

01, март 2019

УДК 519.63

Разработка алгоритма расчета параметров внутренней геометрии адаптивных разностных сеток и его программная реализация

Зеленкова А. В., магистр

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,

кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

azelenkova96@mail.ru

Научный руководитель: Захаров А.А., к.ф.-м.н., доцент

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

azaharov@bmstu.ru

Аннотация: Работа посвящена исследованию параметров оценки качества адаптивной разностной сетки, в частности выявлена связь между компонентами тензора деформации и характеристиками генерируемых сеточных ячеек. Полученные характеристики сеточных ячеек и узлов позволяют установить области с неудовлетворительным качеством сетки, понять причины нефизических возмущений при расчетах на данных сетках. С помощью рассчитанных параметров можно сравнивать различные методы генерации сеток и выбирать те, которые дают наилучшее качество.

Ключевые слова: адаптивные сетки (adaptive grids), тензоры деформации (deformation tensors), метрические матрицы (metric matrices), деформация ячеек (cell deformation), ортогональность (orthogonality), скошенность (skewness), конформность (conformality).

Введение

При разработке методов построения блочно-структурированных адаптивных сеток [1] важно иметь возможность оценивать качество получающихся сеток и устранять их недостатки. Высокое качество сеточной модели необходимо для получения корректных результатов численного расчёта, а также быстрой сходимости вычислительного метода.

В работе рассматривается проблема выбора параметров, позволяющих оценивать качество сеток, проводится исследование их полноты.

Метод генерации блочно-структурированных адаптивных сеток [1] позволяет построить аналитический вид преобразования из адаптивных параметрических координат

X^j , в которой ячейки сетки имеют вид прямоугольного параллелепипеда, в физические (декартовы) координаты x^i . Тогда сеточные характеристики можно выразить с помощью элементов метрических тензоров. Метрический тензор вводится следующим образом:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j,$$

где $\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(X^j)}{\partial X^i}$ – локальные вектора базиса.

В частности, некоторые свойства сеток могут быть описаны через инварианты ковариантного метрического тензора [2]:

$$I_1 = \sum_{i=1}^n g_{ii} = \text{tr}(g_{ij}),$$

$$I_{n-1} = \det(g_{ij}) \sum_{i=1}^n g^{ii} = \det(g_{ij}) \text{tr}(g^{ij}),$$

$$I_n = \det(g_{ij}).$$

Также, характеристики адаптивных разностных сеток можно получать на основе рассмотрения деформированного состояния сгенерированных ячеек сетки, которое полностью определяется тензором деформации [3].

Для дальнейших рассуждений воспользуемся определением тензора деформации Альманзи $\mathbb{A}$, так как данный тензор вводится с использованием локального базиса актуальной (деформированной) конфигурации и далее рассматриваются его ковариантные компоненты [4]:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ij}^0) \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j = \varepsilon_{ij} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j.$$

Рассмотрим механический смысл компонент тензора деформации:

– компоненты тензоров деформации $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ при $\alpha \neq \beta$ характеризуют изменение угла между координатными волокнами:

$$\cos \psi_{\alpha\beta} = \frac{2\varepsilon_{\alpha\beta}}{\sqrt{(1+2\varepsilon_{\alpha\alpha})(1+2\varepsilon_{\beta\beta})}}. \quad (1)$$

– компоненты тензоров деформации $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ характеризуют относительные удлинения соответствующих координатных волокон:

$$\delta_\alpha = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}} - 1; \quad (2)$$

Термин деформация относится к изменению формы континуума от некоторой начальной (недеформированной) до последующей (деформированной) конфигурации. При

этом учитываются только начальное и конечное состояния. Промежуточным, по которым происходит деформация, внимания не уделяется [3].

В качестве начального состояния (начальной конфигурации) сплошной среды рассматривается недеформированная ячейка сетки – параллелепипед. В данном случае получаем, что матрица $\mathring{G} = (g_{ij}^o)$ является единичной, т. е.

$$(g_{ij}^o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим введенные параметры качества адаптивной разностной сетки.

