электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова"
ISSN 2307-0609

 # 08, август 2017

УДК 004.021

Программная реализация калмановской фильтрации 4-го порядка

***Малыгина С.В.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Защита информации»

***Скворцова М.А.** ассистент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Компьютерные системы и сети»
magavrilova@bmstu.ru

Алгоритм фильтра Калмана

Фильтр Калмана широко используется в инженерных и эконометрических приложениях: от радаров и систем технического зрения до оценок параметров макроэкономических моделей. Калмановская фильтрация является важной частью теории управления, играет большую роль в создании систем управления. В большинстве приложений количество параметров, задающих состояние объекта, больше, чем количество наблюдаемых параметров, доступных для измерения. При помощи модели объекта по ряду доступных измерений фильтр Калмана позволяет получить оценку внутреннего состояния[1].

Наглядный пример возможностей фильтра — получение точных, непрерывно обновляемых оценок положения и скорости некоторого объекта по результатам временного ряда неточных измерений его местоположения. Например, в радионавигации стоит задача сопровождения цели, определения её местоположения, скорости и ускорения, при этом результаты измерений поступают постепенно и сильно зашумлены. Фильтр Калмана использует вероятностную модель динамики цели, задающую тип вероятного движения объекта, что позволяет снизить воздействие шума и получить хорошие оценки положения объекта в настоящий, будущий или прошедший момент времени[1][3].

Фильтр Калмана оперирует понятием вектора состояния системы (набором параметров, описывающих состояние системы на некоторый момент времени) и его статистическим описанием. При наличии определенной математической модели производимых наблюдений за системой, а также модели априорного изменения параметров вектора состояния можно записать уравнение для апостериорной плотности вероятности вектора состояния в любой момент времени.

Алгоритм состоит из двух повторяющихся фаз: предсказание и корректировка. На первом рассчитывается предсказание состояния в следующий момент времени (с учетом неточности их измерения). На втором, новая информация с датчика корректирует предсказанное значение (также с учетом неточности и зашумленности этой информации):
Предсказание:

1. Предсказание состояния системы:

$$\hat{x}_k^- = F\,\hat{x}_{k-1}^- + B\,u_{k-1} \quad (1)$$

2. Предсказание ошибки корреляции:

$$P_k^- = F\,P_{k-1}F^T + Q \quad (2)$$

Корректировка:

1. Вычисление усиления Калмана:

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (3)$$

2. Обновление оценки с учетом измерения :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (4)$$

3. Обновление ошибки ковариации

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \ , \quad (5)$$

где

$\hat{x}_k^-$ - предсказание состояния системы в текущий момент времени;

F - матрица перехода между состояниями (динамическая модель системы);

$\hat{x}_{k-1}^-$ - состояние системы в прошлый момент времени;

B - матрица применения управляющего воздействия;

u_{k-1} - управляющее воздействие в прошлый момент времени;

P_k^- -предсказание ошибки;

P_{k-1} -ошибка в прошлый момент времени;

Q - ковариация шума процесса;

K_k - Калмановское усиление;

H - матрица измерений, отображающая отношение измерений и состояний;

R -ковариация шума измерения;

z_k -измерение в текущий момент времени;

I -единичная матрица.

Реализация фильтра Калмана

Будем считать, что за время измерения отсчетов наблюдаемый объект движется прямолинейно равноускоренно, в случае которого справедливы следующие формулы:

$$v(t) = v_0 + (t - t_0)a \quad (6)$$

$$r(t) = r_0 + (t - t_0)v_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2}a \quad (7).$$

Для оценки вектора состояния системы необходимо знать вектор начального состояния, который можно получить, путем накопления трех первых отсчетов, по которым получаем первоначальную оценку скорости и ускорения объекта.

При вышесказанных условиях динамическая модель системы будет иметь вид:

$$F = \begin{matrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix},$$

где Δt - интервал дискретизации.

Матрица измерений:

$$H = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Матрица ускорений:

$$G = \begin{matrix} \Delta t^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t \end{matrix}.$$

Матрица предсказания ошибок:

$$P_k = \begin{matrix} x_{err} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{err} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{x_{err}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{y_{err}} \end{matrix},$$

где

x_{err}, y_{err} – ошибки измерения координат по осям x и y;

$v_{x_{err}}$, $v_{y_{err}}$ - ошибки измерения скорости по осям x и y;

Для проверки работы смоделированного выше фильтра Калмана была написана программа, листинг которой представлен в приложении 1.

