

Математическая модель ведущего моста с самоблокирующимся дифференциалом

12, декабрь 2016

Антонян А. В.^{1,*}

УДК: 629.11.01

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

*antonyan.akop@yandex.ru

Введение

Самоблокирующийся дифференциал предназначен для обеспечения тягой колёс ведущих мостов, в которых происходит проскальзывание одного из колёс с опорной поверхностью. Самоблокирующийся дифференциал Torsen (TORque SENsing – чувствующий крутящий момент), был разработан в 1958 году Вернером Глизманом (Gleason). Этот дифференциал используется в автомобилях марки AUDI в качестве межосевого дифференциала [1], Toyota в качестве межколесного дифференциала. Коэффициент блокировки находится в пределах 2,5 – 5 [2, 3]. Состоит из винтовых шестерен (сателлитов) и винтовых (полуосевых) колёс. Перераспределение крутящих моментов между полуосевыми винтовыми колёсами достигается за счет трения между элементами дифференциала. Трение возникает в зубчатом зацеплении сателлита и полуосевого колеса, на торцах между полуосевыми колёсами, между торцами полуосевых колёс и корпусом дифференциала, между торцами сателлитов и корпусом дифференциала. Рассматриваемый дифференциал способен передавать большую часть крутящего момента (до 80%) небуксующему колесу или небуксующему мосту. Конструкция дифференциала показана на рисунке 1. Полуосевые колёса выполнены в виде винтовых колёс, а сателлиты выполнены в виде винтовых шестерен. Торцы сателлитов касаются корпуса через шайбы.

Сателлиты расположены попарно и связаны между собой шестернями, расположенными на периферии сателлитов. При прямолинейном движении колесной машины (КМ) при равенстве коэффициентов сцепления у ведущих колёс и одинаковой нагрузке на них, дифференциал распределяет моменты в равном соотношении. Но при снижении силы сцепления одного из колёс и возникновении первых признаков его пробуксовки силы трения, возникающие между деталями механизма, не дают этому колесу раскрутиться (забуксовать) и передают дополнительный момент на небуксующее колесо.

Цель работы – вывод формулы коэффициента блокировки самоблокирующегося дифференциала, а также моделирование движения ведущего моста, оборудованного таким дифференциалом.

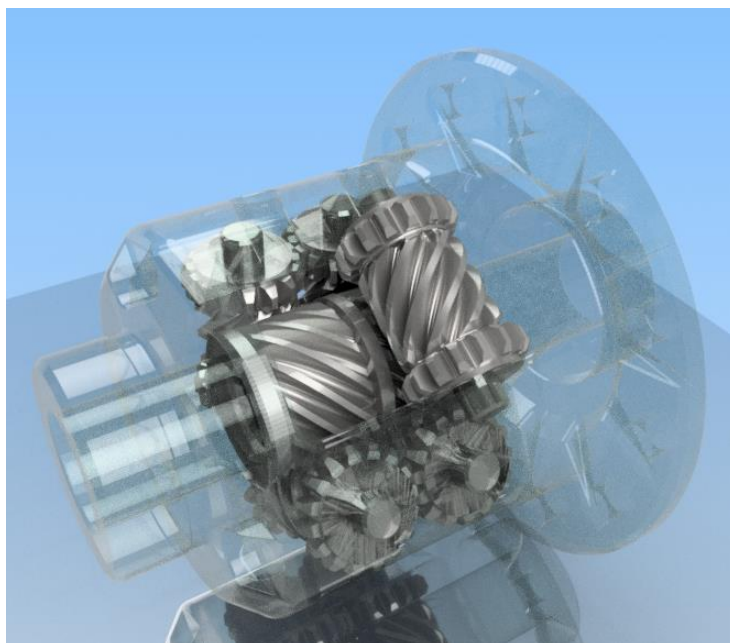


Рис. 1. Конструкция самоблокирующегося дифференциала Torsen

Описание математической модели дифференциала.

В работе проводится вывод уравнения коэффициента блокировки обеспечивающего взаимосвязь геометрических параметров дифференциала и коэффициента блокировки. Параметрами, которые влияют на коэффициент блокировки, являются: числа зубьев и начальные диаметры сателлита и полуосевого колеса, радиусы и коэффициенты трения шайб. Схема дифференциала показана на рисунке 2:

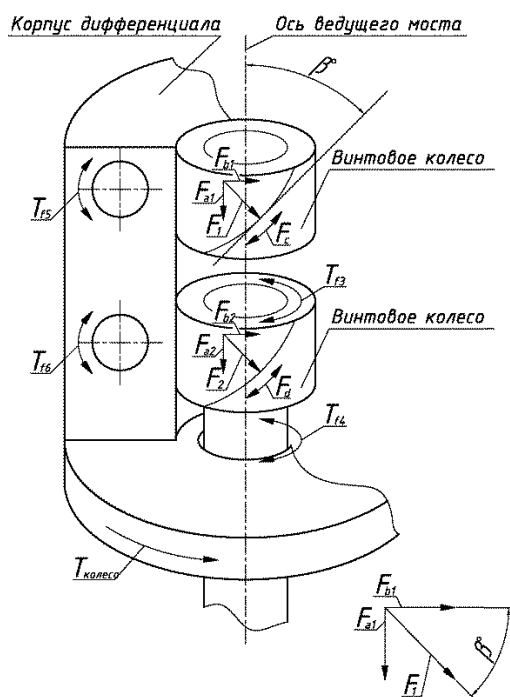


Рис. 2. Расчетная схема дифференциала и электронная модель

Введем обозначения для коэффициентов трения: в зацеплении сателлита и винтового полуосевого колеса – μ_1 ; между торцами сателлитов и корпусом дифференциала – μ_2 ; между торцами полуосевых колес – μ_3 ; между торцом полуосевого колеса и корпусом – μ_4 .

