

06, июнь 2016

УДК 624.014.2

Устойчивость и продольно-поперечный изгиб ферменной мачты сотовой связи

Лыкина Н.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная механика»*

*Научный руководитель: Григорьев Ю.В., к.т.н., доцент,
Кафедра «Прикладная механика»*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
grigoryev@bmstu.ru*

Бурное развитие мобильной связи в быту, в военно-технической области и на производстве требует непрерывного расширения сети ретрансляторов радиосигнала. При этом наиболее экономичными и надежными показали себя наземные мачтовые конструкции для монтажа ретрансляторов. Необходимую прочность и устойчивость мачты при заданной высоте удастся обеспечить путем использования ферменных конструкций. В настоящей работе представлены методики расчета такой мачты на прочность и устойчивость. Расчет на прочность включает в себя определение напряжений в стержнях фермы. Этот вопрос подробно рассмотрен в трудах Спицыной Д.Н. [1], Даркова А.В., Шапошникова Н.Н. [2] и других. При этом необходим анализ местной устойчивости сжатых элементов фермы. Одновременно проводится расчет мачты в целом под действием собственного веса, а также веса навесного оборудования. Анализ устойчивости продольно сжатых стержней посвящены труды Тимошенко С.П. [3], Блейха Ф. [4], Алфутова Н.А. [5] и других авторов. С другой стороны, статическая устойчивость системы с успехом может быть исследована динамическим методом. Такой подход реализован во многих работах, например, в публикациях Гуськова А.М., Светлицкого В.А. [6,7], Григорьева Ю.В. [8,9]. В настоящей работе рассмотрено применение приближенных методов, а именно: энергетического метода определения критической нагрузки и метода Галеркина для расчета продольно-поперечного изгиба мачты под действием ветровой нагрузки.

Устойчивость мачты под действием собственного веса. Рассмотрим мачту, как вертикальный стержень постоянного поперечного сечения, закреплённый снизу в жёсткой заделке (рис.1) и нагруженный по всей длине распределённой силой собственного веса q .

Следуя энергетическому методу [5], вычислим потенциальную энергию изгиба стержня, задавшись предварительно приближённой формой его оси. Затем вычисляется работа продольных сил q . Приравнявая полученные потенциальную энергию и работу, удаётся определить критические параметры системы.

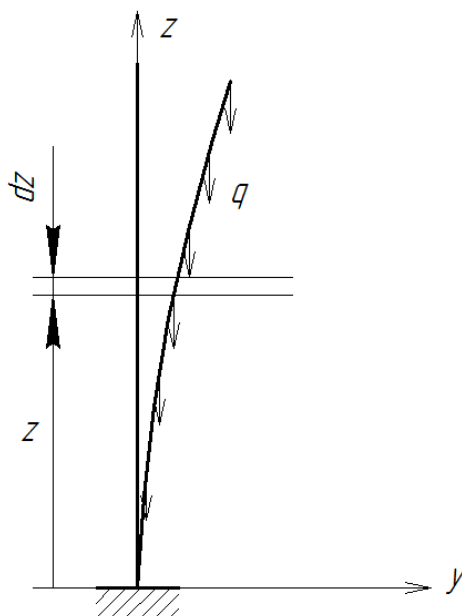


Рис. 1. Устойчивость мачты под действием собственного веса

Зададимся формой изогнутой оси мачты в виде полинома 4-ой степени:

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4. \quad (1)$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция $y(z)$:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad y &= 0 \\ z = 0 \quad y' &= 0 \\ z = l \quad y'' &= 0 \\ z = l \quad y''' &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Степень полинома должна соответствовать числу граничных условий, тогда все коэффициенты полинома можно выразить через какой-либо один. В данном примере, учитывая граничные условия, получим:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 6l^2 a_4, \quad a_3 = -4la_4. \quad (3)$$

В результате полином имеет вид:

$$y = a_4(6l^2z^2 - 4lz^3 + z^4). \quad (4)$$

Найдем потенциальную энергию изгиба:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(y'')^2 dz = 14EJa_4^2 l^5. \quad (5)$$

Вычислим работу внешней распределенной нагрузки:

$$W = \int_0^l \frac{1}{2} q \int_0^z [y'(\varphi)]^2 d\varphi dz = 1.824a_4^2 l^8. \quad (6)$$

Окончательно определим критическую нагрузку:

$$(ql)_{\text{кр}} = \frac{U}{W} = 7.75 \frac{EJ}{l^2}. \quad (7)$$

Продольно-поперечный изгиб мачты. Рассмотрим мачту как вертикальный стержень постоянного поперечного сечения (рис. 2) с изгибной жесткостью EJ под действием собственного веса q и поперечной ветровой нагрузки q_v (рис. 3).

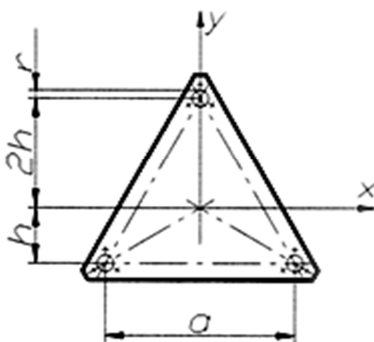


Рис. 2. Поперечное сечение трехгранной ферменной мачты

Продольно - поперечный изгиб такого стержня описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$EJ \frac{d^4 y}{dz^4} + (ql - qz) \frac{d^2 y}{dz^2} - q \frac{dy}{dz} = q_v. \quad (8)$$

Ветровая нагрузка, действующая на сооружение, определяется по формуле:

$$q_v = CB\rho V^2, \quad (9)$$

где C – коэффициент лобового сопротивления ($C = 0.35 \div 1.8$);

B – эффективная ширина мачты [м];

$\rho = 1.29 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха;

V – скорость ветра [м/с].