Деформация ячеек

По формуле (1) можно ввести характеристику адаптивной разностной сетки, которая будет характеризовать сдвиг ячейки, т.е. деформацию ее углов при переходе из начального состояния (прямоугольника) в конечное (деформированное) состояние, и в качестве данной характеристики рассматривать квадрат косинуса угла между касательными векторами $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta$.

Назовем данную характеристику *скошенностью граней ячейки* и, после несложных преобразований, введем следующее обозначение

$$P_{\alpha\beta}^{sk} = \cos^2 \psi_{\alpha\beta} = \frac{(g_{\alpha\beta})^2}{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}, \alpha \neq \beta.$$

Для трехмерного случая получаем:

$$P^{sk} = \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^3 \frac{(g_{ij})^2}{g_{ii}g_{jj}}.$$

Отношение поперечных и продольных размеров граней

На основе формулы (2) введем величину, которая характеризует растяжение (сжатие) ребер сеточных ячеек при деформации:

$$P_{\alpha\beta}^{as} = \frac{(\delta_\alpha + 1)^2}{(\delta_\beta + 1)^2} + \frac{(\delta_\beta + 1)^2}{(\delta_\alpha + 1)^2} = \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}} + \frac{g_{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Получаем неравенство $P^{as} \geq 6$, которое становится равенством тогда и только тогда, когда $g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta}$, то есть параллелограмм, сформированный векторами $\mathbf{r}_\beta$ и $\mathbf{r}_\alpha$, является ромбом.

Для трехмерного случая:

$$P^{as} = \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^3 \left(\frac{g_{ii}}{g_{jj}} + \frac{g_{jj}}{g_{ii}} \right).$$

Характеристики неортогональности

Параметр скошенности граней ячейки P^{sk} достигает минимального значения, равного нулю, только когда трехмерное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^j)$ является ортогональным [2] в соответствующей точке, и наоборот. Следовательно, эта величина может рассматриваться как некоторая мера сеточной неортогональности.

Рассмотрим еще одну меру сеточной неортогональности, рассчитываемую по формуле:

$$P^o = \frac{g_{11}g_{22}g_{33}}{g}.$$

Величина P^o безразмерна и достигает своего минимума, равного 1, тогда и только тогда, когда координатное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^j)$ ортогонально.

Квадрат площади поверхности ячеек

Из практических рекомендаций известно, что, если ячейка более чем в 1.2 раза превышает размер соседних ячеек, то имеет место *грубый (резкий) переход*, тогда как предпочтительнее плавное изменение размеров.

В качестве оценки площадей граней трехмерной ячейки можно взять следующую величину

$$P^{sq} = g(g^{11} + g^{22} + g^{33}),$$

которая является вторым инвариантом метрической матрицы (g_{ij}) .

Характеристика отклонения от конформности

Ячейки координатной сетки, полученные при конформном отображении $\mathbf{x}(X^j)$, близки к n -мерному параллелепипеду. Сетки с такими ячейками предпочтительны с точки зрения вычислений. Поэтому желательно определить простые сеточные величины, которые могут позволить устанавливать степень близости ячеек к n -мерным кубам.

В случае конформных координатных преобразований матрица Якоби является ортогональной, и, следовательно, метрическая матрица (g_{ij}) пропорциональна единичной матрице. Условие конформности можно описать системой

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$g_{11} = g_{22} = \dots = g_{nn}.$$

Эти соотношения порождают естественную величину

$$P^{cf} = \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^3 (g_{ij})^2 + \sum_{i=2}^3 (g_{ii} - g_{11})^2,$$

которая равняется нулю тогда и только тогда, когда координатное преобразование $\mathbf{x}(X^j)$ обладает свойством конформности.

Проведены расчет и визуализация найденных параметров оценки качества сетки для нескольких вариантов расчетных областей.

На рис. 1 представлено распределение параметра деформации ячеек P^{sk} для области криволинейного куба, показанного на рис. 1. Видно, что значения параметра у деформированных сторон отличны от 0 и больше в ячейках, у которых наблюдается большая деформация углов граней.