Определим окружную силу, действующую в зацеплении между винтовой шестерней (сателлитом) и полуосевым колесом. Передача крутящего момента происходит от корпуса дифференциала к сателлиту, а от сателлита на полуосевое колесо. Суммарная окружная сила, действующая на оба винтовых полуосевых колеса [4]:

$$F_b = \frac{T_{\text{дифф}}}{R_b},$$

где R_b – радиус начальной окружности винтового колеса. $T_{\text{дифф}}$ – крутящий момент на корпусе дифференциала. Так как колеса два, дифференциал симметричный, значит, необходимо полученное значение поделить пополам [4]:

$$F_{b1} = \frac{F_b}{2};$$

$$F_{b2} = \frac{F_b}{2},$$

где F_{b1} – суммарная окружная сила, действующая в зацеплении первой пары (верхняя пара на рис. 2); F_{b2} – суммарная окружная сила, действующая в зацеплении второй пары (нижняя пара на рис. 2). Ниже (рисунок 3) схематично показано, как направлена сила (в конкретном случае сила F_{b2} , сила F_{b1} направлена аналогично).

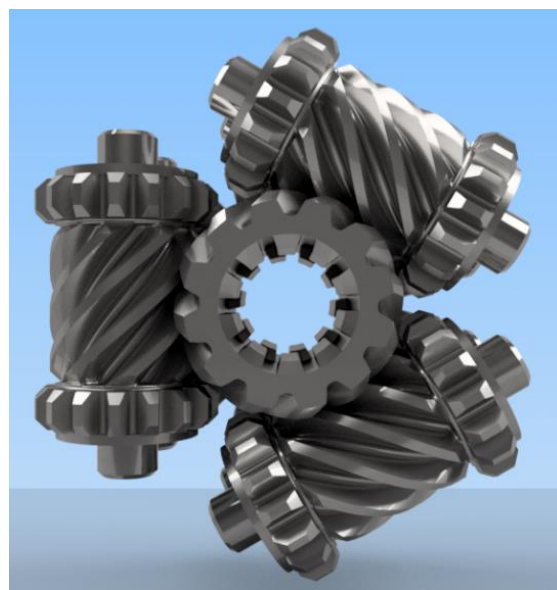
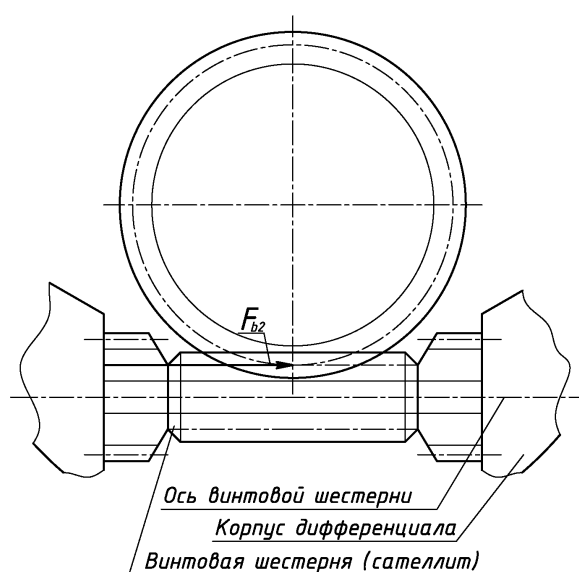


Рис. 3. Схема направления силы F_{b2} (F_{b1}) и электронная модель

Известно, что нормальная сила в зацеплении действует под углом $(90^\circ - \beta)$ к оси винтового полуосевого колеса, где β – угол наклона линии зуба винтового колеса. Сила F_{b1} (F_{b2}) является составляющей (проекцией) нормальной силы F_1 (F_2) (рис. 2). Согласно этому нормальные силы [4]:

$$F_1 = \frac{F_{b1}}{\cos \beta};$$

$$F_2 = \frac{F_{b2}}{\cos \beta}.$$

Зная нормальные силы, определим силы, действующие в осевом направлении на винтовые колеса [4]:

$$F_{a1} = F_1 \cdot \sin \beta;$$

$$F_{a2} = F_2 \cdot \sin \beta.$$

Для определения коэффициента блокировки надо знать суммарный момент трения в дифференциале. Момент трения на торцах винтовых полуосевых колес [5]:

$$T_{f3} = F_{a1} \cdot R_3 \cdot \mu_3;$$

$$T_{f4} = (F_{a2} + F_{a1}) \cdot R_4 \cdot \mu_4,$$

где – R_3 и R_4 средние радиусы трения винтовых колес между собой и винтового колеса с корпусом соответственно. Аналогично можно найти моменты трения между сателлитом и корпусом [5]:

$$T_{f5} = F_{b1} \cdot R_5 \cdot \mu_2;$$

$$T_{f6} = F_{b2} \cdot R_6 \cdot \mu_2,$$

где – R_5 и R_6 средние радиусы трения торцов сателлитов с корпусом дифференциала.

