

Исследование рабочей зоны и особых положений плоского 3-RPR манипулятора в среде MATLAB

07, июль 2016

Эрастова К. Г.^{1,*}, Ларюшкин П. А.¹

УДК: 621.01

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

*erastovakg@gmail.com

Введение

Манипуляторы параллельной структуры – это класс механизмов, в состав которых входят замкнутые кинематические цепи. Эти механизмы, активно развивающиеся с 80-ых годов прошлого века, успешно используются во многих областях в различном оборудовании: от металлообрабатывающих станков до авиатренажеров и роботизированных хирургических систем, т.к. они обладают рядом достоинств по сравнению с механизмами последовательной структуры: высокими точностью позиционирования, грузоподъемностью при малых габаритах и жесткостью [1].

Одним из главных недостатков данных механизмов, наряду с ограниченностью рабочей зоны, является наличие особых положений, так называемых сингулярностей, в которых механизм может потерять управляемость и жесткость конструкции. Исследованию особых положений механизмов уделяется большое внимание, т.к. в областях рабочей зоны, связанных с такими положениями, необходимо планировать траектории обхода или же использовать дополнительные приводы.

Одними из самых простых механизмов данного класса являются плоские механизмы, обладающие тремя степенями свободы: двумя поступательными и одной вращательной. Эти механизмы хорошо изучены и помимо коммерческого применения успешно используются в образовательном процессе. Из-за их простоты на них также можно проверять различные новые подходы в исследовании механизмов параллельной структуры в целом.

Данная статья посвящена изучению областей особых положений 3-RPR механизма. Здесь цифра 3 означает число кинематических цепей, буква R – вращательную кинематическую пару, буква P – поступательную (призматическую) кинематическую пару. Пара, выделенная подчеркиванием (в данном случае поступательная) является приводной, остальные две – пассивными.

При анализе особых положений чаще всего применяют метод, основанный на анализе матрицы Якоби механизма, получаемой дифференцированием уравнений связи и описы-

вающей переход от обобщенных скоростей в приводных кинематических парах к угловым или линейным скоростям выходного звена. Данный метод является наиболее простым и дает хорошие результаты.

Все расчеты и построения графиков в данной статье произведены в среде MATLAB, т.к. это позволяет получить наглядные результаты при варьировании различных параметров механизма без необходимости дополнительных расчетов.

Краткое описание метода

Рассмотрим механизм с n степеней свободы, с n кинематических цепей. Пусть все пары одноподвижные, число приводных пар равно числу степеней свободы и в каждой цепи всего одна приводная пара. В общем случае, с учетом принятых допущений, можно записать n уравнений связи в виде неявных функций:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, \psi_i) = 0; \quad i = 1 \dots n, \quad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ – абсолютные координаты, описывающие положение выходного звена механизма, ψ_i – обобщенная координата, задающая изменение положения входного звена i -й кинематической цепи относительно некоторого начального положения этого звена.

Путем дифференцирования уравнений (1) по времени можно установить связь между мгновенными скоростями выходного звена и обобщенными скоростями (т.е. скоростями в приводах). Полученная таким образом система уравнений в матричной форме имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}_A \cdot \mathbf{X} + \mathbf{J}_B \cdot \mathbf{\Psi} = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \psi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial \psi_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n \end{pmatrix}$$

Выражение (2) можно переписать в виде:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{\Psi}, \quad (3)$$

где $\mathbf{J}$ – матрица Якоби механизма, компоненты которой могут быть определены следующим образом:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} / \frac{\partial F_1}{\partial \psi_1} & \dots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} / \frac{\partial F_1}{\partial \psi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial F_n}{\partial x_1} / \frac{\partial F_n}{\partial \psi_n} & \dots & -\frac{\partial F_n}{\partial x_n} / \frac{\partial F_n}{\partial \psi_n} \end{pmatrix}$$

Согласно классификации, предложенной в [2], различают три вида особых положений механизма:

- особые положения первого типа, в которых платформа неподвижна, несмотря на ненулевой вектор обобщенных скоростей Ψ , что соответствует вырождению матрицы $\mathbf{J}_B$, т.е. $\det(\mathbf{J}_B) = 0$.
- особые положения второго типа, в которых возможно некоторое бесконечно малое перемещение выходного звена даже при остановленных приводах. Данному случаю соответствует вырождение матрицы $\mathbf{J}_A$ т.е. $\det(\mathbf{J}_A) = 0$.
- особые положения третьего типа, которые объединяют в себе свойства особых положений первого и второго типа.