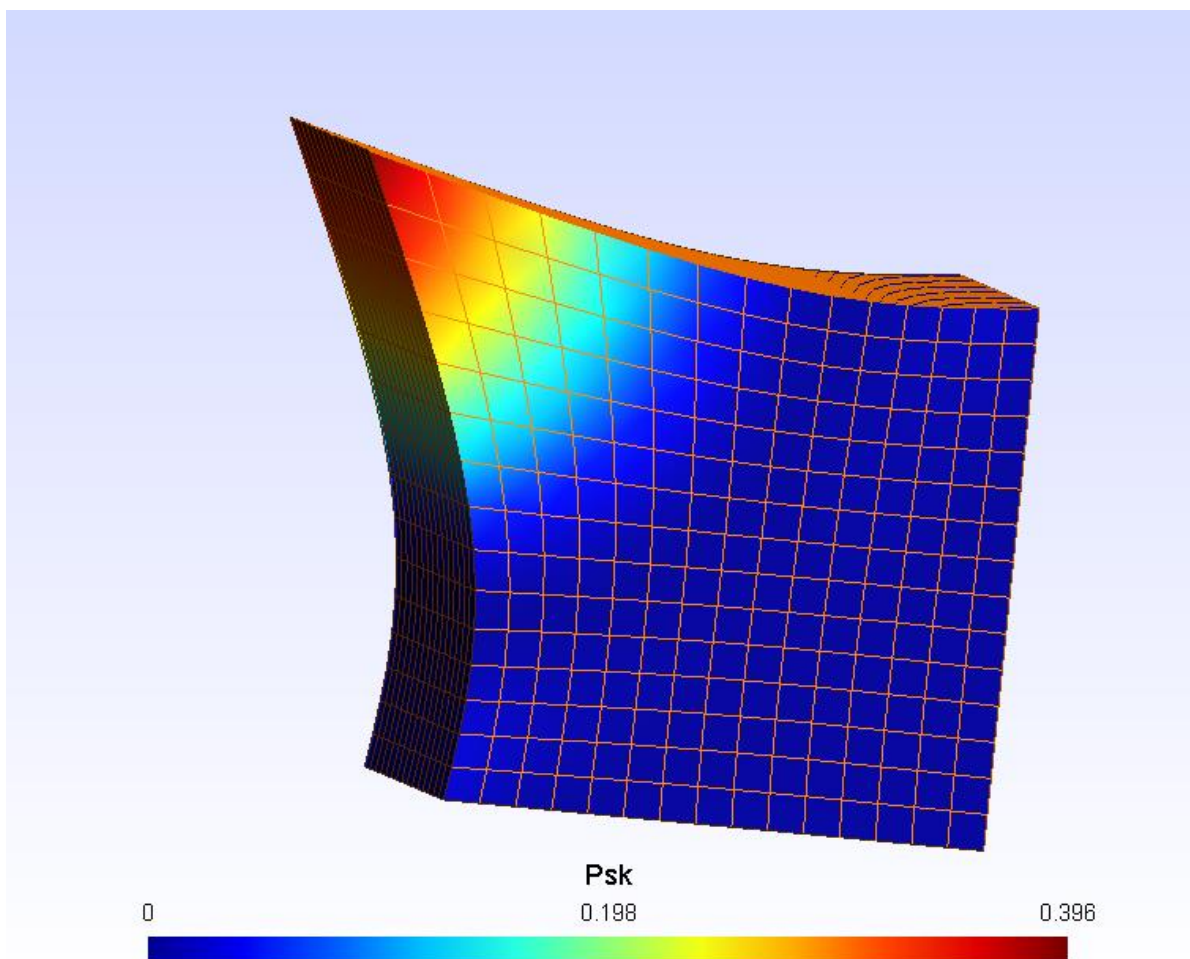


Рис. 1. Распределение параметра P^{sk} для криволинейного куба

На рис. 2 проиллюстрировано распределение параметра P^{sk} для сегмента полого цилиндра.