Силы трения, действующие на поверхностях винтовых колес [5]:

$$F_c = F_1 \cdot \mu_1;$$

$$F_d = F_2 \cdot \mu_1.$$

Спроецировав эти силы на окружное направление, приведенное к оси винтового колеса и умножив их на начальный радиус R_B винтового колеса, получим моменты трения в зацеплении:

$$T_{f1} = F_c \cdot \sin \beta \cdot R_B;$$

$$T_{f2} = F_d \cdot \sin \beta \cdot R_B.$$

В результате, общий момент трения, создаваемый в дифференциале [5]:

$$T_{тр} = T_{f1} + T_{f2} + T_{f3} + T_{f4} + \left(\frac{R_B}{R_C}\right) \cdot (T_{f5} + T_{f6}).$$

где R_C – радиус начальной окружности сателлита. Так же можно записать этот же момент трения в развернутом виде:

$$T_{тр} = T_{\text{колесо}} \cdot \left(\tan \beta \cdot ((R_3 \cdot \mu_3 + 2R_4 \cdot \mu_4) \cdot \frac{1}{2R} + \mu_1) + \frac{\mu_2}{2R_C} \cdot (R_5 + R_6) \right).$$

Исходя из этого, определяется коэффициент блокировки дифференциала, значение которого находится в диапазоне значений от 0 до 1:

$$k_6^* = \frac{T_{тр}}{T_{\text{колесо}}} = \left(\tan \beta \cdot ((R_3 \cdot \mu_3 + 2R_4 \cdot \mu_4) \cdot \frac{1}{2R} + \mu_1) + \frac{\mu_2}{2R_C} \cdot (R_5 + R_6) \right).$$

Коэффициент блокировки, значения которого находятся в диапазоне от 1 и более [6]:

$$k_6 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{\text{колесо}} + T_{тр}}{T_{\text{колесо}} - T_{тр}} = \frac{1 + \left(\tan \beta \cdot ((R_3 \cdot \mu_3 + 2R_4 \cdot \mu_4) \cdot \frac{1}{2R_B} + \mu_1) + \frac{\mu_2}{2R_C} \cdot (R_5 + R_6) \right)}{1 - \left(\tan \beta \cdot ((R_3 \cdot \mu_3 + 2R_4 \cdot \mu_4) \cdot \frac{1}{2R_B} + \mu_1) + \frac{\mu_2}{2R_C} \cdot (R_5 + R_6) \right)}.$$

Описание математической модели ведущего моста.

В качестве наглядного примера реализации математической модели выбран межколесный дифференциал. Моделирование ведущего моста проводится в программе MATLAB & Simulink. Расчетная схема ведущего моста с самоблокирующимся дифференциалом представлена на рисунке 4.

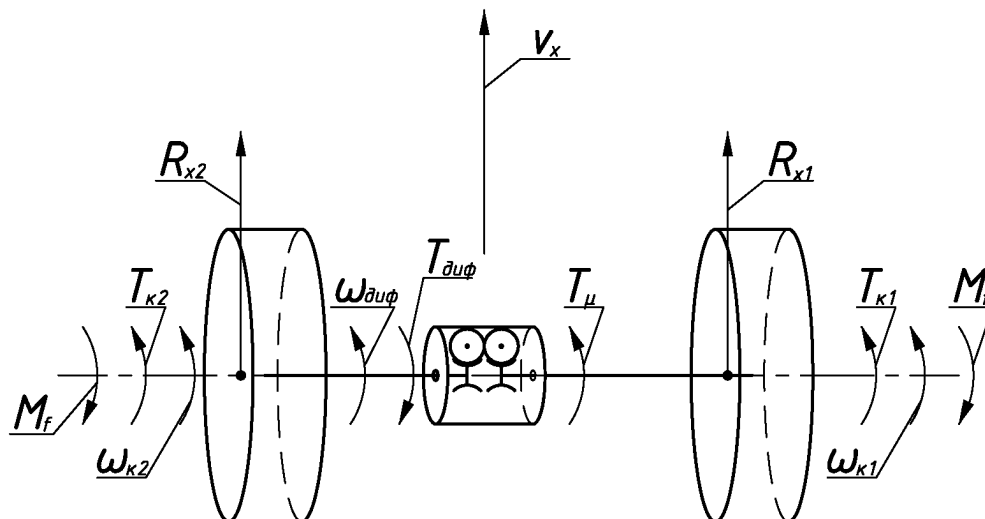


Рис. 4. Расчетная схема ведущего моста, содержащего самоблокирующийся дифференциал

Расчетная схема содержит в себе правое и левое колеса, корпус дифференциала и механизм трения дифференциала. T_{K1} , T_{K2} , $T_{диф}$ – моменты на полуосях и корпусе дифференциала соответственно и T_{μ} – момент трения, возникающий в дифференциале. M_f – момент сопротивления качению; ω_{K1} , ω_{K2} , $\omega_{диф}$ – угловые скорости колес и корпуса дифференциала соответственно; R_{x1} , R_{x2} – реакции в пятнах контакта правого и левого колеса; v_x – скорость движения ведущего моста.

Чтобы рассчитать процентное соотношение распределения крутящего момента между колесами моста, необходимо воспользоваться формулой [6]:

$$k_{\delta} = \frac{1 + k_{\delta}^*}{1 - k_{\delta}^*}. \quad (1)$$

Крутящий момент, подаваемый на правое колесо, записывается по следующей формуле:

$$T_{K1} = T_{\text{колесо}} \cdot \left(\frac{k_{\delta}}{k_{\delta} + 1} \right). \quad (2)$$

Крутящий момент, приходящийся на левое колесо, определяется так:

$$T_{K2} = T_{\text{колесо}} \cdot \left(1 - \frac{k_{\delta}}{k_{\delta} + 1} \right). \quad (3)$$

