

05, май 2016

УДК 539.3

Исследование упругих характеристик композита с эллипсоидальными включениями

*Сергеева Е.С., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»*

*Научный руководитель: Зарубин В.С., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»*

fn@bmstu.ru

В настоящее время в различных областях техники широко используют композиционные материалы, армированные включениями различной формы. Область применения тех или иных композитов обусловлена требованиями к их эксплуатационным свойствам, в частности, физическим, среди которых важную роль играют упругие характеристики. Существует множество работ, посвященных количественному анализу упругих свойств гетерогенных тел, к которым можно отнести композиты, например, [1 – 4]. Стоит отметить, что наименее изученными являются композиты, армированные включениями эллипсоидальной формы, в отличие от наиболее часто встречающихся в литературе материалов с включениями шаровой формы.

В последнее время в качестве включений для композитов рассматривают различные наноструктурные элементы, в том числе элементы, выполненные из графена [5, 6], например, нанотрубки. Углеродные нанотрубки (УНТ) можно рассматривать как предельный случай эллипсоида вращения. Включение можно считать УНТ, если его размер в одном из ортогональных направлений значительно больше размеров в двух других направлениях. УНТ обладают уникальными механическими свойствами. Существуют оценки продольного модуля упругости (модуля Юнга) УНТ порядка 0.5 - 1 ТПа [7 – 10].

Применение включений, имеющих форму вытянутого эллипсоида вращения, в качестве армирующих элементов, может повысить упругие характеристики композитных материалов. Поэтому разработка математической модели, позволяющей теоретически

получить двусторонние оценки упругих характеристик композита с анизотропными включениями, является актуальной задачей.

Оценку упругих характеристик композита по известным свойствам его матрицы и армирующих включений можно получить, используя различные подходы [11]. В данной работе для получения интересующих оценок использован метод самосогласования.

Основные соотношения

Рассмотренный композит состоял из изотропной линейно упругой матрицы, свойства которой охарактеризованы объемным модулем упругости K° и модулем сдвига G° , и линейно упругих анизотропных включений, в виде вытянутых эллипсоидов вращения N различных типов. Геометрическая характеристика каждого из N типов с номером $\zeta = \overline{1, N}$ определена отношением $\overline{b_\zeta} = r_\zeta / b_\zeta$ радиуса эллипсоида r_ζ к длине большей полуоси b_ζ . При объемной концентрации C_V^ζ включений типа ζ объемная концентрация всех включений равна

$$C_V = \sum_{\zeta=1}^N C_V^\zeta,$$

где C_V – объемная концентрация включений всех типов в композите.

Упругие характеристики включений каждого типа определены тензорами четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости C_{ijkl}^ζ и S_{ijkl}^ζ соответственно. В данной работе использовано предположение о том, что одна из главных осей этих тензоров для каждого типа эллипсоидального включения совпадает с осью его вращения. В качестве оси вращения выбрана ось $O\xi_3$.

В данной работе также принято допущение о хаотической ориентации осей вращения $O\xi_3$ для включений всех типов в представительном объеме композита, что означает, что композит может быть рассмотрен как изотропный материал [2]. Таким образом, искомые упругие характеристики композита представлены тензором четвертого ранга коэффициентов упругости

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G I_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1)$$

и тензором коэффициентов податливости S_{ijkl} – обратным к C_{ijkl} . Здесь K – объемный модуль упругости, G – модуль сдвига композита, I_{ijkl} – единичный тензор четвертого ранга, δ_{ij} – символ Кронекера.

Заданные упругие характеристики изотропной матрицы композита представлены соотношениями, аналогичными (1)

$$C_{ijkl}^{\circ} = \left(K^{\circ} - \frac{2G^{\circ}}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G^{\circ} I_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

и S_{ijkl}° – тензором, обратным к C_{ijkl}° .

Тензору C_{ijkl}^{ζ} , определяющему упругие свойства трансверсально изотропного включения типа $\zeta = \overline{1, N}$, поставлена в соответствие симметрическая матрица C_{pq}^{ζ} ($p, q = 1, \dots, 6$) шестого порядка вида [12]

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{\zeta} & C_{12}^{\zeta} & C_{13}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{\zeta} & C_{11}^{\zeta} & C_{13}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{\zeta} & C_{13}^{\zeta} & C_{33}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{\zeta} \end{pmatrix},$$

где $C_{66}^{\zeta} = (C_{11}^{\zeta} - C_{12}^{\zeta})/2$. Соответствующая матрица коэффициентов податливости S_{pq}^{ζ} для трансверсально изотропного включения представлена следующим образом [12]

$$\begin{pmatrix} S_{11}^{\zeta} & S_{12}^{\zeta} & S_{13}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12}^{\zeta} & S_{11}^{\zeta} & S_{13}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13}^{\zeta} & S_{13}^{\zeta} & S_{33}^{\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44}^{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^{\zeta} \end{pmatrix},$$

где $S_{66}^{\zeta} = 2(S_{11}^{\zeta} - S_{12}^{\zeta})$.