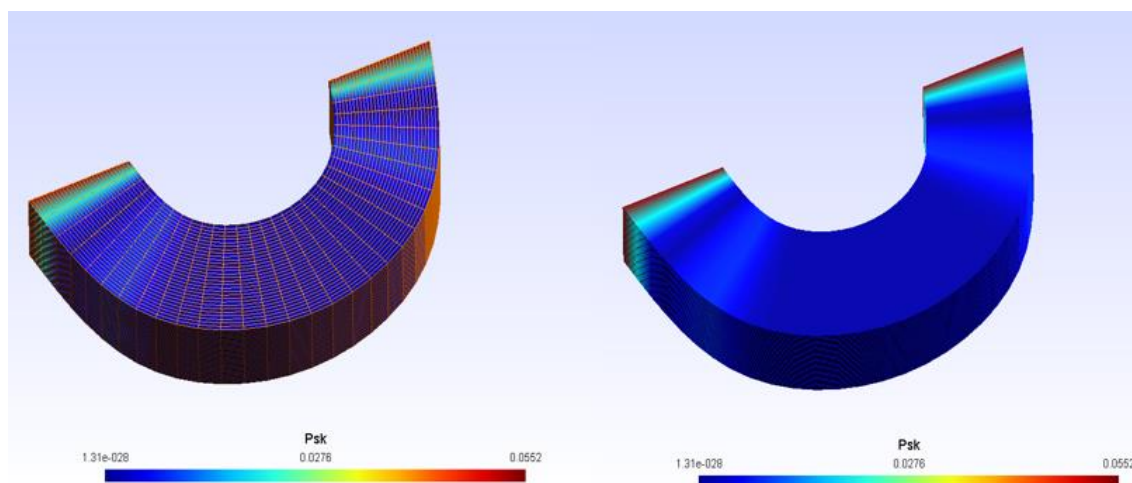


Рис. 2. Распределение параметра P^{sk} для сегмента полого цилиндра

На рис. 3 визуализированы значения величины меры отношения P^{as} для деформированного куба, на рис. 4 – для сегмента полого цилиндра. Для недеформированного куба все ячейки имеют форму ромба. Чем более вытянутыми становятся ячейки при деформации куба, тем больше увеличивается отношение их граней, и, следовательно, увеличивается параметр P^{as} .

