии нечёткой меры.

Ключевые слова: оператор агрегирования, нечёткая мера, нечёткий интеграл Шоке, интегральная оценка успеваемости

Введение

Интегральные оценки успеваемости учащихся используются для принятия решений о зачислении претендентов на различные вакантные места, составления всевозможных рейтингов, при назначении размера стипендий и т.п. В связи с этим вопрос обоснованного и тщательного формирования интегральных оценок успеваемости представляется важным. В настоящее время этому вопросу посвящён ряд публикаций [1-4]. Во многом возможности агрегирования оценок определяются выбором типа оператора агрегирования, с помощью которого будет осуществляться объединение или свертка локальных оценок в интегральные на основе формализованных экспертных предпочтений.

В статье [2] основное внимание было уделено вопросу практической применимости аппарата нечётких мер и интегралов для формирования интегральных оценок успеваемости учащихся, вместе с тем, вопрос выбора оператора агрегирования не был в достаточной мере в ней рассмотрен. В настоящей статье рассматриваются возможные варианты такого выбора и приводятся обоснования в пользу выбора конкретного типа оператора агрегирования для рассматриваемой прикладной области.

1. Особенности прикладной области и свойства оператора

Оценка успеваемости учащихся путём формирования интегральных оценок успеваемости имеет ряд характерных особенностей. Эти особенности можно выделить и описать формально в виде свойств операторов агрегирования применительно к тем операторам, которые используются для агрегирования оценок по отдельным предметам в единую интегральную оценку (средний балл).

Обозначим $AGG(g_1, \dots, g_H)$ оператор агрегирования оценок, где $g_1, \dots, g_H$ - оценки по отдельным предметам, H - число предметов, $J = \{1, \dots, H\}$ - множество индексов, соответствующих отдельным предметам.

Очевидно, что оператор агрегирования оценок должен обладать свойством неубывания. Другими словами, при увеличении оценки (оценок) по отдельной дисциплине (дисциплинам) результат агрегирования не должен убывать. Запишем это свойство с использованием введённых обозначений:

$$g_1 \leq g'_1, \dots, g_H \leq g'_H \Rightarrow AGG(g_1, \dots, g_H) \leq AGG(g'_1, \dots, g'_H) \quad (1)$$

Ещё одним очевидным свойством оператора $AGG(g_1, \dots, g_H)$ является свойство идемпотентности. Например, если учащийся является круглым отличником, то очевидно, что его интегральная оценка также должна быть "отлично", если же у учащегося по всем отдельным предметам стоят оценки "хорошо", то очевидно, что и интегральная оценка должна быть такой же. Формально это свойство выражается следующим образом:

$$g_1 = g_2 = \dots = g_H \Rightarrow AGG(g_1, \dots, g_H) = g_1 \quad (2)$$

Характерной особенностью прикладной области формирования интегральных оценок успеваемости является наличие зависимостей между оценками по отдельным предметам. Эти зависимости могут быть очевидными, «лежащими на поверхности». Например, в случае, если ученик на "отлично" знает алгебру, то вряд ли он будет иметь плохие оценки по геометрии, так как геометрия и алгебра являются смежными предметами, алгебраические методы применяются и в геометрии, поэтому, как правило, между оценками по алгебре и геометрии учеников присутствует положительная корреляция.

С другой стороны, зависимости между оценками по отдельным предметам могут носить неочевидный и неоднозначный характер. Например, по мнению отдельно взятого эксперта, если учащийся стремится стать программистом, то для него важнее на «отлично» знать русский язык и, математику с информатикой, чем географию, биологию или литературу. Подобные рассуждения экспертов в теории полезности называют предпочтительной зависимостью [5,6]. Формально предпочтительная зависимость критериев описывается следующим образом.

Реализация оценок $\mathbf{g}$ представляет собой совокупность поставленных учащемуся оценок по отдельным предметам. Предположим, что предпочтения эксперта на множестве учеников (множестве реализаций оценок) A известны и выражены отношением нестрогого порядка $\succeq_A$. Обозначим $\mathbf{g}_D$ реализацию оценок g_i , где $i \in D$, обозначим $\mathbf{g}_{J-D}$ реали-