Исследование рабочей зоны 3-RPR механизма

Уравнения связи для 3-RPR механизма записываются в следующем виде [3]:

$$L_i^2 = (x_{Ci} - x_{Ai})^2 - (y_{Ci} - y_{Ai})^2; \quad i = 1...3, \quad (4)$$

где x_{Ci}, y_{Ci} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{Ci} &= x + l_{3i} \cos(\varphi + \gamma_i) \\ y_{Ci} &= y + l_{3i} \sin(\varphi + \gamma_i) \end{aligned} \quad (5)$$

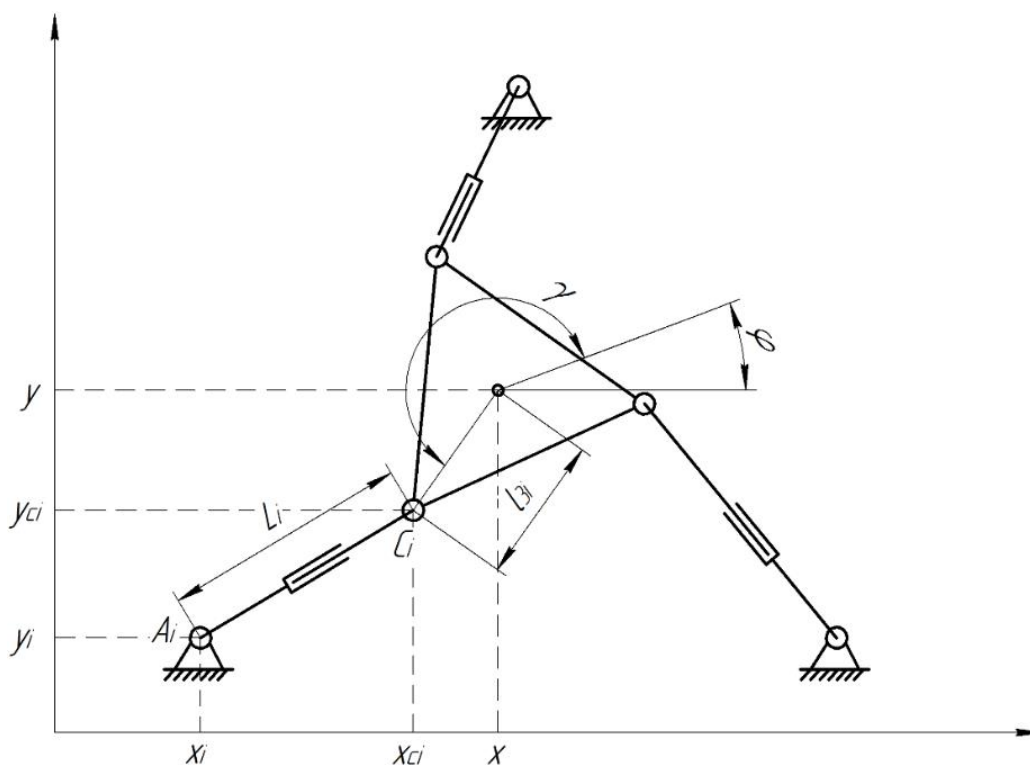


Рис. 1. Схема 3-RPR механизма

Подставив (5) в (4), получим:

$$L_i^2 = (x + l_{3i} \cos(\varphi + \gamma_i) - x_{Ai})^2 - (y + l_{3i} \sin(\varphi + \gamma_i) - y_{Ai})^2; \quad i = 1...3, \quad (6)$$

где L – обобщенная координата.

Однако в реальном 3-RPR механизме длина L ограничена минимальным и максимальными значениями, что приводит к ограничениям рабочей зоны манипулятора.

$$l_{\min} \leq L_i \leq l_{\max}, \quad (7)$$

где $l_{\min}$ – минимальная длина поступательной кинематической пары, $l_{\max}$ – максимальная длина поступательной кинематической пары.

