

# 05, май 2016

УДК 621. 864. 8

## **Математические модели движения гусеничных роботов с учётом влияния грунта**

*Пехтерев А.А., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Робототехнические системы и мехатроника»*

*Научный руководитель: Рубцов В.И., к.т.н., профессор  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Робототехнические системы и мехатроника»*

*[kafsm7@sm.bmstu.ru](mailto:kafsm7@sm.bmstu.ru)*

### **1. Введение**

В последние годы явно возрос интерес к работам по созданию автономных робототехнических комплексов (РТК), способных планировать свое поведение и вырабатывать совокупность целесообразных действий, обеспечивая выполнение цели. Это обусловлено как достижениями научно-технического прогресса, так и потенциальными преимуществами таких систем: исключение влияния человеческого фактора, снижение потерь личного состава и т.д.

Основой для решения задачи создания автономных РТК являются интеллектуальные бортовые системы управления. В свою очередь, начальным этапом разработки такой системы является построение математической модели движения объекта, которая будет наиболее точно описывать все динамические процессы.

Построение такой модели представляет собой актуальную задачу благодаря тому, что количество учитываемых факторов может быть достаточно велико и ограничивается только временем отработки сигналов. Таким образом, усложнение модели возможно до тех пор, пока она будет позволять РТК обрабатывать сигналы в режиме реального времени.

Наибольший интерес представляет собой задача учёта факторов влияния грунта на гусеничный движитель, и, соответственно, на динамику движения. В настоящее время данная задача не решена однозначно, а существующие решения требуют реализации и проверки работоспособности на практике.

## 2. Постановка задачи

Для решения полномасштабной задачи автономного управления движением РТК необходима разработка и внедрение в практику системы обеспечения опорной проходимости. Первым этапом создания такой системы является разработка математической модели поведения гусеничного робота в различных грунтовых условиях, т.е. решение прямой и обратной задачи динамики;

Целью настоящей статьи является обзор по имеющимся математическим моделям движения гусеничных транспортных средств и, на основе полученных данных – выбор основы для первого этапа создания математической модели.

## 3. Пространственная модель движения РТК.

В [1] была предложена следующая математическая модель динамики РТК:

Движение РТК представляется в виде пространственного движения твердого тела, мгновенное состояние которого оценивается векторами скорости поступательного движения центра масс  $\bar{V}$  :

$$\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}, \quad (1)$$

и угловой скорости вращения относительно центра масс  $\bar{\Omega}$  :

$$\bar{\Omega} = \omega_x \cdot \bar{i} + \omega_y \cdot \bar{j} + \omega_z \cdot \bar{k}, \quad (2)$$

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  - единичные векторы осей принятой координатной системы;  $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции векторов скоростей на соответствующие оси координат. Пусть также мгновенное положение центра масс определяются  $x(t), y(t), z(t)$ , а угловая ориентация углами  $\theta(t), \varphi(t), \psi(t)$ .

В предлагаемой модели используются три различные системы координат, представленные на рис. 1.

Неподвижная система координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  предназначена для описания заданных дорожно-грунтовых условий движения, причем ее начало совпадает с базовой точкой рельефа.

Подвижная система координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  перемещается с центром масс, причем ее начало совпадает с центром масс, а ее оси  $O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1$  параллельны соответствующим осям системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ .

Связанная система координат  $OXYZ$  используется для математического описания динамики движения, причем ее центр  $O$  всегда совпадает с центром масс, а оси  $OX, OY, OZ_1$  совпадают с главными центральными осями инерции РТК.