зацию оценок g_i , где $i \in J - D$. Подмножество оценок $D \subset J$ называется предпочтительно независимым от $J - D$ тогда и только тогда, когда для каждой пары реализаций оценок $\mathbf{g}_D, \mathbf{g}'_D$ из $(\mathbf{g}_D, \mathbf{g}_{J-D}) \succeq (\mathbf{g}'_D, \mathbf{g}_{J-D})$ для некоторой реализации $\mathbf{g}_{J-D}$ следует $(\mathbf{g}_D, \mathbf{g}_{J-D}) \succeq (\mathbf{g}'_D, \mathbf{g}_{J-D})$ для всех реализаций $\mathbf{g}_{J-D}$, где $\succeq$ означает отношение предпочтения (нестромого порядка) на A . В противном случае подмножество оценок $D \subset J$ является предпочтительно зависимым от подмножества $J - D$. Полный набор оценок J называется взаимно предпочтительно независимым, если подмножество D предпочтительно независимо от подмножества $J - D$ для каждого подмножества $J \supseteq D$ [6].

Таким образом, оператор агрегирования оценок нужно выбирать так, чтобы с его помощью возможно было бы формализовать подобные экспертные предпочтения.

Ещё одной особенностью рассматриваемой прикладной области является требование к объективности агрегирования, при выполнении которого оператор не должен вносить в результат дополнительного субъективизма, не связанного с субъективностью эксперта. Другими словами, результат в виде нестромого порядка на множестве учеников (претендентов на вакантное место) не должен зависеть от выбора того или иного конкретного вида оператора, он должен зависеть только от экспертных предпочтений. В качестве примера такой особенности прикладной области можно привести ситуацию, при которой важность какого-либо отдельного предмета при формировании интегральной оценки завышена относительно остальных предметов не в результате предпочтений эксперта, а в результате применения того или иного метода построения оператора агрегирования.

Авторы работы [7], посвящённой выбору и построению операторов агрегирования в области систем принятия решений для медицинской диагностики, выделяют среди прочих свойств операторов их неформализованные свойства, такие как эмпирическая пригодность, адаптируемость и семантическая ясность.

Оператор обладает свойством эмпирической пригодности для прикладной области, если его математические свойства соответствуют всем особенностям этой прикладной области и могут формально представлять эти особенности.

Адаптируемость означает, что настройкой параметров оператора возможно адаптировать его в соответствии с экспертными предпочтениями.

Свойство семантической ясности предполагает ясную для эксперта и для всех заинтересованных лиц интерпретацию результата агрегирования и изменений этого результата в зависимости от изменения оценок по отдельным предметам.

Очевидно, что описанные выше свойства операторов особенно важны в тех прикладных областях, для которых характерно использование операторов агрегирования в целях формализации знаний эксперта. Одной из таких прикладных областей является формирование интегральных оценок успеваемости учащихся.

2. Выбор оператора агрегирования для формирования интегральных оценок

В качестве операторов агрегирования часто применяются операторы минимума и максимума. В частности, в области формирования интегральных оценок учащихся применение таких операторов может быть следующим. Например, студенту назначается стипендия, если минимальная оценка в семестре - "хорошо", в противном случае стипендия не выплачивается. Такое правило на естественном языке означает, что к множеству оценок в семестре применяется оператор взятия минимума, и если полученная в результате интегральная оценка оказывается меньше, чем "хорошо", то стипендия не выплачивается.

В рассматриваемой прикладной области применяются также операторы с компенсационными свойствами, такие как среднее арифметическое, взвешенное среднее арифметическое. В настоящее время известно большое число форм операторов агрегирования, например, OWA операторы Ягера, интегралы Шоке и Сугено, а также другие, менее распространённые [8].

Рассмотрим различные операторы агрегирования, исходя из перечисленных выше свойств, обусловленных соответствующими особенностями рассматриваемой прикладной области.

Чаще всего на практике в качестве оператора агрегирования оценок применяют простое среднее арифметическое:

$$AGG(g_1, \dots, g_H) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H g_h \quad (3)$$

Этот оператор обладает свойствами (1) и (2), но не отражает различия в значимости отдельных предметов и не может отразить экспертные предпочтения о предпочтительной зависимости отдельных оценок.

Другим возможным оператором для агрегирования оценок, также обладающим свойствами (1) и (2), является взвешенное среднее арифметическое:

$$AGG(g_1, \dots, g_H) = \sum_{h=1}^H w_h g_h \quad (4)$$

где w_h - весовые коэффициенты, определяющие субъективный вес отдельных оценок,

$$\sum_{h=1}^H w_h = 1.$$

Ни один аддитивный оператор агрегирования не в состоянии отразить предпочтительную зависимость, выраженную экспертом [5]. Поэтому простое среднее арифметическое (3) и средневзвешенный оператор (4) не подходят для формирования интегральных оценок успеваемости.