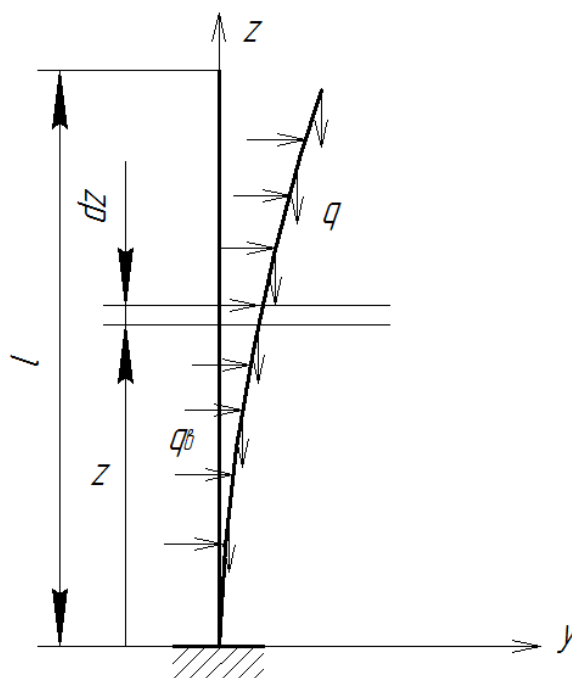


Рис. 3. Изгиб мачты под действием ветровой нагрузки

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные параметры

$$Z = \frac{z}{l}; \chi = \frac{y}{l}; q_0 = \frac{ql^3}{EJ};$$

$$M_0 = \frac{M_x l}{EJ}; f_0 = \frac{q_0 l^3}{EJ}. \quad (10)$$

Уравнение (8) примет вид

$$\frac{d^4 \chi}{dZ^4} + q_0(1 - Z) \frac{d^2 \chi}{dZ^2} - q_0 \frac{d\chi}{dZ} = f_0. \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) методом Галёркина требуется задаться функцией прогиба $\chi(Z)$. Воспользуемся вариантом, представленным в расчете устойчивости мачты, который с учетом перехода к безразмерным параметрам примет вид.

$$\chi(Z) = a(6Z^2 - 4Z^3 + Z^4), \quad (12)$$

где a – искомый параметр задачи продольно-поперечного изгиба.

После подстановки выражения (12) в уравнение (11) будет получена невязка

$$R(Z) = 4a[6 + 3q_0(1 - Z)^3 - q_0(3Z - 3Z^2 + Z^3)] - f_0. \quad (13)$$

Следуя методу Галеркина, требуется выполнить условие

$$\int_0^1 R(Z) \chi(Z) dZ = 0. \quad (14)$$

После интегрирования получим

$$a = f_0 \frac{I_1}{4I_1 + 3I_2 - I_3}, \quad (15)$$

где $I_1 = \int_0^1 (6Z^2 - 4Z^3 + Z^4) dZ = 1.2,$

$$I_2 = \int_0^1 (1 - Z)^3 (6Z^2 - 4Z^3 + Z^4) dZ,$$

$$I_3 = \int_0^1 (3Z - 3Z^2 + Z^3) (6Z^2 - 4Z^3 + Z^4) dZ.$$

После получения решения (12) можем вычислить безразмерный изгибающий момент

$$M_0 = \frac{d^2 \chi}{dZ^2} = 12a. \quad (16)$$

Максимальный изгибающий момент составит

$$M_x^{max} = 12f_0 \frac{EJ}{l} I_0 = 12q_B l^2 I_0, \quad (17)$$

где $I_0 = \frac{I_1}{4I_1 + 3I_2 - I_3}.$

Максимальные напряжения сжатия при продольно-поперечном изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{ql}{A} + \frac{12q_B l^2}{W_x} I_0. \quad (18)$$

Завершается расчёт мачты на прочность вычислением коэффициента запаса по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}. \quad (19)$$

Список литературы

- [1]. Спицына Д.Н. Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций. М.: Высшая школа, 1997. 248 с.
- [2]. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
- [3]. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
- [4]. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М.: Физматгиз, 1959. 544 с.
- [5]. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем / Библиотека расчётчика. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
- [6]. Григорьев Ю.В., Гуськов А.В., Светлицкий В.А. Устойчивость стержня в осевом потоке вязкой жидкости. // Прикладная механика. 1979. Т. XV. №4. С. 67-73.
- [7]. Светлицкий В.А., Григорьев Ю.В. Влияние потока промывочной жидкости на устойчивость колонны буровых труб // Известия ВУЗов. Машиностроение. 1978. № 4. С. 29 – 33.

- [8]. Григорьев Ю.В. Гидродинамическое взаимодействие стержня с потоком вязкопластической жидкости // Труды МВТУ. Динамика и прочность машин. 1980. № 332. С. 26 – 36.
- [9]. Гусев А.С., Григорьев Ю.В., Стародубцева С.А., Фомичева В.Ф. Случайные колебания стержней, частично погруженных в жидкость // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 2 (107). С. 81 – 92.