Для визуализации рабочего пространства применим итерационный подход, при котором в каждой точке некоторой области, включающей в себя рабочее пространство механизма, проверяется возможность решения обратной задачи о положениях в действительных числах [4]. Тогда с учетом условия (7) рабочая зона механизма имеет вид, представленный на рис. 2.

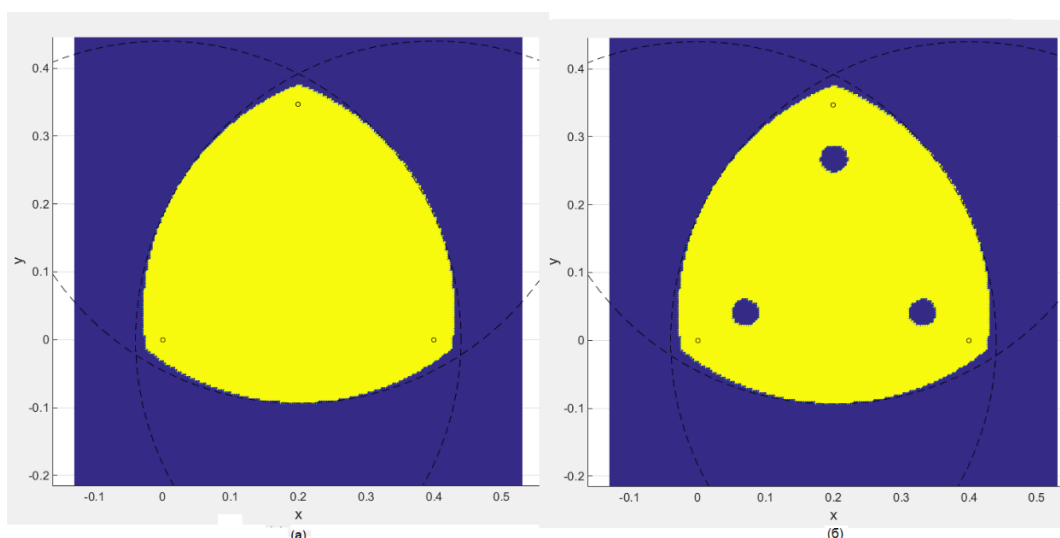


Рис. 2. Рабочая зона 3-RPR механизма, а) при $l_{\min} = 0$; б) при $l_{\min} \neq 0$ ($\varphi=0$)

Как видно по рис.2, при некотором фиксированном значении $l_{\min}$ и при $\varphi=0$, в рабочей зоне манипулятора наблюдаются вырезы, причем их размер и расположение зависит от самой длины $l_{\min}$: чем она меньше, тем меньше и сами вырезы. Таким образом, при синтезе 3-RPR механизма необходимо подбирать длины звеньев и $l_{\min}$ таким образом, чтобы увеличить непосредственно рабочую зону манипулятора за счёт уменьшения вырезов.

Исследование особых положений 3-RPR механизма

Рассмотрим особые положения первого типа, при которых $\det(\mathbf{J}_B)=0$. Для 3-RPR механизма матрица $\mathbf{J}_B$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial L_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2L_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Из (8) видно, что при ненулевых L_1, L_2, L_3 матрица $\mathbf{J}_B$ не вырождается, т.е. $\det(\mathbf{J}_B) \neq 0$ для любой точки рабочей зоны. Таким образом, несмотря на то, что на краю рабочей зоны 3-RPR механизм теряет степень свободы, для него не существует особых положений первого типа.

Рассмотрим особые положения второго типа, при которых $\det(\mathbf{J}_A) = 0$. Для 3-RPR механизма матрица $\mathbf{J}_A$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

где:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = 2x - 2x_{Ai} + 2l_{3i} \cos(\varphi + \gamma_i); \quad i = 1 \dots 3$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y} = 2y - 2y_{Ai} + 2l_{3i} \sin(\varphi + \gamma_i); \quad i = 1 \dots 3$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi} = 2l_{3i} [y - y_{Ai} + l_{3i} \sin(\varphi + \gamma_i)] \cos(\varphi + \gamma_i) - 2l_{3i} [2x - 2x_{Ai} + 2l_{3i} \cos(\varphi + \gamma_i)] \sin(\varphi + \gamma_i);$$

$$i = 1 \dots 3$$

Известно [5], что некоторые негативные явления возникают не только непосредственно в особых положениях, но и при приближении к ним. По этой причине рабочая зона манипулятора была разбита на точки, в каждой из которых была найдена матрица $\mathbf{J}_A$, после чего был построен график зависимости модуля определителя этой матрицы от координат рабочей зоны манипулятора. Данные действия повторялись для двух случаев: в первом случае была задана длина l_{min} , во втором она была принята равной нулю. Полученные графики представлены на рисунке 3.