В качестве альтернативы рассмотренным операторам применимы OWA (Ordered Weighted Averaging) операторы Ягера. С их помощью возможно отразить предпочтительную зависимость оценок [8]. Пример использования такого оператора в области формальной оценки риска инвестирования в малое инновационное предприятие представлен в ста-

ть [9]. Для реализации такого применения необходимо формализовать предоставленную экспертом информацию о допустимой форме компромисса между значениями по разным отдельным показателям инвестиционной привлекательности с помощью нечёткого квантификатора. Недостатком подобного подхода к формированию интегральных оценок успеваемости учащихся является отсутствие возможности явно отразить при построении оператора знания эксперта о корреляции между оценками по отдельным предметам.

Обобщением операторов минимума, максимума, взвешенного среднего арифметического и OWA операторов Ягера является интеграл Шоке по нечёткой мере. Другими словами, при соответствующей настройке параметров интеграла Шоке возможно получить приведённые выше операторы. Достоинством интеграла Шоке является возможность его применения для представления не только важности отдельных оценок, но и взаимозависимостей этих оценок, в частности, описанной выше предпочтительной зависимости и корреляции. В последнее время расширяется применение интеграла Шоке для решения практических задач в различных областях [2,3,10-12].

Интеграл Шоке обладает свойством эмпирической пригодности в области формирования интегральных оценок успеваемости учащихся, поскольку для него выполняются свойства неубывания (1) и идемпотентности (2), и он пригоден для формального представления знаний эксперта о корреляции и предпочтительной зависимости оценок.

Этот оператор агрегирования обладает свойством адаптируемости, поскольку нечёткую меру можно задать таким образом, что она будет отражать мнение эксперта об агрегировании. В этом смысле нечёткая мера аналогична весовым коэффициентам w_h взвешенного среднего арифметического с тем отличием, что с помощью неё представляются не только веса отдельных оценок, но и веса подмножеств оценок. Для дальнейших рассуждений введём необходимые обозначения и определения.

Обозначим нечёткую меру как функцию множества $\psi: 2^J \rightarrow [0,1]$, где 2^J - множество всех подмножеств полного набора оценок по отдельным предметам J . Эта функция отражает степень «важности» не только оценки по отдельному предмету, но и каждого из подмножеств этих оценок и удовлетворяет условиям:

- 1) $\psi(\emptyset) = 0, \psi(J) = 1$;
- 2) $\forall D, B \subseteq J: D \subseteq B \Rightarrow \psi(D) \leq \psi(B)$.

Первое условие определяет значения меры на пустом множестве и на множестве всех оценок по отдельным предметам. Второе условие ограничивает класс нечётких мер теми мерами, для которых выполняется свойство монотонности. Нечёткая мера не обязательно должна обладать свойством аддитивности, или $\psi(D) + \psi(B) \neq \psi(D \cup B)$ где $D, B \subseteq J; D \cap B = \emptyset$. Величина $\psi(D)$ представляет собой субъективную значимость подмножества оценок D .

Использование интеграла Шоке в качестве оператора агрегирования предполагает обязательное проведение подготовительного этапа, на котором идентифицируется нечёт-

кая мера на основе экспертных предпочтений. Этот этап относительно сложен ввиду необходимости получения величин $\psi(D)$ для всех подмножеств оценок D . Грабиш для упрощения реализации этого подготовительного этапа предложил использовать нечёткие меры κ -го порядка, для которых зависимости между более чем κ критериями не рассматриваются. Наиболее часто на практике применяется 2-аддитивная нечёткая мера. Несмотря на относительную простоту, она позволяет моделировать предпочтительную зависимость между критериями [13]. Здесь следует отметить, что в случае, если экспертные предпочтения будут содержать зависимости между более чем двумя критериями, порядок нечёткой меры можно увеличить, что позволит в полном объёме формализовать знания эксперта.