Определив крутящие моменты на колесах, можно составить систему уравнений для ведущего моста [7, 8]:

$$\begin{cases} 2m \cdot \dot{v}_x = R_{x1} + R_{x2}; \\ J_K \cdot \dot{\omega}_{K1} = T_{K1} - M_f - R_{x1} \cdot r; \\ J_K \cdot \dot{\omega}_{K2} = T_{K2} - M_f - R_{x2} \cdot r. \end{cases}$$

где m – масса колеса, v_x – линейная скорость ведущего моста, J_k – момент инерции колеса, r – расстояние от центра колеса до опорного основания. Первое уравнение характеризует поступательное движение ведущего моста; второе и третье характеризуют вращательное движение колес правого (с индексами 1) и левого (с индексами 2) бортов соответственно. В свою очередь продольная реакция в пятне контакта R_{x1} (R_{x2}) при взаимодействии с опорной поверхностью, зависит от величины нормальной реакции и коэффициента сцепления [9–12]:

$$R_{x1} = \varphi_x \cdot R_{z1},$$

где R_{z1} (R_{z2}) – нормальная реакция опорной поверхности, φ_x – коэффициент сцепления, который зависит от коэффициента буксования зависимостью [10]:

$$\varphi_x = \varphi_{x \max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{s}{s_0}}\right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{s}{s_1}}\right).$$

где $\varphi_{x \max \text{ асфальт}} = 0,7$ для асфальта, $\varphi_{x \max \text{ лед}} = 0,08$ для льда.

При разработке математической модели самоблокирующегося дифференциала примем следующее допущение, что механическая система обладает нелинейностью и мертвой зоной:

$$\begin{cases} \omega_1 - \omega_2 = 0; & \omega_1 - \omega_2 > -0,5; \\ \omega_1 - \omega_2 = 0; & \omega_1 - \omega_2 < 0,5. \end{cases}$$

Сначала будет составлена математическая модель ведущего моста с обычным дифференциалом. Когда речь идет об обычном дифференциале, принято считать, что момент трения равен нулю $T_\mu = 0$ (хотя на самом деле T_μ пренебрежимо мал). Затем будет составлена математическая модель с самоблокирующимся дифференциалом. Построение двух математических моделей необходимо для выявления главного преимущества самоблокирующегося дифференциала – возможности распределения крутящего момента между колесами в зависимости от условий качения колеса. Фактором, который будет определять условия качения колеса, является коэффициент сцепления с опорной поверхностью.

Построенная математическая модель ведущего моста с обычным дифференциалом, представлена на рисунке 5.

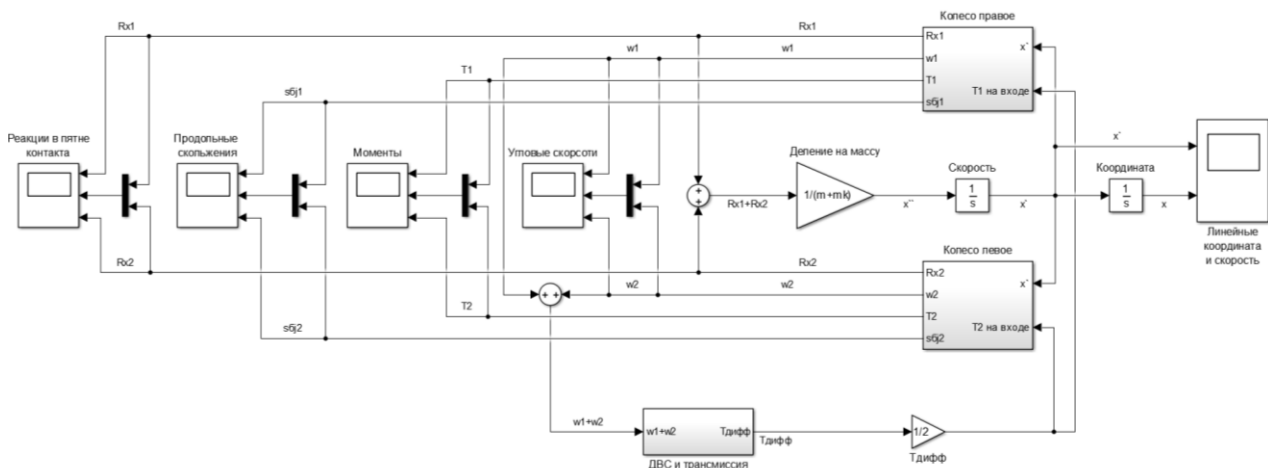


Рис. 5. Математическая модель ведущего моста с обычным дифференциалом

Далее представлена блок-схема ведущего моста с самоблокирующимся дифференциалом (рис. 6).