Практическая разработка

Разработка навигационной системы, содержащей в своем составе фильтр Калмана, независимо от типа применяемого оборудования (инерциальная или спутниковая аппаратура, прочие устройства) заставляет учитывать ряд особенностей. Часть фильтра, занимающаяся ковариационным анализом, не требует для своей работы ни конкретных значений оценок состояния системы, ни измерений; необходимы только величины, характеризующие их погрешности. Данное свойство используется разработчиком для априорной оценки точности результатов, получаемых посредством того или иного вида аппаратуры, и тем самым позволяет осуществить выбор подходящего оборудования. В некоторых случаях приходится предварительно реализовывать алгоритм на компьютере и проверять его работу с различными начальными условиями. Далее с помощью методов статистического анализа следует убедиться в том, что реализованная в фильтре модель измерений соответствует своему реальному прототипу. Наконец, когда построенный фильтр удовлетворит всем требованиям, необходимо провести серию заключительных испытаний для оценки адекватности выбранного способа линеаризации задачи и локализации возможных ошибок вычислительного характера. В большинстве случаев расширенный вариант алгоритма с замкнутым контуром обратной связи позволяет значительно снизить нежелательные последствия линеаризации. Ошибки в вычислениях обычно вызваны ограниченной длиной машинного слова и наиболее ярко проявляются в ковариационных матрицах, которые становятся либо несимметричными, либо имеют отрицательные диагональные элементы, вследствие чего нарушается правильная работа фильтра Калмана.

```
public void Correct(double _x, double _y)
    {
      if (FilterIsReady)
      {
        double[] data = { _x, _y };

        //time update - prediction

        X0 = Matrix.Sum(Matrix.Multiply(F, State), Matrix.Multiply(G, A));
        // X0 = F * State + G * A;
        // P0 = F * Covariance * Fт + Q;
        P0 = Matrix.Sum(
          Matrix.Multiply(
```

```
                Matrix.Multiply(F, Covariance), Matrix.Transp(F)
                    ), Q);

        //measurement update - correction
        // K = P0 * Нт * (H * P0 * Нт + R)-1              K = a * b

        a = Matrix.Multiply(P0, Ht);
        b = Matrix.ReversMatrix(
           Matrix.Sum(
           Matrix.Multiply(Matrix.Multiply(H, P0), Ht)
           , R));
        K = Matrix.Multiply(a, b);

        //State = X0 + K * (data - H * X0);
        State = Matrix.Sum(X0,
                    Matrix.Multiply(K,
                            Matrix.Difference(data,
                                    Matrix.Multiply(H, X0)))
                    );

        //Covariance = (1 - K * H) * P0;
        Covariance = Matrix.Multiply(
                            Matrix.Difference(I, Matrix.Multiply(K, H))
                           , P0);
    }
}
```

Результаты эксперимента

В тестовой программе производится контроль движения мыши, фиксирование её координат с заданной частотой дискретизации и построение трека. После накопления нескольких отсчетов и построения вектора состояния системы производится прогнозирование координат мыши в следующий момент времени и корректировка предсказанных значений. По скорректированным значениям строится отфильтрованная траектория движения мыши, очищенная от шумов. Результаты экспериментов представлены на рисунках 1 и 2. В первом случае частота дискретизации составляла 100 мс, во втором – 10 мс.

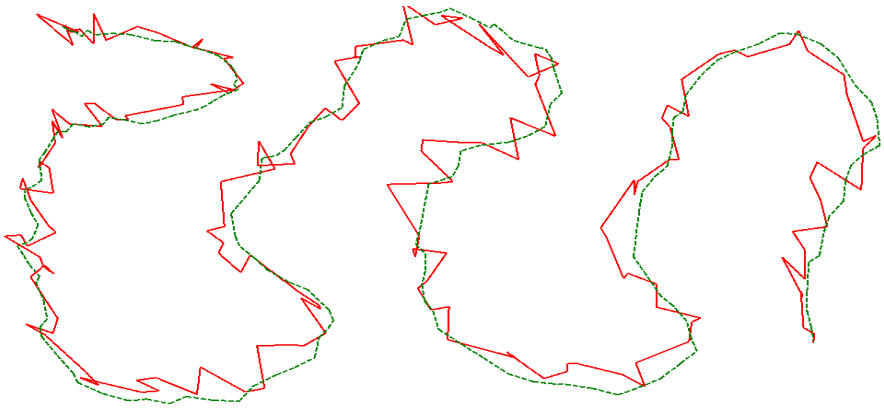


Рис. 1. Реальная траектория мыши (с добавленными шумами, сплошная кривая) и отфильтрованная (пунктирная) при частоте дискретизации 100 мс

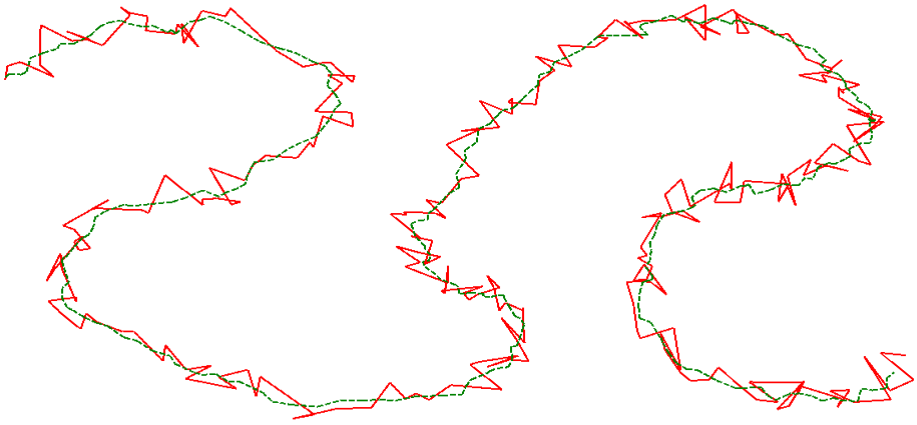


Рис. 2. Реальная траектория мыши (сплошная кривая) и отфильтрованная (пунктирная) при частоте дискретизации 10 мс

Выводы

В ходе проделанной работы был реализован алгоритм фильтра Калмана 4-ого порядка, позволяющий получать очищенные от шумов оценки местоположения движущегося объекта. Была написана тестовая программа, реализующая фильтрацию координат компьютерной мыши, и успешно проведена серия экспериментов, результате которых были подтверждены исходные суждения.

Список литературы

[1]. Федоров И.Б. Информационные технологии в радиотехнических системах**:** учебное пособие. 2-е изд. перераб. и доп. М.: МГТУ им. И.Э. Баумана, 2004. 768 с.

[2]. Сюзев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. М.: Изд-во «РТСофт», 2014. 752 с.

[3]. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1070 с.