В случае 2-го порядка интеграл Шоке имеет вид [14]:

$$C_{\psi}(g_1, \dots, g_H) = \sum_{i \in J} \psi(i)g_i + \sum_{\{i,j\} \subseteq J} (\psi(ij) - \psi(i) - \psi(j))\min(g_i, g_j) \quad (5)$$

Величина и знак взаимодействия двух критериев i и j выражается индексом взаимодействия [14]:

$$I_{\psi}(ij) = \psi(ij) - \psi(i) - \psi(j), \quad \{i, j\} \subseteq J \quad (6)$$

Индекс Шепли критерия i выражает относительный вес этого критерия среди других критериев [14]:

$$\Phi_{\psi}(i) = \psi(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in (J-i)} (\psi(ij) - \psi(i) - \psi(j)), \quad i \in J \quad (7)$$

Выполнение свойства семантической ясности интеграла Шоке не так очевидно, при работе с ним у экспертов часто возникают трудности. Эти трудности связаны с тем, что многие практические специалисты не имеют ясного представления об интеграле Шоке и его параметрах. Преодолеть эти трудности представляется возможным с помощью той или иной визуализации применяемого аппарата, дающей эксперту его интуитивное видение. В частности, существует графическая интерпретация интеграла Шоке второго порядка [15]. Она представляет собой ограниченную область в прямоугольных координатах, где по оси абсцисс откладываются величины индексов Шепли критериев (7), а по оси ординат - значения индексов взаимодействия (6). Недостаток графической интерпретации заключается в невозможности визуализации с её помощью более двух критериев. В статье [16] рассмотрены возможные пути преодоления указанных трудностей. В частности, при работе с экспертом возможно применение визуализации интеграла Шоке на основе сопоставления ему физического объекта.

Для формализации экспертных знаний об агрегировании оценок по отдельным предметам также возможно применение интеграла Сугено. Однако, этот интеграл применяется для агрегирования, при котором на результат влияет порядок расположения значений отдельных оценок (порядковые шкалы) относительно друг друга, в то время, как применение интеграла Шоке предполагает влияние значений каждой из отдельных оценок на результат агрегирования [6], для интеграла Сугено не предложены средства визуализации. Кроме того, работа с интегралом Сугено осложняется тем, что для него не разработано

применимое на практике "представление взаимодействия" и соответствующее программное обеспечение, подобно тому, как это сделано для интеграла Шоке [17].

Таким образом, интеграл Шоке по нечёткой мере в сравнении с другими операторами агрегирования наиболее соответствует особенностям рассматриваемой прикладной области формирования интегральных оценок успеваемости учащихся и пригоден к практическому применению.

3. Выбор метода идентификации нечёткой меры

Использование интеграла Шоке в качестве оператора агрегирования предполагает идентификацию нечёткой меры на основе экспертных предпочтений. Нечёткая мера не определяется одними лишь предпочтениями эксперта, а зависит также от самого метода идентификации, с использованием которого она была получена. На сегодняшний день известны различные методы идентификации нечётких мер [17], например, метод наименьших квадратов, максимального разделения, наименьшей дисперсии и т.д. Выбор того или иного метода идентификации определяется исходя из особенностей прикладной области и целей самой идентификации.

Рассмотрим наиболее распространённые методы идентификации нечёткой меры применительно к интегралу Шоке, используемому для формирования интегральных оценок учащихся.

Исторически первым методом идентификации нечётких мер стал метод наименьших квадратов [17]. Этот метод отличается простотой, а также тем, что в качестве входных данных применяются желаемые значения интеграла Шоке на известных значениях оценок по отдельным предметам, другие виды экспертных предпочтений не учитываются. Целевая функция метода имеет вид:

$$F_{LS}(\psi) = \sum_{\mathbf{g} \in A} (C_{\psi}(\mathbf{g}) - u(\mathbf{g}))^2$$

Здесь $u(\mathbf{g})$ - желаемые значения интеграла Шоке для реализаций $\mathbf{g} \in A$ из обучающей выборки. Метод минимизирует среднее квадратичное расстояние между значениями интеграла Шоке от реализаций на обучающей выборке $\{C_{\psi}(\mathbf{g})\}_{\mathbf{g} \in A}$ и желаемыми значениями интеграла Шоке $\{u(\mathbf{g})\}_{\mathbf{g} \in A}$, заданными экспертом.

Результат идентификации меры с помощью этого метода может не быть уникальным, что является недостатком применительно к агрегированию оценок по отдельным предметам для формирования интегральной оценки. При возникновении ситуации, когда решение не уникально, возникнет неоднозначность в трактовках значимости оценок по отдельным предметам и по группам предметов. Кроме того, этот метод не позволяет эксперту напрямую формализовать его знания о корреляции оценок и о различиях в значимости оценок по отдельным предметам. Сделать это можно только косвенно, с помощью задания желаемых значений интеграла Шоке на обучающей выборке. Вместе с тем, к досто-

инствам рассмотренного метода можно отнести то, что он относительно прост в реализации.