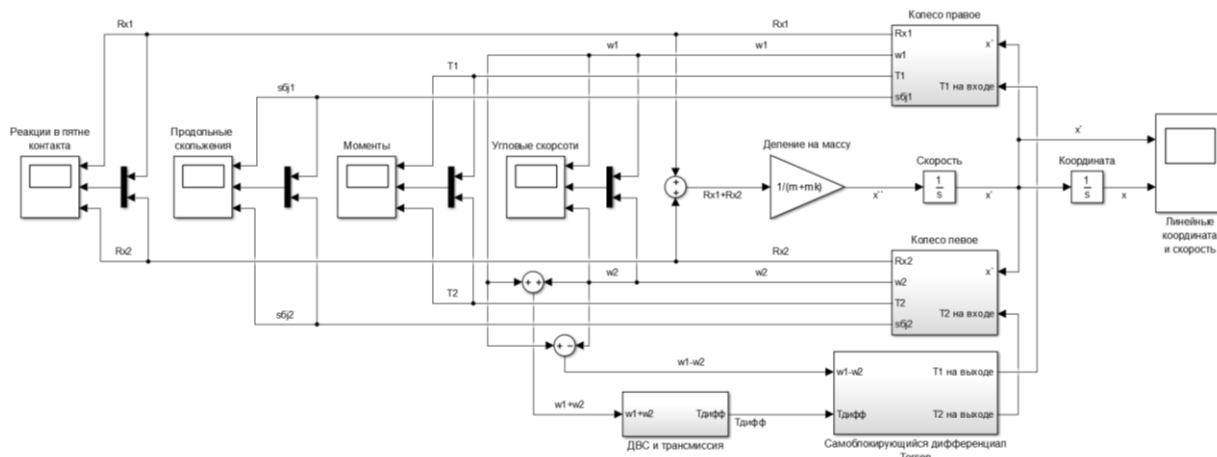


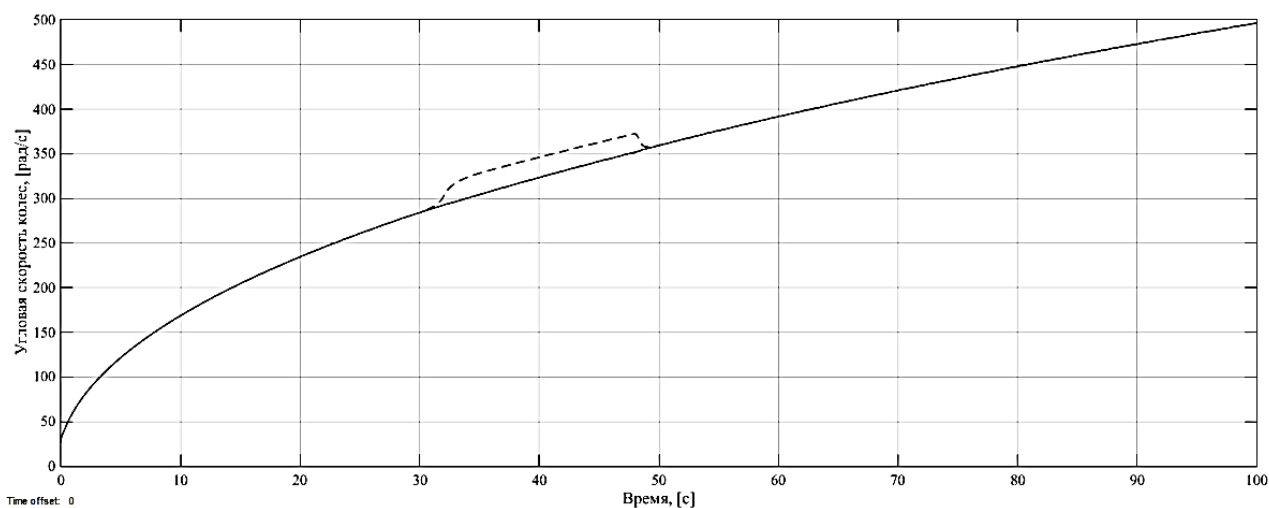
Рис. 6. Математическая модель ведущего моста с самоблокирующимся дифференциалом

Распределение крутящего момента происходит следующим образом: так как коэффициент блокировки должен проявлять себя лишь тогда, когда имеет место разность угловых скоростей, коэффициент блокировки k_b^* , либо положителен «+», либо отрицателен «-», либо «0».

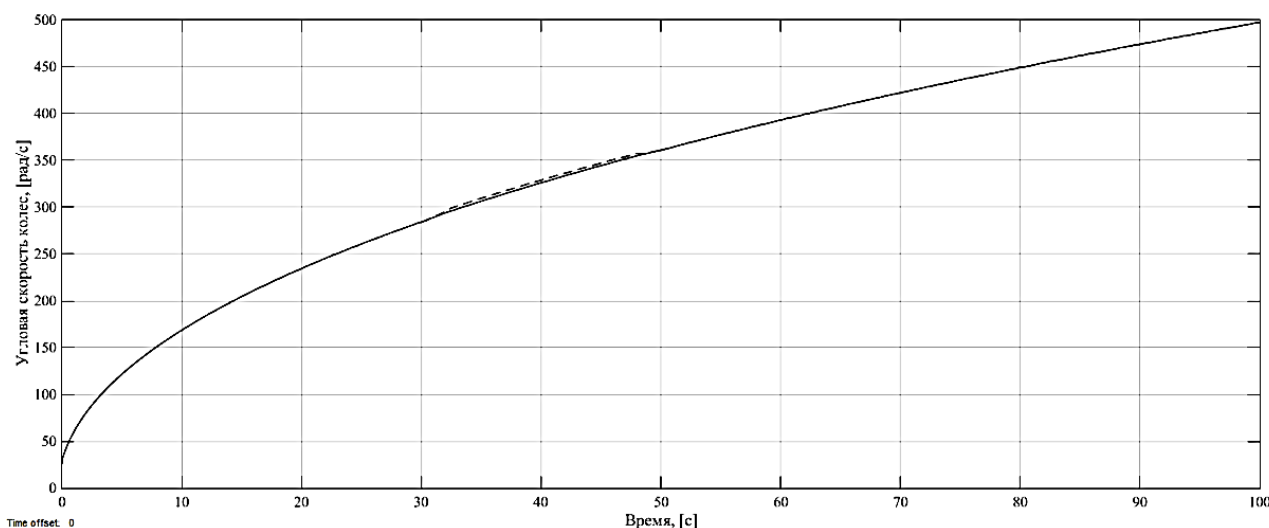
Начальные условия. Изначально принято, что автомобиль движется прямолинейно, известна начальная скорость, масса приходящая на ведущий мост, параметры двигателя, передаточные числа от двигателя до ведущего моста. Известно, что автомобиль наезжает правым колесом на лед коэффициент сцепления, которого составляет $\varphi_{x \max \text{ лед}} = 0,08$.