Верхние и нижние оценки упругих модулей включений и матрицы композита

Верхние и нижние оценки упругих модулей композита были получены с помощью следующих соотношений [12], в которых использовано правило суммирования по повторяющимся латинским индексам,

$$K^\zeta = \frac{1}{9} C_{iikk}^\zeta, \quad (2)$$

$$\frac{1}{K^\zeta} = S_{iikk}^\zeta, \quad (3)$$

$$G^\zeta = \frac{1}{10} \left(C_{ikik}^\zeta - \frac{1}{3} C_{iikk}^\zeta \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{G^\zeta} = \frac{2}{5} \left(S_{ikik}^\zeta - \frac{1}{3} S_{iikk}^\zeta \right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{E^\zeta} = \frac{1}{9K^\zeta} + \frac{1}{3G^\zeta}, \quad (6)$$

$$\nu^\zeta = \frac{E^\zeta}{2G^\zeta} - 1, \quad (7)$$

где

$$C_{iikk}^\zeta = C_{11}^\zeta + C_{22}^\zeta + C_{33}^\zeta + 2C_{12}^\zeta + 2C_{13}^\zeta + 2C_{23}^\zeta, \quad (8)$$

$$C_{ikik}^\zeta = C_{11}^\zeta + C_{22}^\zeta + C_{33}^\zeta + 2C_{66}^\zeta + 2C_{55}^\zeta + 2C_{44}^\zeta, \quad (9)$$

$$S_{iikk}^\zeta = S_{11}^\zeta + S_{22}^\zeta + S_{33}^\zeta + 2S_{12}^\zeta + 2S_{13}^\zeta + 2S_{23}^\zeta, \quad (10)$$

$$S_{ikik}^\zeta = S_{11}^\zeta + S_{22}^\zeta + S_{33}^\zeta + \frac{S_{66}^\zeta}{2} + \frac{S_{55}^\zeta}{2} + \frac{S_{44}^\zeta}{2}. \quad (11)$$

Здесь K^ζ – объемный модуль упругости, G^ζ – модуль сдвига, E^ζ – модуль Юнга, ν^ζ – коэффициент Пуассона, $C_{iikk}^\zeta, C_{ikik}^\zeta, S_{iikk}^\zeta, S_{ikik}^\zeta$ – инварианты тензоров коэффициентов упругости C_{ijmn}^ζ и податливости S_{ijmn}^ζ материала включений типа $\zeta = \overline{1, N}$. Из (6) получено следующее соотношение

$$\frac{1}{9K^{\zeta+}} + \frac{1}{3G^{\zeta+}} \leq \frac{1}{E^\zeta} \leq \frac{1}{9K^{\zeta-}} + \frac{1}{3G^{\zeta-}},$$

следовательно

$$E^{\zeta+} = \frac{1}{\frac{1}{9K^{\zeta+}} + \frac{1}{3G^{\zeta+}}},$$

$$E^{\zeta-} = \frac{1}{\frac{1}{9K^{\zeta-}} + \frac{1}{3G^{\zeta-}}}.$$

Из (7)

$$\nu^{\zeta+} = \frac{E^{\zeta+}}{2G^{\zeta+}} - 1,$$

$$\nu^{\zeta-} = \frac{E^{\zeta-}}{2G^{\zeta-}} - 1.$$

Здесь $K^{\zeta+}, G^{\zeta+}, E^{\zeta+}, \nu^{\zeta+}$ – верхние оценки для объемного модуля упругости, модуля сдвига, модуля продольной упругости и соответствующая им оценка коэффициента Пуассона материала включений композита; $K^{\zeta-}, G^{\zeta-}, E^{\zeta-}, \nu^{\zeta-}$ – нижние оценки для объемного модуля упругости, модуля сдвига, модуля продольной упругости и соответствующая им оценка коэффициента Пуассона материала включений композита.