Метод максимального разделения для идентификации нечёткой меры [18] заключается в максимизации целевой функции вида $F_{MS}(\varepsilon) = \varepsilon$ при следующих ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{D \subseteq G \\ |D| \leq k-1}} a(D \cup i) \geq 0, \quad \forall G \subseteq J - i \\ \sum_{\substack{D \subseteq G \\ 0 \leq |D| \leq k}} a(D) = 1, \\ C_{\psi}(\mathbf{g}) - C(\mathbf{g}') \geq \delta_{CH} + \varepsilon \end{array} \right.$$

Здесь $G \subseteq J$, k - порядок нечёткой меры ψ , $a(D) = \sum_{D \subseteq G} (-1)^{|G|-|D|} \psi(D)$ - функция Мёбиуса по ψ , δ_{CH} - порог безразличия, задаваемый экспертом как минимальная значимая разность между результатами агрегирования двух реализаций оценок из обучающей выборки.

Для реализации этого метода идентификации от эксперта требуется установить нестрогий порядок $\succeq_A$ на множестве реализаций.

В качестве входной информации для этого метода идентификации пригодны предпочтения эксперта на множестве отдельных предметов J , на множестве реализаций оценок A и на множестве индексов взаимодействия [18], сформулированные в виде нестрогих порядков на соответствующих множествах, что выгодно отличает его от метода наименьших квадратов, так как при этом эксперт может в явном виде формализовать знания об относительной значимости и о корреляции оценок. Основным недостатком рассмотренного метода состоит в том, что его целью является максимизация разности между реализациями на обучающей выборке A , что не удаётся обосновать исходя из особенностей прикладной области. Следствием такой максимизации может быть необоснованно завышенные (заниженные) индексы Шепли для отдельных оценок, что противоречит мнению эксперта. К недостаткам рассмотренного метода следует отнести также то, что решение в виде нечёткой меры не обязательно уникально. Достоинством этого метода является его относительная простота.

В основу метода идентификации нечёткой меры путём минимизации её дисперсии [19] положен принцип максимальной энтропии. В соответствии с этим принципом, в случае, если имеются частичные сведения о возможных реализациях случайной величины, то необходимо выбирать такое её вероятностное распределение, которое максимизирует неопределённость недостающих данных [20]. Иначе говоря, необходимо найти такое распределение, которое будет согласовано с доступными данными, а к недоступной информации необходимо относиться по возможности непредвзято. При работе с экспертом принцип максимизации энтропии означает, что среди распределений, совместимых с мнe-

нием эксперта, нужно выбирать распределение с максимальной энтропией. В [19] описано применение этого принципа в рамках метода идентификации нечётких мер. Этот метод основан на минимизации дисперсии нечёткой меры:

$$F_{MV}(\psi) := \frac{1}{|J|} \sum_{i \in J} \sum_{G \subseteq J-i} \frac{(|J|-|G|-1)!|G|!}{|J|!} \left(\sum_{D \subseteq G} a(D \cup i) - \frac{1}{|J|} \right)^2$$

Минимизация дисперсии нечёткой меры эквивалентна максимизации её энтропии [21]:

$$H_M(\psi) := \sum_{i=1}^{|J|} \sum_{G \subseteq J-i} \frac{(|J|-|G|-1)!|G|!}{|J|!} h[\psi(G \cup i) - \psi(G)],$$

где

$$h(x) = \begin{cases} -x \ln x, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

По этой причине метод идентификации на основе минимизации дисперсии иногда упоминают как метод максимизации энтропии. Дисперсию $F_{MV}(\psi)$ минимизируют при следующих ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{D \subseteq G \\ |D| \leq \kappa-1}} a(D \cup i) \geq 0, \quad \forall i \in J, \quad \forall G \subseteq J-i \\ \sum_{\substack{D \subseteq J \\ 0 < |D| \leq \kappa}} a(D) = 1 \\ CH_{\psi}(\mathbf{g}) - CH_{\psi}(\mathbf{g}') \geq \delta_{CH} \\ \dots \end{array} \right.$$

В качестве входных данных для метода минимизации дисперсии применимы те же экспертные предпочтения, что и для метода на основе принципа максимального разделения. Поэтому с применением этого метода у эксперта есть возможность формализовать предпочтения о различиях в субъективной значимости, корреляции некоторых оценок, а также предпочтительной зависимости оценок. Кроме того, идентифицированная посредством метода минимизации дисперсии нечёткая мера всегда уникальна, либо не существует, если экспертные предпочтения противоречивы. Полученная мера не будет, в отличие от метода максимального разделения, вносить субъективность в результат агрегирования. К недостаткам метода следует отнести относительную сложность его реализации, что, впрочем, не критично, учитывая уровень развития современных вычислительных средств.