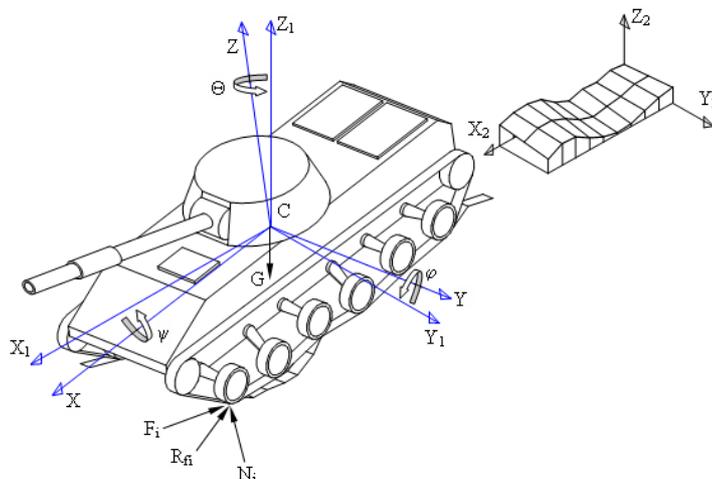


Рис. 1. Системы координат, необходимые для описания движения РТК

Форма уравнений динамики движения РТК, записанных в подвижной системе координат, достаточно удобна для последующего математического моделирования при достаточно полном отражении процессов взаимодействия движущегося тела и внешней среды.

Положение машины в пространстве в любой момент времени определяется взаимным расположением подвижной и связанной систем координат, которые можно описать с помощью углов Эйлера-Крылова, а именно,  $\theta$  – угол рыскания,  $\psi$  – угол дифферента,  $\varphi$  – угол крена.

Известны зависимости, связывающие углы Эйлера-Крылова с проекциями угловой скорости на связанные оси:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \dot{\psi} &\equiv \omega_x \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi, \\ \dot{\theta} &= \frac{\omega_z \cos \varphi - \omega_x \sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \dot{\varphi} &= \omega_y - \operatorname{tg} \psi (\omega_z \cos \varphi - \omega_x \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений динамики движения РТК:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_x + m(\omega_y V_z - \omega_z V_y) &= G_x + F_x & I_x \omega_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x \\ m\dot{V}_y + m(\omega_z V_x - \omega_x V_z) &= G_y + F_y & I_y \omega_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y \\ m\dot{V}_z + m(\omega_x V_y - \omega_y V_x) &= G_z + F_z & I_z \omega_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z \end{aligned} \quad (4)$$

В правую часть уравнений динамики входят слагаемые, характеризующие внешние силы и моменты, действующие на РТК. Для некоторых из них можно написать явные выражения. Например, выражения для проекции силы тяжести ( $G_x, G_y, G_z$ ) на оси подвижной системы координат  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned} G_x &= m \cdot g \cos \psi \sin \varphi, \\ G_y &= -m \cdot g \sin \varphi, \\ G_z &= -m \cdot g \cos \psi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $m$  – масса машины,  $g$  – ускорение свободного падения.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	- проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$	- проекции вектора углового ускорения на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$V_x, V_y, V_z$	- проекции вектора линейной скорости на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$	- проекции вектора ускорения на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$G_x, G_y, G_z$	- проекции вектора силы тяжести на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$F_x, F_y, F_z$	- результирующие проекции векторов нормальной реакции грунта, сил взаимодействия между грунтом и опорной поверхностью, сил сопротивления движению на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$M_x, M_y, M_z$	- проекции момента от нормальной реакции грунта, от силы взаимодействия между грунтом и основанием, от сил сопротивления движению на оси подвижной системы координат $OXYZ$
$I_x, I_y, I_z$	- моменты инерции относительно осей подвижной системы координат $OXYZ$

#### 4. Модель плоскопараллельного движения РТК

В целом, можно отметить, что рассмотренная модель динамики РТК является алгоритмически достаточно сложной, позволяет моделировать пространственное движение РТК как с учетом трехмерного профиля поверхности передвижения, так и реальных характеристик сопротивления и сцепления грунта. Однако эту модель из-за ее сложности трудно использовать при отладке модели.

В [2] рассматривается модель плоско-параллельного движения РТК.