Результаты моделирования. Из сравнения графиков видно, как происходит распределение крутящих моментов и как это распределение влияет на угловые скорости ведущих колес. На рисунке 7, а, показаны угловые скорости ведущих колес правого и левого борта без самоблокирующегося дифференциала, а на рисунке 7 б – с самоблокирующимся дифференциалом.

Из рисунка 7 видно, что при движении по льду, обычный дифференциал допускает сильное повышение угловой скорости скользящего колеса. К примеру, на 40-ой секунде моделирования, угловые скорости составляют: $\omega_{k1} = 346,2$ рад/с, $\omega_{k2} = 323,5$ рад/с. В случае с самоблокирующимся дифференциалом: $\omega_{k1} = 329,1$ рад/с, $\omega_{k2} = 326,2$ рад/с, то есть самоблокирующийся дифференциал не допустил проскальзывания колеса даже при качении по льду.



а)

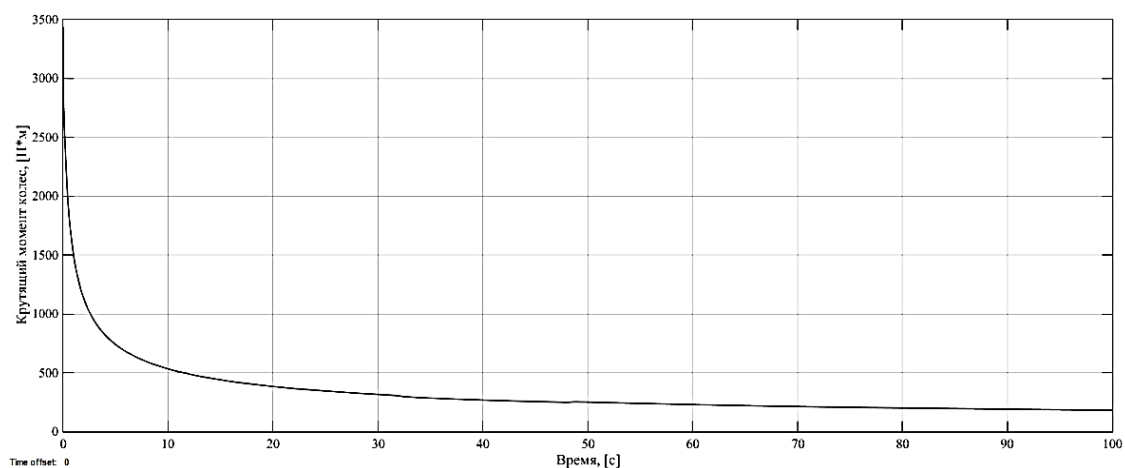


б)

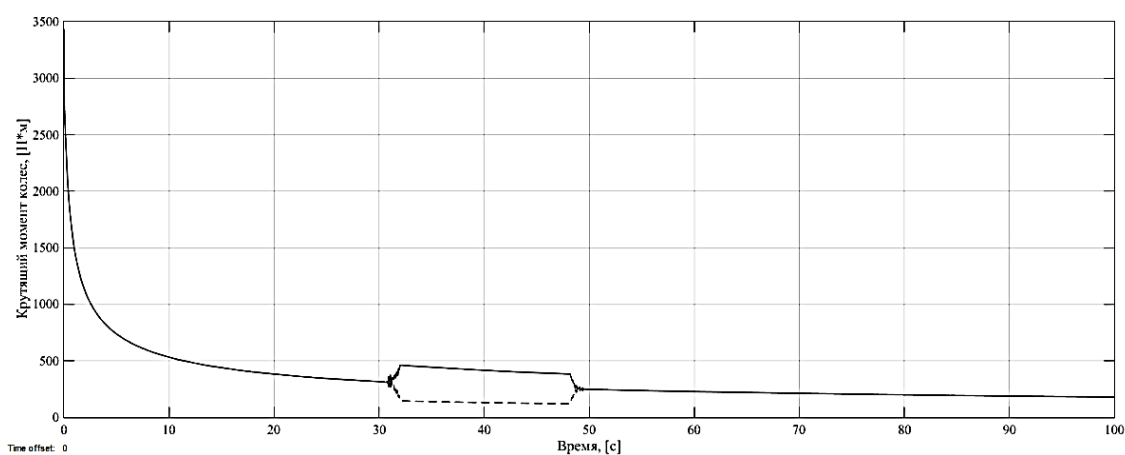
Рис. 7. Графики угловых скоростей правого (пунктир) и левого (сплошная) колес:
а) без самоблокирующегося дифференциала; **б)** с самоблокирующимся дифференциалом

На рисунке 8, а, показаны крутящие моменты ведущих колес правого и левого борта без самоблокирующегося дифференциала, а на рисунке 8 б – с самоблокирующимся дифференциалом.

Из рисунка 8 видно, как происходит распределение крутящего момента. В первом случае распределения не происходит, так как на выходных валах подается одинаковый крутящий момент. Во втором случае произошло распределение, причем крутящий момент был подан на то, колесо где было высокое сцепление с опорной поверхностью. Разность крутящих моментов на 40-ой секунде составила: $T_{к1} = 131,8 \text{ Н*м}$, $T_{к2} = 417,6 \text{ Н*м}$.