Таким образом, метод идентификации на основе минимизации дисперсии нечёткой меры наиболее пригоден для применения в области формирования интегральных оценок успеваемости на основе агрегирования оценок с помощью интеграла Шоке.

Выводы

В статье рассмотрен вопрос обоснованного выбора того или иного типа оператора агрегирования в области формирования интегральных оценок успеваемости учащихся на основе оценок по отдельным предметам. Анализ возможного применения различных операторов показал, что наиболее подходящим в этой области является применение интеграла Шоке по нечёткой мере, поскольку этот тип оператора агрегирования соответствует всем рассмотренным особенностям прикладной области. Этим особенностям соответствуют ряд формальных математических, а также неформализованных свойств интеграла Шоке. Вместе с тем, остаются некоторые нерешённые проблемы, связанные с методами работы с экспертом при построении интегралов Шоке.

В статье также рассмотрен вопрос выбора подходящего метода идентификации нечёткой меры для интеграла Шоке в области формирования интегральных оценок успеваемости учащихся. В обоснование выбора метода на основе минимизации дисперсии нечёткой меры приведены достоинства и недостатки альтернативных методов.

Выбор и построение подходящих операторов агрегирования для формализации экспертных знаний в различных областях связан не только с особенностями прикладной области, но и с особенностями предпочтений эксперта, которые могут быть представлены различными способами.

Список литературы

1. Белоус В.В., Бобровский А.В., Добряков А.А., Карпенко А.П., Смирнова Е.В. Интегральная оценка многокритериальных альтернатив в ментально-структурированном подходе к обучению // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 7. С. 249-276. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/423252.html> (дата обращения 01.02.2016).
2. Сакулин С.А., Анисимова О.В. Формирование интегральных оценок успеваемости учащихся с помощью операторов агрегирования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 3. С. 256-268. DOI: [10.7463/0315.0759904](https://doi.org/10.7463/0315.0759904)
3. Рыжкова М.Н., Платонова А.С. Методы интегральных оценок при моделировании образовательных процессов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 02. С. 166-181. DOI: [10.7463/0216.0832379](https://doi.org/10.7463/0216.0832379)
4. Платонова А.С. Алгоритмы и программное обеспечение для информационной системы комплексного оценивания образовательных результатов школьников // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 11. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/256160.html> (дата обращения 01.03.2016).
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели: пер. с англ. М.: Мир, 1991. 463 с.
6. Grabisch M. Fuzzy integral in multicriteria decision making // Fuzzy Sets and Systems. 1995. Vol. 69, iss. 3. P. 279-298. DOI: [10.1016/0165-0114\(94\)00174-6](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)00174-6)