Уравнения кинематики, в которых присутствуют слагаемые, учитывающие явление буксования гусениц обоих бортов РТК:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \alpha - v \sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{2}(V_n + V_l), \\ \dot{y} &= V \sin \alpha + v \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2}(V_n + V_l), \\ \dot{\alpha} &= \omega + \frac{1}{2h}(V_l - V_n).\end{aligned}\tag{6}$$

В выражениях используются следующие обозначения

$x, y$  – координаты центра масс РТК,

$\alpha$  – угол между продольной осью РТК и выбранной осью (ось X) неподвижной системы координат,

$V_n$  – скорость буксования правой гусеницы,

$V_l$  – скорость буксования левой гусеницы.

Уравнения динамики плоскопараллельного движения РТК:

$$\begin{aligned}m(\dot{V} + v\omega) &= \sum F_x, \\ m(V\omega - \dot{v}) &= \sum F_y, \\ J_z \dot{\omega} &= \sum M_z,\end{aligned}\tag{7}$$

$V$  – скорость РТК в направлении продольной оси  $Cx$ ,

$v$  – боковая (в направлении поперечной оси) скорость центра масс РТК,

$\omega$  – угловая скорость вращения центра масс относительно вертикальной оси  $Cz$ ,

$m$  – масса РТК,

$J_z$  – момент инерции РТК относительно вертикальной оси  $Cz$ , проходящей через центр масс,

$\sum F_x$  и  $\sum F_y$  – суммы проекций на подвижные координатные оси всех внешних сил, действующих на РТК со стороны дороги,

$\sum M_z$  – сумма моментов внешних сил, действующих на РТК со стороны дороги, относительно вертикальной оси  $Cz$ .

## 5. Модель движения РТК, учитывающая буксование и юз гусениц

Для полного описания динамики движения РТК, необходимо получить значения всех сил и моментов, действующих на гусеничный движитель, в том числе и со стороны грунта. В [3] уравнения движения центра масс РТК представлены для двух случаев: прямолинейного движения и поворота.

Уравнение движения для случая прямолинейного движения на подъеме с сопротивлением на крюке:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot (P - f_c \cdot G - R_{кр}) \quad (8)$$

$\ddot{x}$  – ускорение центра масс РТК;

$m$  – масса РТК;

$f_c$  - коэффициент сопротивления движению;

$G$  – вес РТК.

Для решения данного уравнения была использована теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$dT = dW_1 + dW_2 + dW_3 \quad (9)$$

где  $dT$  – дифференциал кинетической энергии РТК;

$dW_1$  - элементарная работа движущих сил (двигателя);

$dW_2$  - элементарная работа движущих силы тяжести;

$dW_3$  - элементарная работа всех сил сопротивления движению;

В итоге было получено [4] следующее уравнение движения центра масс:

$$\ddot{x} = \frac{1}{\delta m} \cdot \left( \frac{270 N_o \eta_m}{v} - f_c \cdot G - R_{кр} \right) \quad (10)$$

$\delta$  - коэффициент условного приращения массы РТК (коэффициент учёта вращающихся масс);

$N_o$  - свободная мощность, поступающая от двигателя в трансмиссию РТК;

$\eta_m$  - общее КПД трансмиссии.

Поворот РТК осуществляется в результате изменения моментов на ведущих колесах и скоростей движения забегающей и отстающей гусениц при помощи механизмов поворота. При повороте, вследствие вертикальной деформации грунта гусеницами, возникают силы сопротивления поступательному движению гусениц, а вследствие бокового перемещения траков — силы сопротивления вращательному движению нижних опорных ветвей гусениц по грунту. Последние образуют момент, называемый моментом

сопротивления повороту РТК. Этот момент преодолевается поворачивающим моментом, вызванным силами тяги на гусеницах. Силы же тяги на гусеницах создаются двигателем при помощи механизма поворота и гусеничного движителя, взаимодействующего с грунтом. Процесс изменения моментов на ведущих колесах и пропорциональных им сил тяг на гусеницах сопровождается изменением скоростей гусениц.