Получены следующие соотношения для двусторонних оценок упругих модулей включений композита:

из (2), (4), (8), (9) **верхние оценки:**

$$K^{\zeta+} = \frac{2C_{11}^{\zeta} + C_{33}^{\zeta} + 2(C_{12}^{\zeta} + 2C_{13}^{\zeta})}{9}, \quad (12)$$

$$G^{\zeta+} = \frac{1}{30}(7C_{11}^{\zeta} - 5C_{12}^{\zeta} - 4C_{13}^{\zeta} + 2C_{33}^{\zeta} + 12C_{44}^{\zeta}); \quad (13)$$

из (3), (5), (10), (11) *нижние оценки*:

$$\frac{1}{K^{\zeta-}} = 2S_{11}^{\zeta} + S_{33}^{\zeta} + 2(S_{12}^{\zeta} + 2S_{13}^{\zeta}), \quad (14)$$

$$\frac{1}{G^{\zeta-}} = \frac{2}{15} (7S_{11}^{\zeta} + 2S_{33}^{\zeta} + 3S_{44}^{\zeta} - 5S_{12}^{\zeta} - 4S_{13}^{\zeta}). \quad (15)$$

В данной работе было принято допущение о том, что матрица композита является изотропной. Проведя процедуру, аналогичную построению верхних и нижних оценок для включений композита, получены соотношения, позволяющие определить верхние и нижние оценки упругих модулей для материала матрицы:

из (2), (4), (8), (9) *верхние оценки*:

$$K^{\circ+} = \frac{C_{11}^{\circ} + C_{12}^{\circ}}{3}, \quad (16)$$

$$G^{\circ+} = \frac{1}{5} (C_{11}^{\circ} - C_{12}^{\circ} + 3C_{44}^{\circ}); \quad (17)$$

из (3), (5), (10), (11) *нижние оценки*:

$$\frac{1}{K^{\circ-}} = 3(S_{11}^{\circ} + 2S_{12}^{\circ}), \quad (18)$$

$$\frac{1}{G^{\circ-}} = \frac{1}{5} (4(S_{11}^{\circ} - S_{12}^{\circ}) + 3S_{44}^{\circ}). \quad (19)$$

Метод самосогласования

Для оценки характеристик композитного материала использован метод самосогласования. Этот метод состоит в осреднении возмущений напряженно-деформированного состояния в элементах неоднородности (включениях или частицах матрицы) и может быть сведен к отысканию решения задачи Эшелби о взаимодействии изотропного линейно упругого сферического или эллипсоидального включения с изотропной линейно упругой средой.

В силу неопределенности формы частиц матрицы, связывающей в композите включения при их хаотическом расположении, в качестве средней статистической эта форма принята шаровой с радиусом, изменяющимся от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет заполнить все пустоты между шаровыми включениями.

Взаимодействие матрицы, состоящей из упругих шаровых частиц, с изотропной окружающей средой определено соотношениями [12]

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = u_{ijmn}^{\circ} \varepsilon_{mn}^{\circ}, u_{ijmn}^{\circ} = [C_{ijrs}^{\circ} - C_{ijpq} (I_{pqrs} - W_{pqrs})]^{-1} (C_{rsmn}^{\circ} - C_{rsmn}^{\circ}). \quad (20)$$

Здесь и далее $p, q, r, s = 1, 2, 3$, ε_{ij}° – тензор, характеризующий отклонения деформации в частице от однородного деформированного состояния представительного объема композита, определяемого тензором ε_{mn}^0 ,

$$W_{pqrs} = \frac{3}{2} \frac{1 - \nu}{4 - 5\nu} \left(\frac{1 - 5\nu}{1 + \nu} \delta_{ij} \delta_{mn} + 5I_{ijmn} \right),$$

где ν – коэффициент Пуассона среды, окружающей частицу матрицы, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для трансверсально изотропного включения, свойства которого характеризует тензор четвертого ранга $C_{ijpq}^{(\zeta)}$ коэффициентов упругости, использованы соотношения, аналогичные (20),

$$\varepsilon_{ij}^{(\zeta)} = u_{ijmn}^{(\zeta)} \varepsilon_{mn}^0, \quad u_{ijmn}^{(\zeta)} = \left[C_{ijrs}^{\circ} - C_{ijpq} \left(I_{pqrs} - W_{pqrs}^{(\zeta)} \right) \right]^{-1} \left(C_{rsmn} - C_{rsmn}^{(\zeta)} \right).$$