7. Beliakov G., Warren J. Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems // IEEE Transaction on Fuzzy Systems. 2001. Vol. 9, iss. 6. P. 773-784. DOI: [10.1109/91.971696](https://doi.org/10.1109/91.971696)
8. Marichal J.-L. Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid: Dr. diss. University of Liège, Liège, 1998-1999. 258 p. Режим доступа: <http://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/7224/1/PhDThesis.pdf> (дата обращения 01.03.2016).
9. Сизов А.С., Халин Ю.А., Цепов А.Ю. Использование owa оператора Ягера для интеграции данных на входе дсм системы оценки риска инвестирования малого инновационного предприятия // Инновации в науке. 2013. № 24. Режим доступа: <http://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-owa-operatora-yagera-dlya-integratsii-dannyh-na-vhode-dsm-sistemy-otsenki-riska-investirovaniya-malogo-innovatsionnogo> (дата обращения 01.03.2016).
10. Алфимцев А.Н. Нечеткое агрегирование мультимодальной информации в интеллектуальном интерфейсе // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 44-48.
11. Ахаев А.В., Ходашинский И.А., Анфилофьев А.Е. Метод выбора программного продукта на основе интеграла Шоке и империалистического алгоритма // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2014. № 2 (32). С. 224-229. Режим доступа: <http://www.tusur.ru/filearchive/reports-magazine/2014-32-2/43.pdf> (дата обращения 01.03.2016).
12. Максаков А.А., Сакулин С.А. Модель оценки качества внедрения информационной системы на предприятии // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. 2013. № 11 (23). DOI: [10.18698/2308-6033-2013-11-1011](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-11-1011)
13. Grabisch M. k-order additive discrete fuzzy measures and their representation // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 92, iss. 2. P. 167-189. DOI: [10.1016/S0165-0114\(97\)00168-1](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00168-1)
14. Mayag B., Grabisch M., Labreuche Ch. A representation of preferences by the Choquet integral with respect to a 2-additive capacity // Theory and Decision. 2011. Vol. 71, no. 3. P. 297-324. DOI: [10.1007/s11238-010-9198-3](https://doi.org/10.1007/s11238-010-9198-3)
15. Grabisch M. A Graphical Interpretation of the Choquet Integral // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2000. Vol. 8, no. 5. P. 627-631. DOI: [10.1109/91.873585](https://doi.org/10.1109/91.873585)
16. Сакулин С.А., Алфимцев А.Н. К вопросу о практическом применении нечётких мер и интеграла Шоке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2012. С. 55-63. Режим доступа: <http://engjournal.ru/articles/71/html/index.html#/1/> (дата обращения 01.03.2016).
17. Grabisch M., Kojadinovic I., Meyer P. A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory: Applications of the Kappalab R package // European Journal of Operational Research. 2008. Vol. 186, no. 2. P. 766-785. DOI: [10.1016/j.ejor.2007.02.025](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.02.025)

18. Marichal J.-L., Roubens M. Determination of weights of interacting criteria from a reference set // European Journal of Operational Research. 2000. Vol. 124, no. 3. P. 641-650. DOI: [10.1016/S0377-2217\(99\)00182-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00182-4)
19. Kojadinovic I. Minimum variance capacity identification // European Journal of Operational Research. 2007. Vol. 177, no. 1. P. 498-514. DOI: [10.1016/j.ejor.2005.10.059](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.059)
20. Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics // Physical Review. 1957. Vol. 106, no. 4. P. 620-630.
21. Marichal J.-L. Entropy of discrete Choquet capacities // European Journal of Operational Research. 2002. Vol. 137, no. 3. P. 612-624. DOI: [10.1016/S0377-2217\(01\)00088-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00088-1)

The Question of Selecting Aggregation Operator to Develop Integral Students' Academic Progress Score

S.A. Sakulin^{1,*}

* ss141291@yandex.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: aggregation operator, fuzzy measure, Choquet fuzzy integral, academic achievement integral indicator

The work concerns the problem of selecting an operator of the grade-based rating aggregation in a variety of subjects to develop the integral score of students' academic achievements based on expert knowledge. The goal is to justify the choice of an aggregation operator and methods of its construction. The possibilities of aggregation of the grade-based rating are mostly defined by selection of the type of an aggregation operator, which aggregates the individual disciplines ratings using the formalized expert preferences.

The paper discusses application options of different aggregation operators in this field, in particular, the arithmetic mean, the weighted arithmetic mean, the Yager's OWA operator. An analysis of the possible use of different operators has shown that the most appropriate in this field is to use the fuzzy measure Choquet integral because this type of aggregation operator complies with all the considered features of the application area. A number of formal mathematical and non-formalized properties of the Choquet integral correspond to these properties. The paper also considers the choice of an appropriate identification method of the fuzzy measure to use the Choquet integral in development of the integral score of students' academic achievements. It justifies the choice of the identification method based on variance minimization of the fuzzy measure. Other identification methods have properties that militate against their application in the area under consideration.

References

1. Belous V.V., Bobrovskii A.V., Dobryakov A.A., Karpenko A.P., Smirnova E.V. Integral estimation of multi-criterion alternatives in mental-structured approach to education. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 7, pp. 249-276. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/423252.html>, accessed 01.02.2016. (in Russian).