Сила тяги на забегающей гусенице возникает так же, как и при прямолинейном движении. Сила же на отстающей гусенице в большинстве случаев возникает при торможении ее с помощью тормозных элементов механизма поворота.

В случае действия только силы тяги на забегающей гусенице при отсутствии силы торможения на отстающей, РТК поворачиваются во многих случаях с очень большим радиусом. Поворот с меньшими радиусами возможен только в результате принудительного уменьшения скорости отстающей гусеницы. В этом случае отстающая гусеница упирается в грунт и со стороны грунта возникает касательная реакция, направленная против движения РТК. В отдельных случаях, когда сопротивление поступательному движению гусениц велико, а сопротивление повороту незначительно, сила на отстающей гусенице может быть даже направлена по движению РТК и являться силой тяги. В этом случае процесс образования силы тяги на отстающей гусенице аналогичен образованию ее на забегающей гусенице.

В общем случае движения при наличии других внешних сил, действующих на РТК при повороте (например, центробежной силы или горизонтальных составляющих веса РТК при движении по косоугору и других сил), равенство внешних моментов устанавливается при соответствующих этим условиям движения буксовании и юзе гусениц.

Угловая скорость поворота, согласно плану скоростей (рис. 2) будет равна:

$$\omega' = \frac{v_2'}{R'} = \frac{v_1'}{R'-B} = \frac{v_2' - v_1'}{B} = \frac{v_{2abc}}{y_2} = \frac{v_{1abc}}{y_1} \quad (11)$$

Следовательно, смещение полюсов поворота гусениц будет равно

$$y_2 = \frac{v_{2abc}}{\omega'} \text{ и } y_1 = \frac{v_{1abc}}{\omega'}$$

Сила тяги и сила торможения, согласно схеме сил, определяются из уравнений моментов относительно точек  $O_1$  и  $O_2$ .

$$P_2 = R_2 + \frac{M_c}{B}; \quad (12)$$

$$P_1 = -R_1 + \frac{M_c}{B}.$$

Для расчета коэффициента сопротивления повороту используется расчетная схема, которая предполагает, что нормальное давление опорных поверхностей гусениц на грунт распределено равномерно по длине гусеницы, а поперечные реакции со стороны грунта на опорную поверхность пропорциональны нормальной нагрузке.

Равнодействующие поперечных сил, действующих на половину длины опорной поверхности гусениц, равны

$$S_2 = S_1 = \mu q' \frac{L}{2} \quad (13)$$

где  $q'$  - давление на единицы длины опорной поверхности гусеницы:

$$q' = \frac{G}{2L} \quad (14)$$

Момент сопротивления повороту равен

$$M_c = S_2 \frac{L}{2} + S_1 \frac{L}{2} = \frac{\mu GL}{4} \quad (15)$$

Коэффициент  $\mu$  не является постоянной величиной. На основании опыта установлена следующая зависимость коэффициента сопротивления повороту от радиуса поворота

$$\mu = \frac{\mu_{\max}}{a + (1-a) \frac{R}{B}} \quad (16)$$

где  $R$  - теоретический радиус поворота;

$\mu_{\max}$  - значение при  $R=B$ ;

$a$  - коэффициент, определяемый опытным путем.