а)



б)

Рис. 8. Графики крутящих моментов правого (пунктир) и левого (сплошная) колес:
а) без самоблокирующегося дифференциала; б) с самоблокирующимся дифференциалом

На рисунке 9, показаны крутящие моменты ведущих колес правого и левого борта с самоблокирующимся дифференциалом, но без мёртвой зоны.

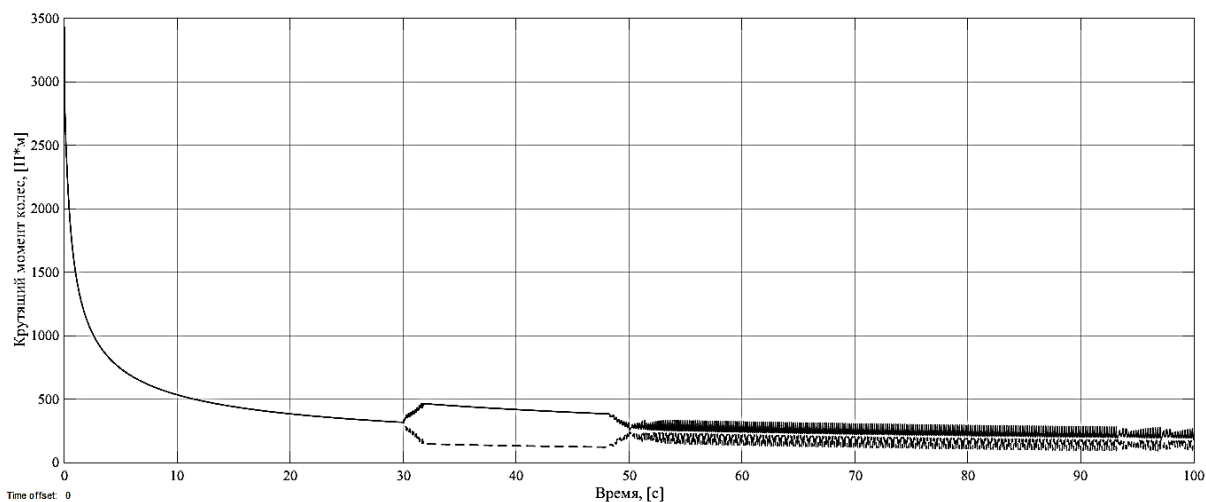


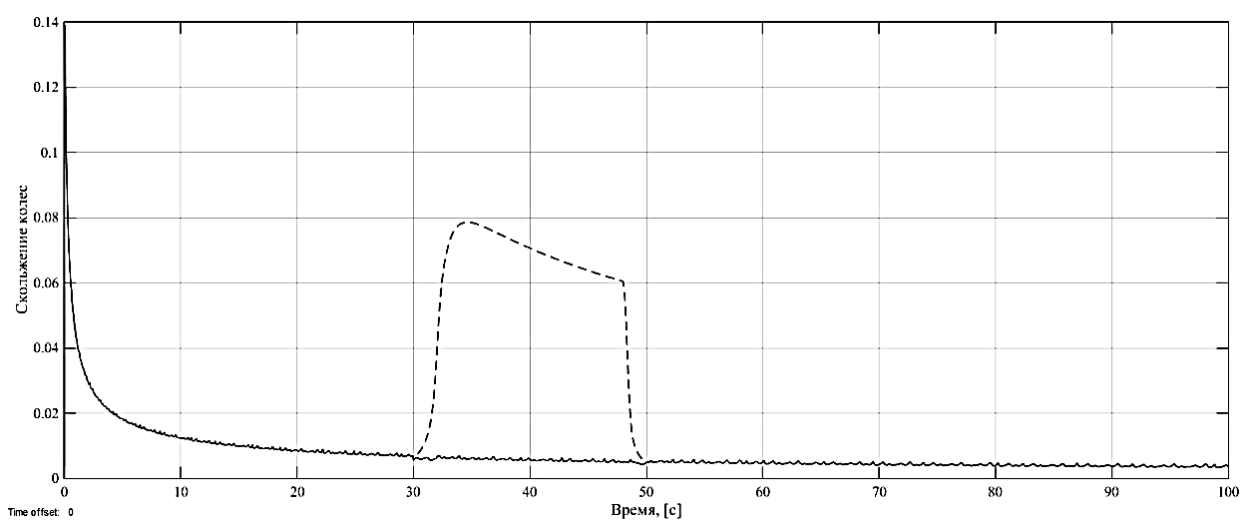
Рис. 9. Графики крутящих моментов правого (пунктир) и левого (сплошная) колес с самоблокирующимся дифференциалом без мёртвой зоны

Причиной автоколебаний показанных на рисунке 9, является разность угловых скоростей, которая после распределения крутящего момента не приравнялась нулю, то есть значение разности угловых скоростей после распределения, было бесконечно малым, либо положительным, либо отрицательным, но не равным строго нулю, это и повлекло автоколебания в дифференциале.