где $u_{ijmn}^{(\zeta)}$ – тензор, определяющий отклонение деформации в этом включении от однородного состояния представительного объема композита, $W_{pqrs}^{(\zeta)}$ – тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от искомых характеристик композита и от формы включения, принадлежащего типу с номером $\zeta = \overline{1, N}$. Тензор $W_{pqrs}^{(\zeta)}$ является обратным тензору Эшелби [1, 13] $N_{pqrs}^{(\zeta)}$ с компонентами, определенными в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. В случае трансверсально изотропных включений тензору $N_{pqrs}^{(\zeta)}$ соответствует несимметричная матрица $N^{(\zeta)}$ шестого порядка, имеющая семь независимых элементов [1] (у элементов матрицы и у параметра \overline{b}_{ζ} для удобства нижний индекс ζ опущен):

$$\begin{aligned} N_{11} &= N_{22} = QD_{11} + RD_1, & N_{12} &= N_{21} = QD_{11}/3 - RD_1, \\ N_{33} &= QD_{33} + RD_3, & N_{13} &= N_{23} = QD_{13} - RD_1, & N_{66} &= QD_{11}/3 + RD_1, \\ & & N_{31} &= N_{32} = QD_{13}b^2 - RD_3, \\ N_{44} &= N_{55} = Q \left(1 + \overline{b}^2 \right) N_{13}/2 + R(1 - D_1)/2, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = \frac{\bar{b}^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{(\bar{b}^2 + u)^2 \sqrt{1+u}},$$

$$\bar{b} = b_1/b_3, \quad Q = \frac{3}{2}(1-\nu), \quad R = \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu}, \quad \nu = \frac{3K/2 - G}{3K + G}$$

– коэффициент Пуассона окружающей включение изотропной среды, K и G – объемный модуль упругости и модуль сдвига этой среды соответственно,

$$D_3 = 1 - 2D_1, \quad D_{13} = (D_1 - D_3) / \left(3 \left(1 - \bar{b}^2 \right) \right),$$

$$D_{11} = \left(1 - 3D_{13}\bar{b}^2 \right) / 4, \quad D_{33} = 1/3 - 2D_{13}.$$

Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Осреднение по объему композита возмущений деформации по всем включениям и частицам матрицы, согласно методу самосогласования, описано следующим соотношением [12]

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\circ} \rangle C_V^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N \langle \varepsilon_{ij}^{\zeta} \rangle C_V^{\zeta} = \mathbf{0}_2,$$

где $\mathbf{0}_2$ – тензор второго ранга с нулевыми компонентами, C_V° – объемная концентрация шаровых частиц матрицы в композите. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этого выражения, имеют один и тот же множитель ε_{ij}^0 , характеризующий макроскопически однородное деформированное состояние композита. Следовательно, справедлив переход к осреднению тензоров четвертого ранга

$$\langle u_{ijmn}^{\circ} \rangle C_V^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N \langle u_{ijmn}^{\zeta} \rangle C_V^{\zeta} = \mathbf{0}_4, \quad (21)$$

где $\mathbf{0}_4$ – тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами. При хаотической ориентации осей вращения эллипсоидальных включений выражение (21) эквивалентно системе двух однородных уравнений, левые части которых содержат линейные инварианты тензоров u_{ijmn}° и u_{ijmn}^{ζ} , $\zeta = \overline{1, N}$ [12]. Эти уравнения, содержащие в качестве неизвестных объемный модуль K и модуль сдвига G исследуемого композита, представлены в следующем виде

$$\begin{cases} u_{kkmm}^{\circ} C_V^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N u_{kkmm}^{\zeta} C_V^{\zeta} = 0, \\ u_{kmmk}^{\circ} C_V^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N u_{kmmk}^{\zeta} C_V^{\zeta} = 0. \end{cases}$$

Зависимость вспомогательных коэффициентов, входящих в элементы тензора Эшелби, от отношения полуосей эллипсоида вращения

Построены зависимости вспомогательных коэффициентов D , входящих в выражения для элементов матрицы $N^{(\zeta)}$, от отношения полуосей эллипсоида вращения \bar{b} (рис. 1), которые могут быть использованы для оценки в первом приближении влияния формы эллипсоидальных включений на упругие характеристики композита, армированного эллипсоидальными включениями.

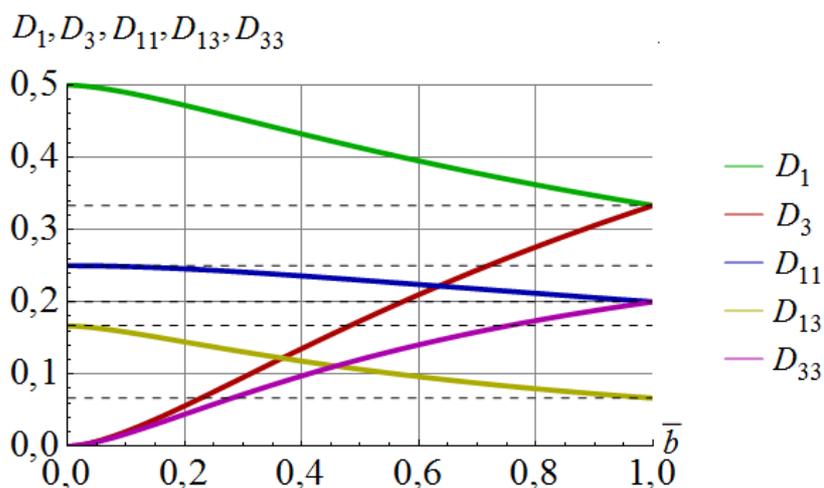


Рис. 1. Зависимость вспомогательных коэффициентов D , входящих в выражения для элементов матрицы $N^{(\zeta)}$, от отношения полуосей эллипсоида вращения \bar{b}