Таблица 1

Коэффициент сопротивления повороту

Грунт	$\mu_{\max}$
Сухой дернистый суглинок	0,8 – 1,0
Сухая грунтовая дорога на суглинке	0,7 – 0,9
Пахота на суглинке	0,6 – 0,8
Влажный суглинистый грунт	0,3 – 0,4
Снег	0,25 – 0,7

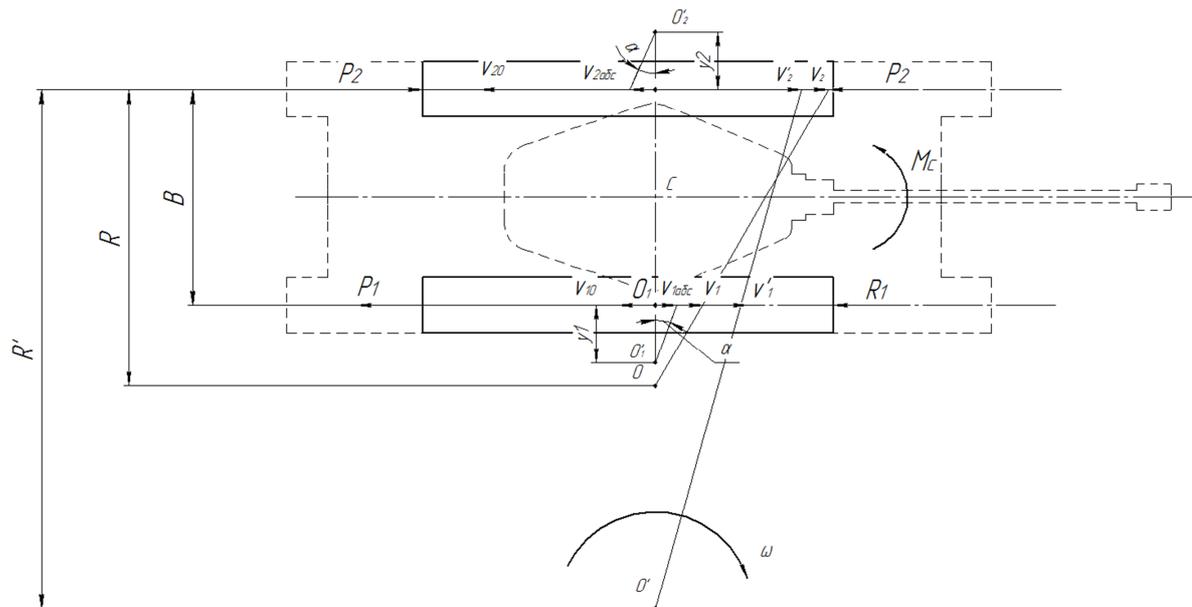


Рис. 2. Схема скоростей и сил при равномерном повороте

Векторы сил и скоростей, изображенных на рис.2, имеют следующие значения:

$\vartheta_2'$  — переносная скорость забегающей гусеницы;

$\vartheta_{20}$  — относительная скорость забегающей гусеницы;

$\vartheta_{2abc}$  — абсолютная скорость центра опорной ветви забегающей гусеницы, или скорость буксования;

$\vartheta_2$  — переносная скорость забегающей гусеницы при отсутствии буксования, когда  $\vartheta_2 = \vartheta_{20}$  (теоретическая скорость забегающей гусеницы);

$O_2$  — геометрический центр опорной поверхности забегающей гусеницы;

$O_2'$  — полюс поворота забегающей гусеницы, т. е. мгновенный центр вращения ее опорной поверхности;

$y_2$  — поперечное смещение полюса поворота забегающей гусеницы;

$\vartheta_1'$  — переносная скорость отстающей гусеницы;

$\vartheta_{10}$  — относительная скорость отстающей гусеницы;

$\vartheta_{1abc}$  — абсолютная скорость центра опорной ветви отстающей гусеницы, или скорость юза;

$\vartheta_1$  — переносная скорость отстающей гусеницы при отсутствии юза (теоретическая скорость отстающей гусеницы);  $\vartheta_1 = \vartheta_{10}$ ;

$O_1$  — геометрический центр опорной поверхности гусеницы;

$O_1'$  — полюс поворота отстающей гусеницы, т.е. мгновенный центр вращения ее опорной поверхности;