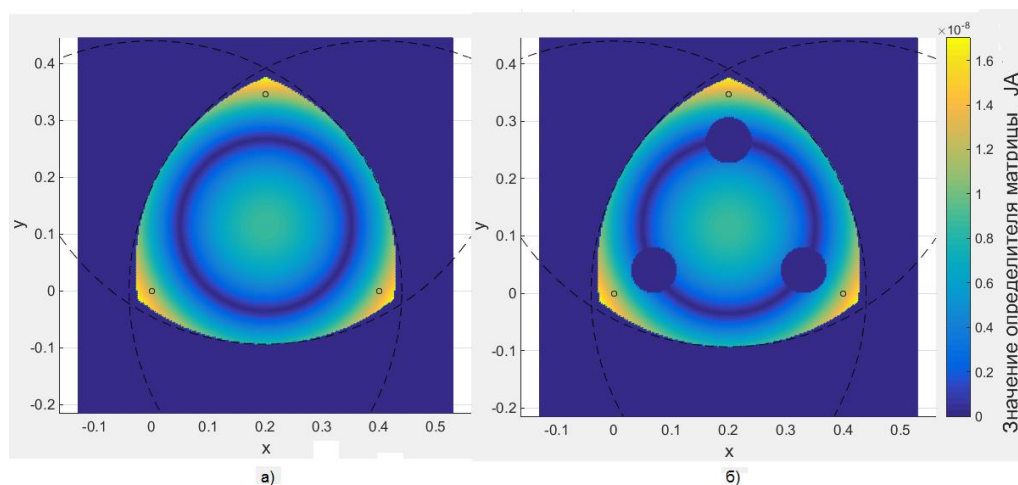


Рис. 3. График зависимости модуля матрицы $\mathbf{J}_A$ от координат рабочей зоны 3-RPR манипулятора, а) при $l_{min} = 0$; б) при $l_{min} \neq 0$ ($\varphi=0$)

На рисунке 3 видно, что по некоторой окружности в рабочей зоне 3-RPR манипулятора наблюдается область особых положений. Эти зоны можно значительно уменьшить поворотом выходного звена на угол φ (до этого он принимался равным нулю). В качестве примера рассмотрим поворот выходного звена механизма на углы $\varphi=\pi/6$ и $\varphi=\pi/3$ при $l_{min}=0$. Графики зависимостей модуля матрицы $\mathbf{J}_A$ от координат рабочей зоны в этом случае представлены на рисунке 4.