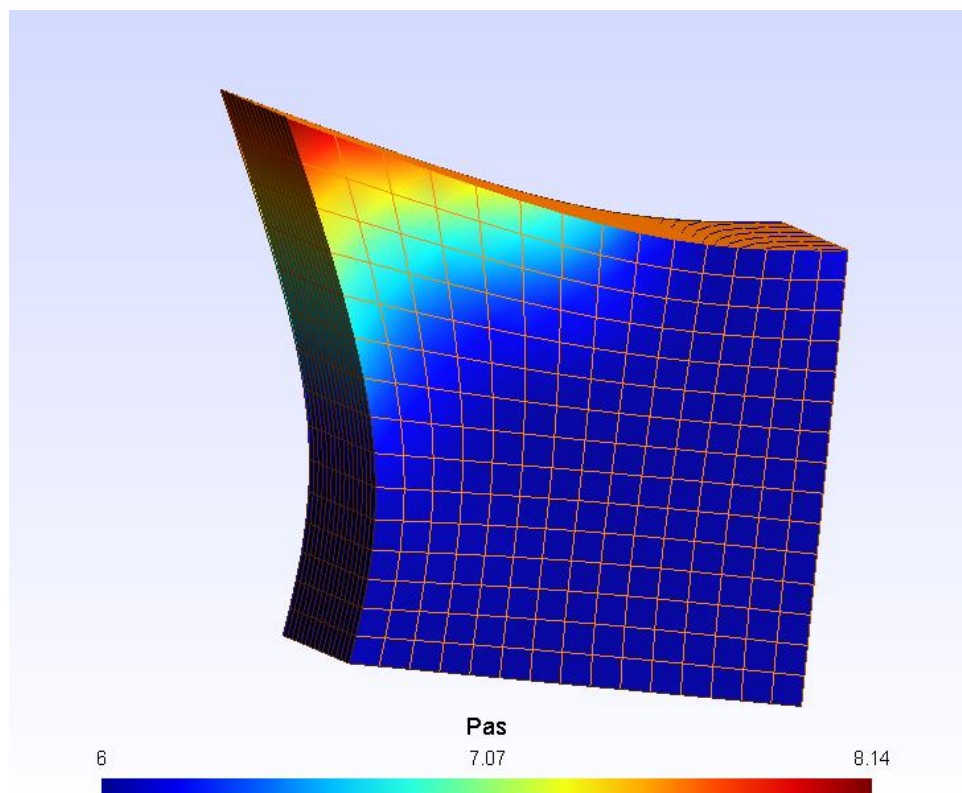


Рис. 3. Распределение параметра P^{as} для криволинейного куба

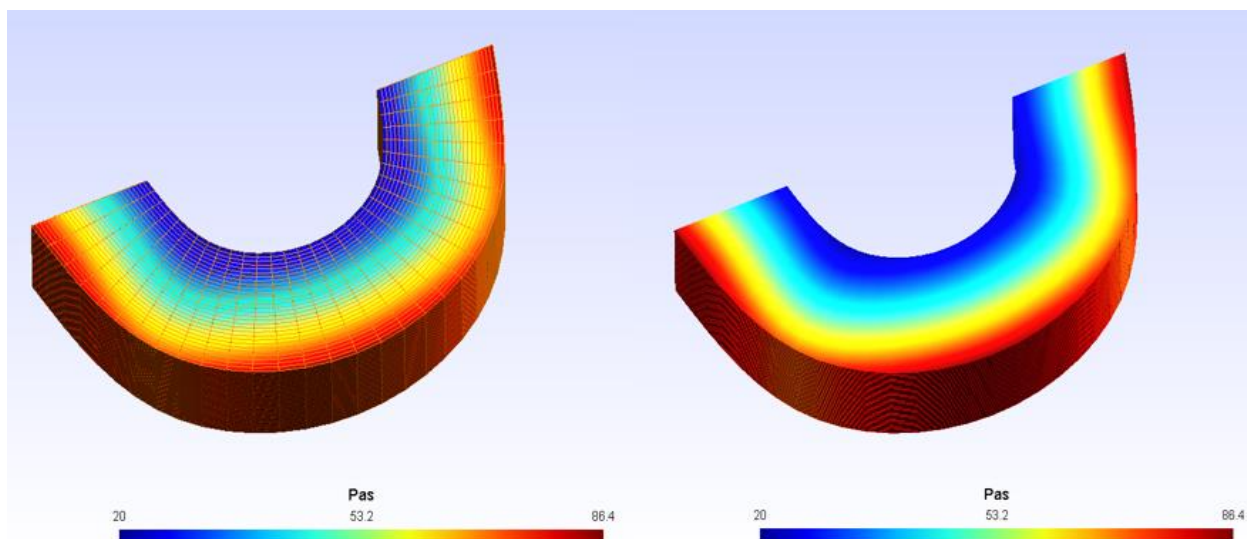


Рис. 4. Распределение параметра P^{as} для сегмента полого цилиндра

Рис. 5 иллюстрирует значения параметра P^o (характеристика неортогональности) для деформированного куба, рисунок 6 – для сегмента полого цилиндра.