$u_1$  — поперечное смещение полюса поворота отстающей гусеницы;

$R$  — теоретический радиус поворота, или радиус поворот РТК при отсутствии буксования и юза гусениц;

$R'$  — фактический радиус поворота;

$O'$  — центр поворота РТК (точка пересечения оси вращения РТК с плоскостью его движения);

$O$  — центр поворота при отсутствии буксования и юза;

$P_2$  — сила тяги забегающей гусеницы;

$P_1$  — сила торможения отстающей гусеницы;

$R_2$  — сопротивление поступательному движению забегающей гусеницы;

$R_1$  — сопротивление поступательному движению отстающей гусеницы;

$M_c$  — момент сопротивления повороту;

При движении по наклонной плоскости появляются составляющие веса РТК, которые действуют параллельно плоскости движения. При движении РТК на подъем или спуск составляющая веса будет направлена вдоль его продольной оси, создавая сопротивление подъему или силу, действующую по движению, а при движении с чистым креном эта составляющая веса РТК будет создавать поперечную силу действующую или в сторону поворота (поворот под гору), или в сторону, противоположную повороту (поворот в гору). При промежуточных положениях РТК на косогоре будут действовать одновременно поперечная и продольная силы.

Наиболее общим случаем является неравномерный поворот РТК на косогоре (рис. 3). При этом изменяется как скорость поступательного движения РТК, так и радиус поворота. Процесс входа РТК в равномерный поворот так же, как и процесс выхода его из поворота, является частным случаем неравномерного поворота.

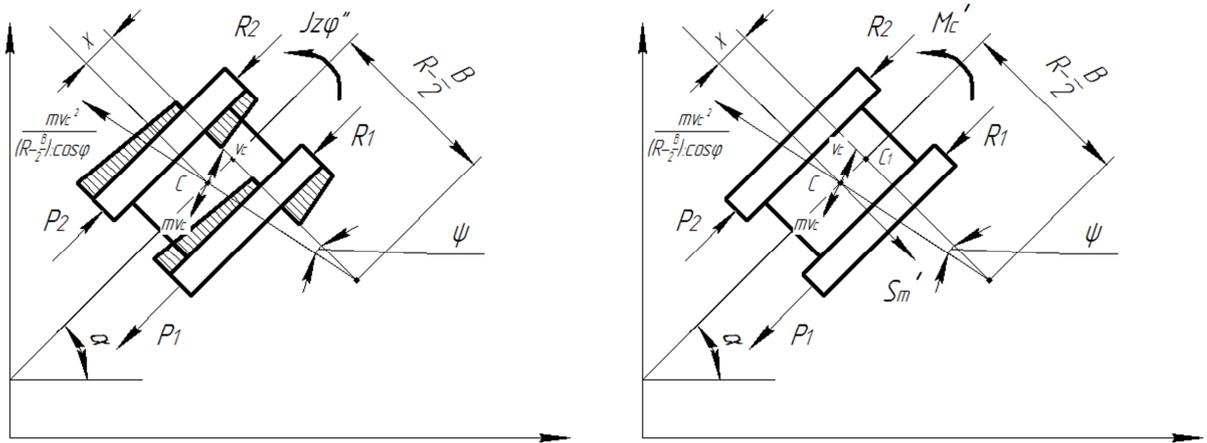


Рис.3. Схема неравномерного поворота РТК

Уравнения движения РТК в неподвижных координатах в соответствии со схемой будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum X &= -m\ddot{x} + (P_2 - P_1 - R_2 - R_1)\cos\varphi + S_T\sin\varphi = 0 \\ \sum Y &= -m\ddot{y} + (P_2 - P_1 - R_2 - R_1)\sin\varphi - S_T\cos\varphi = 0 \\ \sum M &= -I_z\ddot{\varphi} - M_c + (P_2 + P_1 - R_2 + R_1)\frac{B}{2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где  $m\ddot{x}$  — проекция силы инерции на ось  $x$ ;

$m\ddot{y}$  — проекция силы инерции на ось  $y$ .