На графиках этих зависимостей видно, что значения вспомогательных коэффициентов D стремятся к предельным значениям (рис. 1).

Пример расчета значений упругих модулей композита в случае включений одного типа

Приведен пример расчета значений модулей упругости, проведенный по представленным выше формулам для композита, армированного включениями только одного типа, но для различных значений параметра \bar{b} . В качестве исследуемого композита взята алюминиевая матрица с модулем упругости $E = 70$ ГПа [14] и коэффициентом

Пуассона $\nu = 0,34$, армированная углеродными трансверсально изотропными эллипсоидальными включениями (в предельном случае однослойными углеродными нанотрубками (ОУНТ), характеристики которой определяет свернутый в трубку графен [15]).

Значения упругих модулей таких включений, в частности ОУНТ, имеют широкий диапазон значений [15]. В данной работе взяты следующие значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и соответствующие им значения модуля сдвига армирующих элементов: 1-й набор данных [9, 10]: $E_1 = 504$ ГПа, $\nu_1 = 0,28$, $K_1 = 387$ ГПа; 2-й набор данных [15]: $E_2 = 417$ ГПа, $\nu_1 = 0,09$, $K_1 = 170$ ГПа; 3-й набор данных [16]: $E_3 = 1007$ ГПа, $\nu_1 = 0,28$, $K_1 = 773$ ГПа;

По формулам (12), (13) и (14), (15) соответственно получены верхние и нижние оценки упругих модулей армирующих элементов композита для выбранных наборов исходных данных: $K_1^+ = 387,00$ ГПа, $K_1^- = 386,20$ ГПа, $G_1^+ = 196,40$ ГПа, $G_1^- = 196,22$ ГПа; $K_2^+ = 179,11$ ГПа, $K_2^- = 164,49$ ГПа, $G_2^+ = 197,77$ ГПа, $G_2^- = 182,86$ ГПа; $K_3^+ = 774,00$ ГПа, $K_3^- = 772,40$ ГПа, $G_3^+ = 392,80$ ГПа, $G_3^- = 392,43$ ГПа. Здесь $K_i^+, G_i^+, i = 1, 2, 3$ обозначены верхние оценки объемного модуля упругости и модуля сдвига соответственно, $K_i^-, G_i^-, i = 1, 2, 3$ — нижние оценки этих модулей, где i соответствует номеру выбранного набора данных упругих характеристик армирующих элементов.

По формулам (16), (17) и (18), (19) соответственно получены верхние и нижние оценки упругих модулей матрицы композита: $K^{\circ+} = 76,33$ ГПа, $K^{\circ-} = 76,33$ ГПа, $G^{\circ+} = 25,4$ ГПа, $G^{\circ-} = 24,98$ ГПа;

С использованием математической модели упругого взаимодействия изотропной матрицы композита с трансверсально изотропными включениями, имеющими форму эллипсоидов вращения, построены двусторонние оценки упругих модулей исследуемого материала при различных исходных данных по армирующим включениям. Также методом самосогласования были получены оценки упругих характеристик композита, расположенные между нижней и верхней границами возможных значений этих модулей (рис. 2–4).

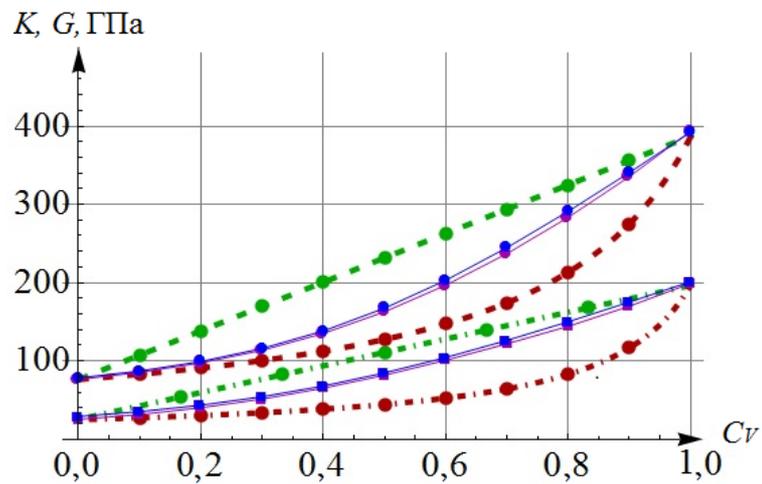


Рис. 2. Зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации C_V и отношения полуосей $\bar{b} = 0,1$ и $\bar{b} = 0,9$ трансверсально изотропных эллипсоидальных включений из графена с 1-м набором исходных данных