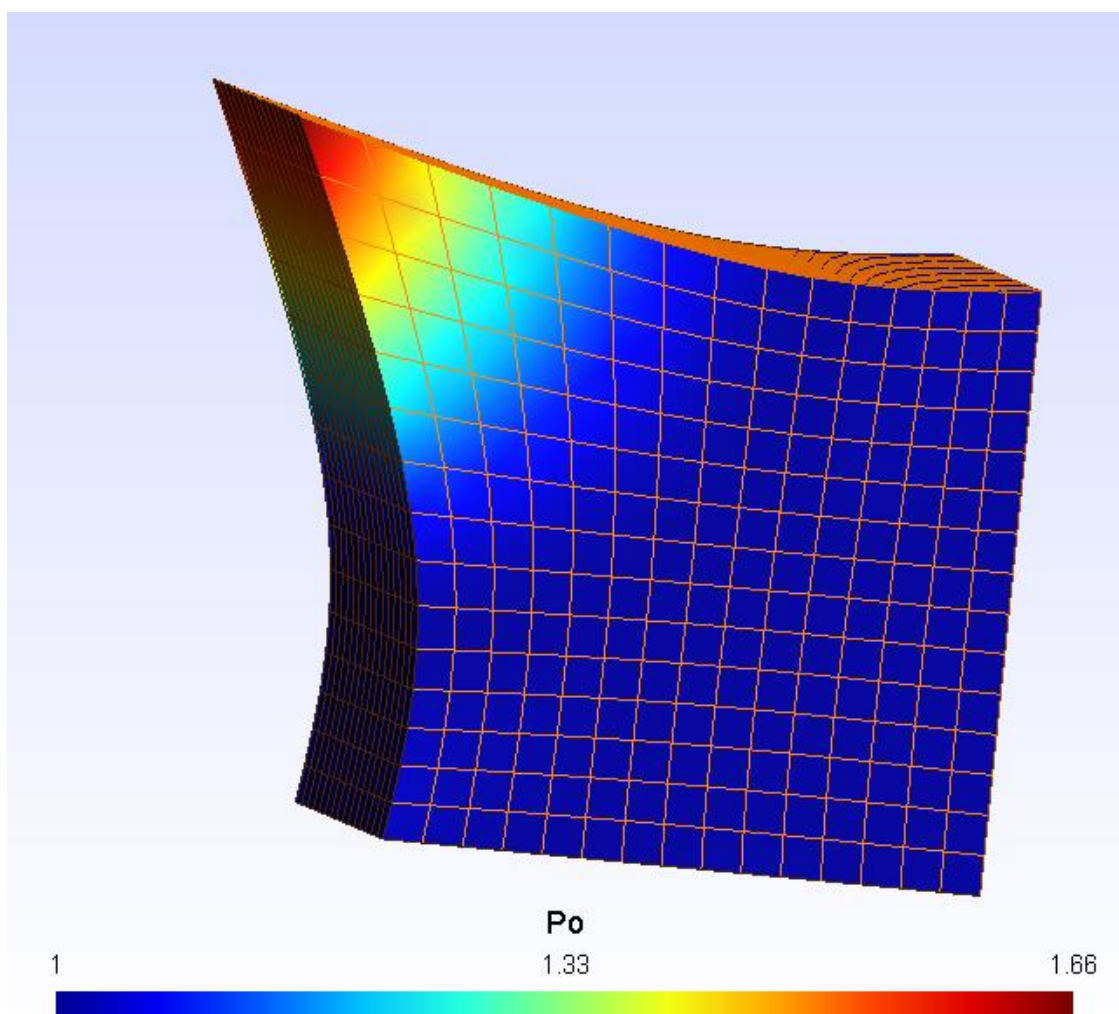


Рис. 5. Распределение P^o для деформированного единичного куба

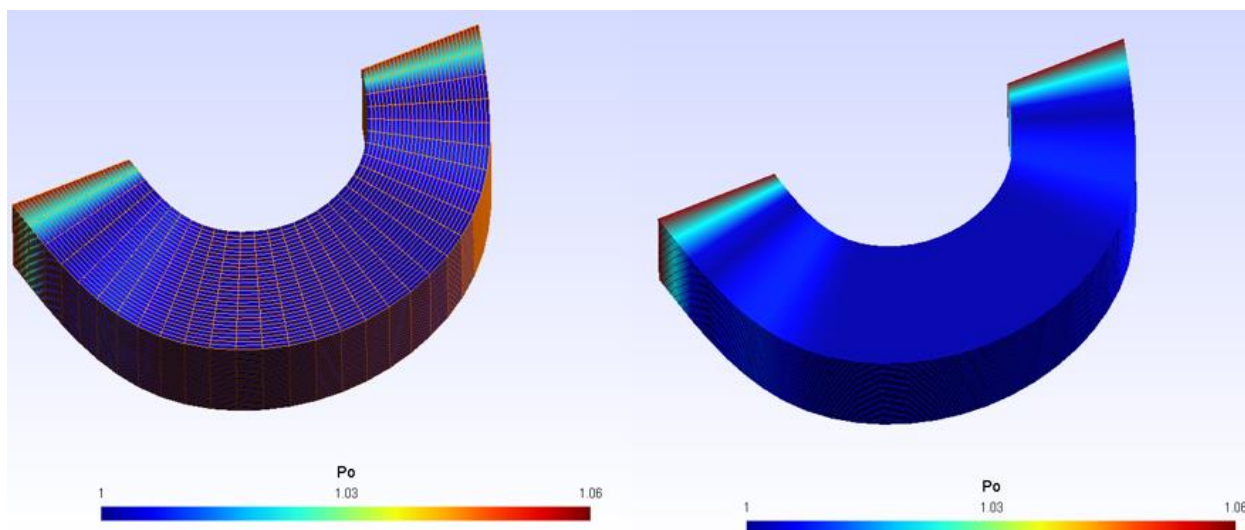


Рис. 6 — Распределение P^o для сегмента полого цилиндра

На рис. 7,8 представлены распределения параметра оценки площади поверхности ячеек P^{sq} для деформированного