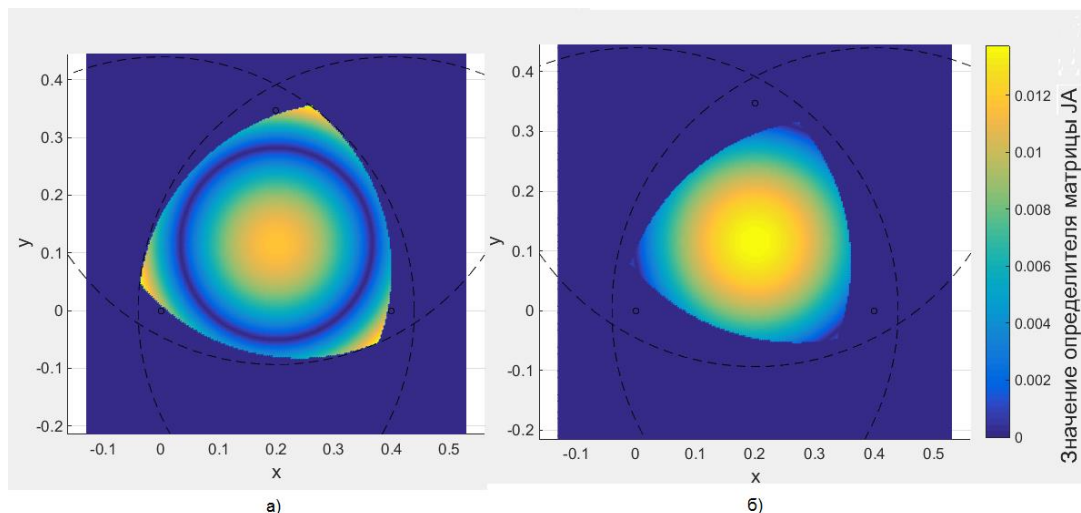


Рис. 4. График зависимости модуля матрицы $\mathbf{J}_A$ от координат рабочей зоны 3-RPR манипулятора, а) при $\varphi=\pi/6$; б) при $\varphi=\pi/3$ ($l_{min}=0$)

На рисунке 4 видно, что при $\varphi \neq 0$ зоны особых положений механизма смещаются, таким образом, можно избегать негативных явлений поворотом выходного звена на определенный угол.

Все рассмотренные ранее зависимости приводились для углов (рис. 1) $\gamma_1=210^\circ$, $\gamma_2=90^\circ$, $\gamma_3=-30^\circ$, и с одинаковыми длинами l_{3i} , т.е. для выходного звена, имеющего форму равностороннего треугольника. В качестве примера рассмотрим рабочую зону и области особых положений механизма при значениях углов $\gamma_1=180^\circ$, $\gamma_2=70^\circ$, $\gamma_3=-15^\circ$ с теми же значениями длин l_{3i} . Полученная зависимость представлена на рисунке 5.

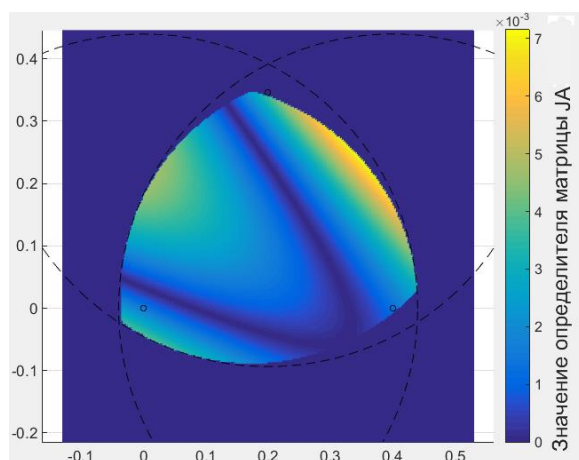


Рис. 5. График зависимости модуля матрицы $\mathbf{J}_A$ от координат рабочей зоны 3-RPR манипулятора при $\gamma_1=180^\circ$, $\gamma_2=70^\circ$, $\gamma_3=-15^\circ$ ($l_{min}=0$, $\varphi=0$)

На рисунке 5 видно, что при изменении геометрических параметров выходного звена, меняется рабочая зона механизма и расположение областей особых положений.

Заключение

В данной статье были рассмотрены рабочая зона и области особых положений 3-RPR механизма при различных параметрах l_{min} , φ и γ_i с помощью уравнений связи и матрицы Якоби. Были получены графики зависимостей величины значений определителя матрицы J_A для оценки близости к особым положениям механизма и установлена зависимость расположения зон особых положений от геометрических параметров выходного звена манипулятора.

Список литературы

- [1]. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике // Доклады академии наук, 2014. Т. 459. № 4. С. 428-431.
- [2]. Merlet J.P. Parallel Robots. 2-nd edition. Springer Netherlands, 2006. 402 p. (Ser. Solid Mechanics and Its Applications; vol. 128.). DOI:[10.1007/1-4020-4133-0](https://doi.org/10.1007/1-4020-4133-0)
- [3]. Ларюшкин П.А., Епанчинцева Д.С. Уравнения связи и решение обратной задачи о положениях для плоских механизмов параллельной структуры произвольной геометрии // Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 9. С. 12–21. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/799976.html> (дата обращения: 2.06.2016)
- [4]. Ларюшкин П.А., Палочкин С.В. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2012. № 3 (339). С. 92–96.
- [5]. Глазунов В.А., Аракелян В., Брио С., Рашоян Г.В. Скоростные и силовые критерии близости к сингулярностям манипуляторов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 3. С. 10-17.