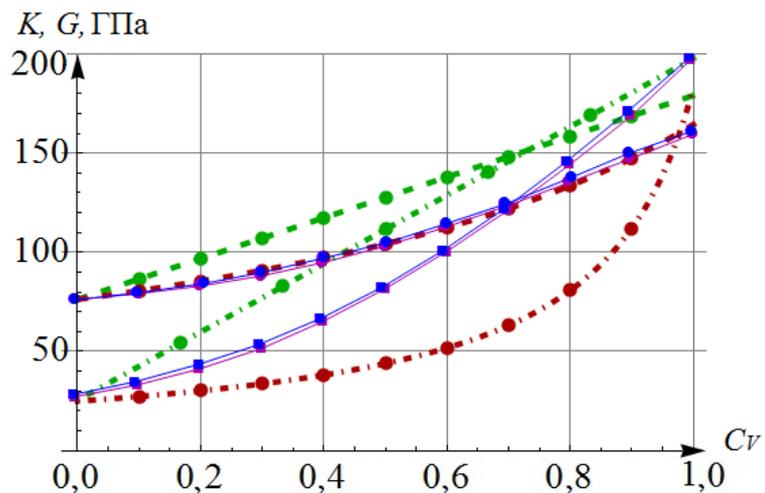


Рис. 3. Зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации C_V и отношения полуосей $\bar{b} = 0,1$ и $\bar{b} = 0,9$ трансверсально изотропных эллипсоидальных включений из графена со 2-м набором исходных данных

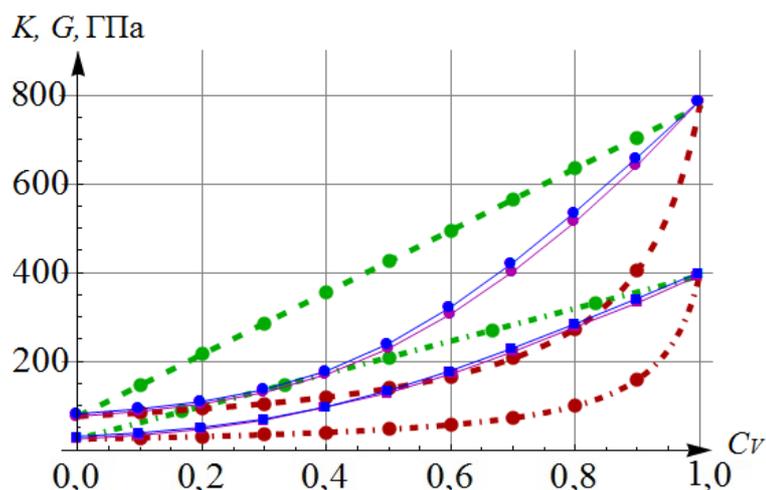


Рис. 4. Зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации C_V и отношения полуосей $\bar{b} = 0,1$ и $\bar{b} = 0,9$ трансверсально изотропных эллипсоидальных включений из графена с 3-м набором исходных данных

На графиках 2-4 зеленым цветом изображены верхние оценки характеристик, красным – нижние оценки, синим и фиолетовым – оценки, полученные методом самосогласования для композита, армированного одним типом включений с отношением полуосей $\bar{b} = 0,1$ и $\bar{b} = 0,9$ соответственно; штриховыми линиями изображены двусторонние оценки объемного модуля K , штрихпунктирными – оценки модуля сдвига G .

Так как матрица композита принята изотропной, все оценки каждого из модулей при $C_V = 0$ совпали между собой. При значении $C_V = 1$ композит формально состоит только из трансверсально изотропных эллипсоидальных включений, для которых верхние оценки модулей упругости несколько выше нижних оценок. Поведение зависимостей, изображенных на рис. 2, объяснимо особенностью входных данных об упругих свойствах включений, которым армирован композит (табл. 3, 4).

Как видно из рис. 2–4, при уменьшении отношения полуосей \bar{b} эллипсоидальных включений значения упругих модулей композита незначительно возрастают.