2. Sakulin S.A., Anisimova O.V. Forming of Students' Academic Achievement Integral Indicator Based on Aggregation Operators. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 3, pp. 256-268.
DOI: [10.7463/0315.0759904](https://doi.org/10.7463/0315.0759904) (in Russian).
3. Ryzhkova M.N., Platonova A.S. Integrated Assessment Methods in Modeling Educational Processes. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2016, no. 02, pp. 166-181. DOI: [10.7463/0216.0832379](https://doi.org/10.7463/0216.0832379) (in Russian).
4. Platonova A.S. Algorithms and software for comprehensive estimation information system of pupils' educational outcomes. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2011, no. 11. Available at:
<http://technomag.bmstu.ru/doc/256160.html> , accessed 01.03.2016. (in Russian).
5. Moulin H. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, Cambridge University Press, 1988. (Russ. ed.: Moulin H. *Kooperativnoe prinyatie reshenii: Aksiomy i modeli*. Moscow, Mir Publ., 1991. 463 p.).
6. Grabisch M. Fuzzy integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, vol. 69, iss. 3, pp. 279-298. DOI: [10.1016/0165-0114\(94\)00174-6](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)00174-6)
7. Beliakov G., Warren J. Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 2001, vol. 9, iss. 6, pp. 773-784. DOI: [10.1109/91.971696](https://doi.org/10.1109/91.971696)
8. Marichal J.-L. *Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid*. Dr. diss. University of Liège, Liège, 1998-1999. 258 p. Available at:
<http://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/7224/1/PhDThesis.pdf> , accessed 01.03.2016.
9. Sizov A.S., Khalin Yu.A., Tsepov A.Yu. Integration of incoming data by using Yager's owa operator to valuate investment appeal of a small innovation business with the use of dsm method. *Innovatsii v nauke*, 2013, no. 24. Available at:
<http://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-owa-operatora-yagera-dlya-integratsii-dannyh-na-vhode-dsm-sistemy-otsenki-riska-investirovaniya-malogo-innovatsionnogo> , accessed 01.03.2016. (in Russian).
10. Alfimtsev A.N. Fuzzy aggregation of multimodal information in an intelligent interface. *Programmnye produkty i sistemy = Software & Systems*, 2011, no. 3, pp. 44-48. (in Russian).
11. Akhaev A.V., Khodashinskii I.A., Anfilofev A.E. Method for software selection on the basis of Choquet integral and imperialist algorithm. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki = Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*, 2014, no. 2, pp. 224-229. Available at:
<http://www.tusur.ru/filearchive/reports-magazine/2014-32-2/43.pdf> , accessed 01.03.2016. (in Russian).
12. Maksakov A.A., Sakulin S.A. Evaluation model for the quality of the enterprise information system's implementation. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal:*

- Science and Innovation*, 2013, no. 11. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-11-1011](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-11-1011) (in Russian).
13. Grabisch M. k-order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 92, iss. 2, pp. 167-189. DOI: [10.1016/S0165-0114\(97\)00168-1](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00168-1)
 14. Mayag B., Grabisch M., Labreuche Ch. A representation of preferences by the Choquet integral with respect to a 2-additive capacity. *Theory and Decision*, 2011, vol. 71, no. 3, pp. 297-324. DOI: [10.1007/s11238-010-9198-3](https://doi.org/10.1007/s11238-010-9198-3)
 15. Grabisch M. A Graphical Interpretation of the Choquet Integral. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, vol. 8, no. 5, pp. 627-631. DOI: [10.1109/91.873585](https://doi.org/10.1109/91.873585)
 16. Sakulin S.A., Alfimtsev A.N. To a question on practical application of fuzzy measures and integral Shock. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering*, 2012, pp. 55-63. Available at: <http://engjournal.ru/articles/71/html/index.html#/1/> , accessed 01.03.2016. (in Russian).
 17. Grabisch M., Kojadinovic I., Meyer P. A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory: Applications of the Kappalab R package. *European Journal of Operational Research*, 2008, vol. 186, no. 2, pp. 766-785. DOI: [10.1016/j.ejor.2007.02.025](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.02.025)
 18. Marichal J.-L., Roubens M. Determination of weights of interacting criteria from a reference set. *European Journal of Operational Research*, 2000, vol. 124, no. 3, pp. 641-650. DOI: [10.1016/S0377-2217\(99\)00182-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00182-4)
 19. Kojadinovic I. Minimum variance capacity identification. *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 177, no. 1, pp. 498-514. DOI: [10.1016/j.ejor.2005.10.059](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.059)
 20. Jaynes E.T. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical Review*, 1957, vol. 106, no. 4, pp. 620-630.
 21. Marichal J.-L. Entropy of discrete Choquet capacities. *European Journal of Operational Research*, 2002, vol. 137, no. 3, pp. 612-624. DOI: [10.1016/S0377-2217\(01\)00088-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00088-1)