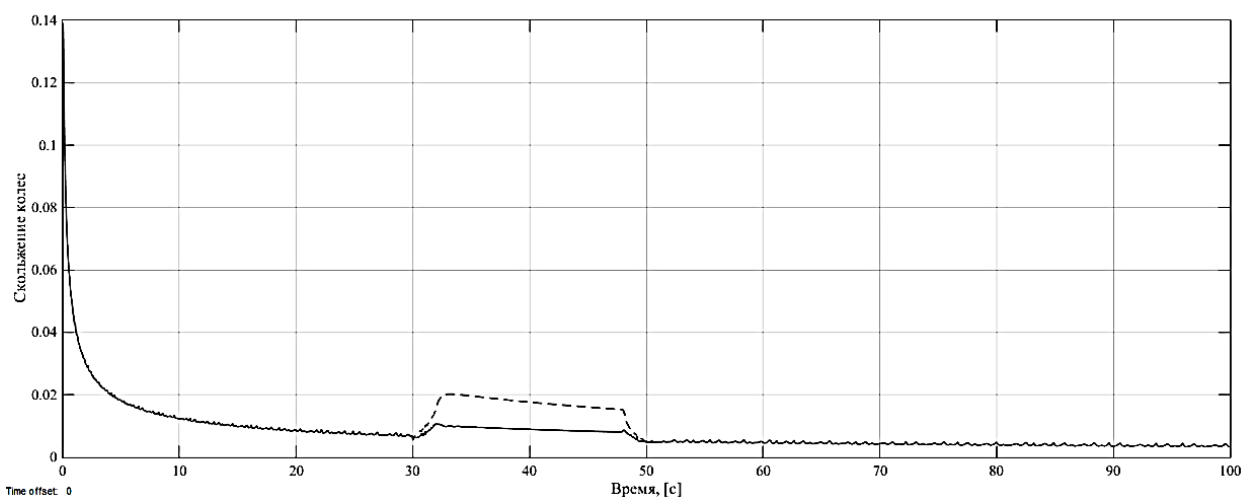
Критерий, по которому можно оценить скольжение — это величина s_{6j} , которая вычисляется по формуле [11]:

$$s_{6j} = 1 - \frac{v_k}{\omega_k r_k}.$$

На рисунке 10, а, показаны скольжения ведущих колес правого и левого борта без самоблокирующегося дифференциала, а на рисунке 10 б – с самоблокирующимся дифференциалом.



а)



б)

Рис. 10. Графики скольжений правого (пунктир) и левого (сплошная) колес:
а) – без самоблокирующегося дифференциала; **б)** – с самоблокирующимся дифференциалом

Из рисунка 10, а, видно, что колесо, попавшее на лед, обладает большим скольжением, однако, на рисунке 10 б видно, что в случае с самоблокирующимся дифференциалом колесо, которое катилось по льду, тоже стало скользить (хоть и не значительно). Это вызвано тем, что крутящий момент, подаваемый на колесо, оказался слишком велик, для данного коэффициента сцепления с асфальтом, из-за чего и произошло проскальзывание.

Заключение

1. Разработана математическая модель ведущего моста с самоблокирующимся дифференциалом в среде имитационного моделирования MATLAB & Simulink.
2. Разработанная математическая модель показывает, что самоблокирующийся дифференциал обеспечивает перераспределение крутящего момента от скользящего колеса к нескользящему.
3. Доказано, что в самоблокирующемся дифференциале должна быть мертвая зона, чтобы дифференциал мог, после проскальзывания одного из колес, делить крутящий момент пополам без колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках договора № ДН01/0001/216/15 между ООО «ЛиАЗ» и МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Список литературы

- [1]. 1986: The Torsen differential in the Audi Quattro // Электронный ресурс. Режим доступа: https://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwju_6zvt5XNAhXqC5oKHUATASMQFggeMAA&url=http%3A%2F%2Fm.audi-quattro-high-lights.de%2Fen%2Fcontent%2Fdownload%2F1155%2F9124%2Fversion%2F4%2Ffile%2F1986_Torsen_differential.pdf&usq=AFQjCNH-T_0TsD53MlWIsT9nz13YP-3-w&sig2=4_jUb_t0eOr6Jsu13NNHBiw&bvm=bv.123664746,d.bGs (дата обращения 20.05.2016).
- [2]. Сайт компании Torsen traction / Электронный ресурс. Режим доступа: <http://torsen.info/files/Torsen%20T-1%20Technical%20Sheet.pdf> (дата обращения 20.05.2016).
- [3]. Naunheimer H., Bertsche B., Ryborz J., Novak W. Automotive Transmissions: Fundamentals, Selection, Design and Application. Second Edition. Springer: Heidelberg, Dordrecht, London, New York. 2011. 715 p.
- [4]. Антонян А.В. Вывод коэффициентов блокировки самоблокирующегося дифференциала Torsen // Молодежный научно-технический вестник. Электрон. журн. 2015. №8. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/793602.html> (дата обращения 20.05.2016).
- [5]. The development of a differential for the improvement of traction control // Электронный ресурс. Режим доступа: <http://zhome.com/ZCMnL/tech/Torsen/Torsen.htm> (дата обращения 20.05.2016).

- [6]. Афанасьев Б.А., Белоусов Б.Н., Жеглов Л.Ф., Зузов В.Н., Полунгян А.А., Фоминых А.Б., Цыбин В.С. Проектирование полноприводных колесных машин: учебник для вузов. В 3 т. Т. 2. / под общ. ред. А.А. Полунгяна. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008. 528 с.
- [7]. Жилейкин М.М. Теоретические основы показателей устойчивости и управляемости колесных машин на базе методов нечеткой логики. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. 238 с.
- [8]. Яскевич З. Ведущие мосты. М.: Машиностроение. 1985. 600 с.
- [9]. Литвинов А.С. Устойчивость и управляемость автомобиля. М.: Машиностроение. 1971. 416 с.
- [10]. Котиев Г.О., Горелов В.А., Захаров А.Ю. Имитационное моделирование динамики прямолинейного движения колесной машины на стенде «Беговые барабаны» // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. №4. С. 45-63. DOI: [10.7463/0414.0707918](https://doi.org/10.7463/0414.0707918)
- [11]. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин: учебник для вузов М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 391 с.
- [12]. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. М.: Машиностроение. 1990. 352 с.