Пример расчета в случае включений различных типов

Расчет значений модулей упругости проведен по приведенным выше формулам для композита, армированного включениями различного типа для различных значений параметра \bar{b} . В качестве исследуемого композита взята алюминиевая матрица, армированная углеродными трансверсально изотропными эллипсоидальными включениями из графена (в предельном случае ОУНТ).

Как известно из источников, например, [5], армирование материалов в большинстве случаев производят эллипсоидальными включениями, по форме близкими к шаровым. Также интерес представляет случай армирования вытянутыми эллипсоидальными включениями. Поэтому были выбраны два статистических распределения отношения полуосей эллипсоидов вращения армирующих элементов (рис. 5, 6).

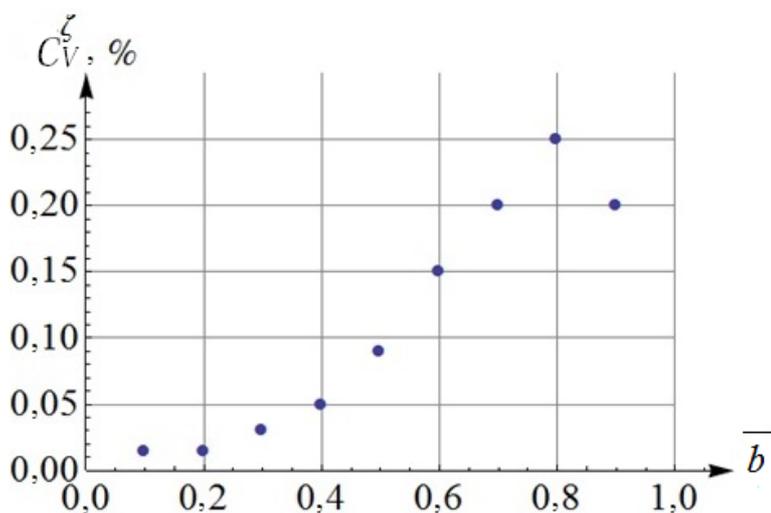


Рис. 5. Первое статистическое распределение объемных концентраций C_V^ξ в композите

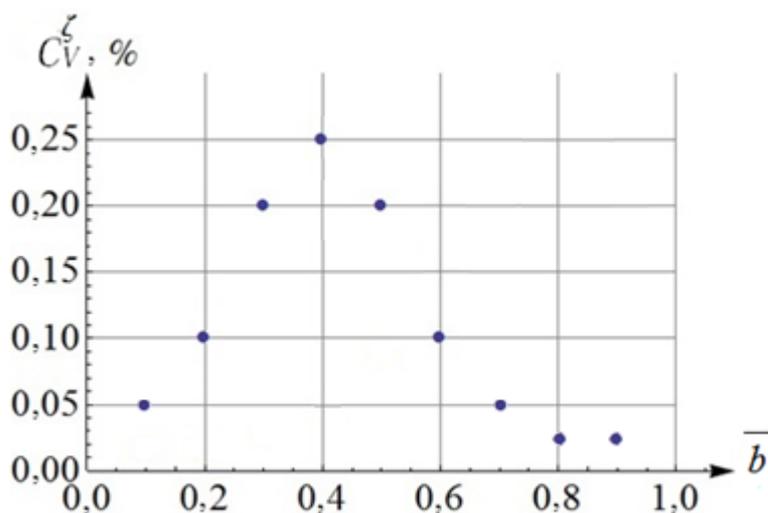


Рис. 6. Второе статистическое распределение объемных концентраций C_V^ξ в композите

По таким распределениям армирующих элементов в композите получены зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации C_V и отношения полуосей \bar{b} , рассматриваемых включений.

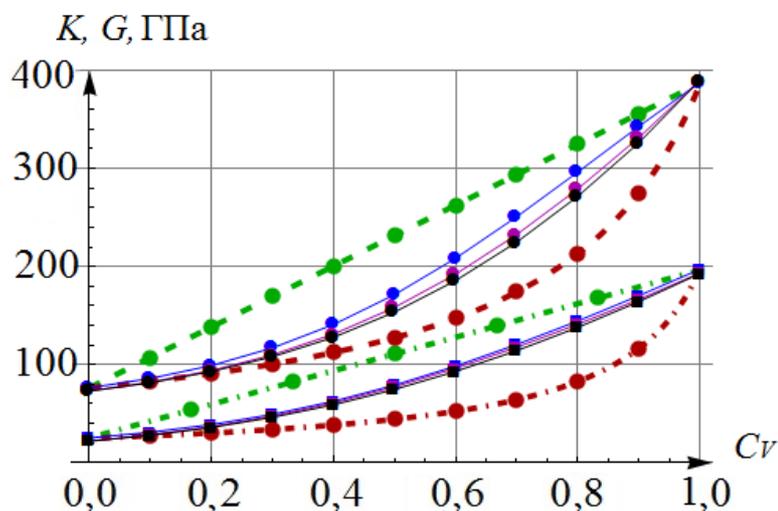


Рис. 7. Зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита от объемной концентрации C_V армирующих элементов при одинаковом $\bar{b} = 0,8$ для всех включений и двух статистических распределениях различных значений \bar{b} .