Кроме того, уравнения дифференциальных связей будут:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{в.к2} + \omega_{в.к1}}{2} r_{в.к.} &= \dot{\varphi} \\ \frac{\omega_{в.к2} + \omega_{в.к1}}{2} r_{в.к.} &= \vartheta_{сх} = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\omega_{в.к1}$  — угловая скорость ведущего колеса отстающей гусеницы;

$\omega_{в.к2}$  — угловая скорость ведущего колеса забегающей гусеницы;

$\vartheta_{сх}$  — составляющая скорости  $\vartheta_c$  по продольной оси РТК  $x_1$ ;

$\dot{x}$  — составляющая скорости  $\vartheta_c$  по оси  $x$ ;

$\dot{y}$  — составляющая скорости  $\vartheta_c$  по оси  $y$ .

После перехода от неподвижных координат к подвижным, в системе координат связанной с центром масс РТК:

$$\sum X_1 = -m\ddot{x}_1 + P_2 - P_1 - R_2 - R_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\sum Y_2 &= -m\ddot{y}_1 - S_T = 0 \\ \sum M &= -I_z\ddot{\phi} - M_c + (P_2 + P_1)\frac{B}{2} = 0\end{aligned}\quad (19)$$

Для полного решения задачи также приводится решение уравнения кинетической энергии РТК. Откуда значение скорости:

$$\dot{\vartheta}_{cx} = \frac{1}{\delta_{\Pi}m} \left[ P_{\text{дп}} - P_1(1 - \eta_p) \frac{R - B}{R - \frac{B}{2}} - R_{\Pi} \right] = \dot{x}_1 \quad (20)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\vartheta}_{cx}}{R - \frac{B}{2}} \quad (21)$$

## 6. Первый этап создания математической модели

На основе полученных уравнений динамики (18) или (20) возможно построение модели и проведение математического моделирования в различных программных пакетах, например в MATLAB Simulink. Полученная математическая модель будет учитывать некоторые явления, возникающие при взаимодействии гусеничного движителя с деформируемым основанием.

Для того чтобы расширить круг описываемых явлений и провести уточнение модели, возможно использование эмпирических зависимостей, которые были получены при испытаниях гусеничных транспортных средств на полигонах в различных грунтовых условиях. Использование таких зависимостей требует многократной отладки модели, которая должна проводиться в сравнении с данными, полученными при испытаниях опытного образца.

Дальнейшее изучение данной темы не исключает использования достаточно новых методов решения подобных задач, таких как нейронные сети или нечёткая логика.

## 7. Заключение

В данной статье был проведён обзор существующих математических моделей движения гусеничных роботов, которые учитывают или позволят учесть динамическое влияние грунта на гусеничный движитель. Точность описания работы динамики системы может увеличиваться до тех пор, пока сложность системы будет позволять работать в режиме реального времени. На основе приведенных уравнений возможно проведение математического моделирования в различных программных пакетах и первичная отладка

модели. Одно из представленных описаний динамики системы будет использовано в качестве основы для первого этапа создания математической модели.

### Список литературы

- [1] Носков В.П., Рубцов В.И., Рубцов И.В. Математические модели движения и системы технического зрения мобильных робототехнических комплексов: учеб. пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 93с.
- [2] Машков К.Ю., Рубцов В.И., Рубцов И.В. Состав и характеристики мобильных роботов: учебное пособие по курсу «Управление роботами и робототехническими комплексами». М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 75 с.
- [3] Никитин А.О., Сергеев Л.В. Теория танка. М.: Изд. академии БТВ, 1962. 580 с.
- [4] Дмитриев А.А., Леонтьев М.Е. О Дифференциальных уравнениях прямолинейного движения танка // Труды академии БТВ. 1958. Сб. №164. С. 17-24.