На рис. 7 приведены графики этих зависимостей в сравнении с зависимостями рассмотренных модулей при одинаковом значении $\bar{b} = 0,8$. Здесь зеленым цветом изображены верхние оценки характеристик, красным – нижние оценки, синим, фиолетовым и черным – оценки, полученные методом самосогласования для композита, армированного одним типом включений с отношением полуосей $\bar{b} = 0,8$, включениями различных конфигураций, распределенных по первому статистическому закону (рис. 5) и включениями различных конфигураций, распределенных по второму статистическому закону (рис. 6) соответственно; штриховыми линиями изображены двусторонние оценки объемного модуля K , штрихпунктирными – оценки модуля сдвига G .

Как видно из рис. 7, различие в значениях между композитом, армированным элементами, у которых \bar{b} , например, равно 0,8, и материалом, в котором присутствуют частицы с другими соотношениями \bar{b} , мало. Можно сделать вывод, что осреднение упругих модулей композита, армированного эллипсоидальными включениями, с

помощью метода самосогласования приводит к сглаживанию влияния формы включений на результирующие значения этих характеристик. Таким образом, при армировании материала не обязательно, чтобы все включения имели одинаковую форму, что позволяет упростить процесс производства композита.

Заключение

Исследованы упругие характеристики композита с анизотропными включениями, имеющими форму вытянутого эллипсоида вращения. Получены двусторонние границы возможных значений объёмного модуля упругости и модуля сдвига рассматриваемого композита, а также оценки упругих свойств композита как неоднородного тела методом самосогласования. Представлены результаты, показывающие влияние отношения полуосей вытянутых эллипсоидов вращения на значения упругих характеристик композита. Представленные результаты дают возможность прогнозирования значений модулей упругости композита с включениями, имеющими форму вытянутого эллипсоида вращения. Установлено, что различие геометрических характеристик включений оказывает намного меньшее влияние на упругие характеристики армированного материала, чем различие механических данных составляющих композита. Следовательно, необходимо дальнейшее уточнение входных данных по свойствам наноразмерных армирующих включений, что в свою очередь требует уточнения свойств исходного материала – графена.

Список литературы

- [1] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций: пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 248 с.
- [2] Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
- [3] Кристенсен Р. Введение в механику композитов: пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
- [4] Механика композиционных материалов: пер. с англ. / под ред. Дж. Сендечки. М.: Мир, 1978. 564 с.
- [5] Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства // УФН. 2011. Т. 181, №3. С. 233–268.
- [6] Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Идл-во ЛКИ, 2008. 296 с.

- [7] Blakslee O.L., Proctor D.G., Seldin E.J., Spence G.B., Weng T. Elastic constants of compression-annealed pyrolytic graphite // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. №8. P. 3373–3382.
- [8] Bowman J.C., Krumhansl J.A. The Low-Temperature Specific Heat of Graphite // J. Phys. Chem. Solids. 1958. V. 6. № 4. P. 367–379.
- [9] Беринский И.Е., Кривцов А.М. Об использовании многочастичных межатомных потенциалов для расчёта упругих характеристик графена и алмаза // Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 60–85.
- [10] Erdemir A., Martin J.-M. Superlubricity. Amsterdam: Elsevier, 2007. 524 p.
- [11] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 5. С. 53–69.
- [12] Зарубин В.С. Прикладные задачи термочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
- [13] Цвелодуб И.Ю. Об обратном тензоре Эшелби // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2010. №2 (8). С. 530–535.
- [14] Справочник конструктора-машиностроителя / ред. И. Н. Жесткова. В 3 т. Т. 1.. М.: Машиностроение, 2001. 34 с.
- [15] Сергеева Е.С. Установление связи упругих характеристик однослойной углеродной нанотрубки и графена // Молодежный научно-технический вестник. Электрон. журн. 2015. №10. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/812186.html> (дата обращения 20.11.2015).
- [16] Стариков С. В. Механические свойства углеродных нанотрубок // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. Режим доступа: <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/149/> (дата обращения 20.11.2015).