куба, а также для сегмента полого цилиндра соответственно. На рисунке 7 видно, что имеет место грубое изменение параметра при переходе от одной ячейки к другой в месте деформации.

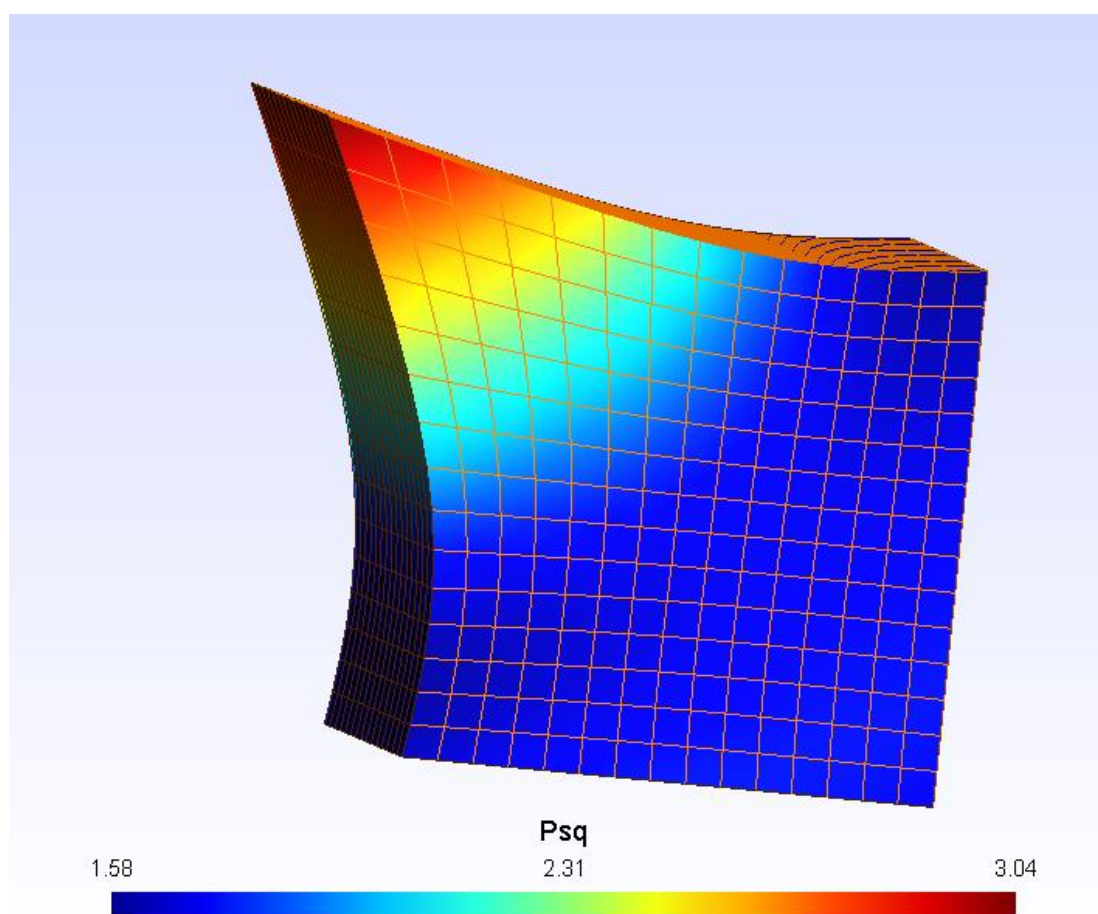


Рис. 7. Распределение параметра P^{sq} для деформированного единичного куба

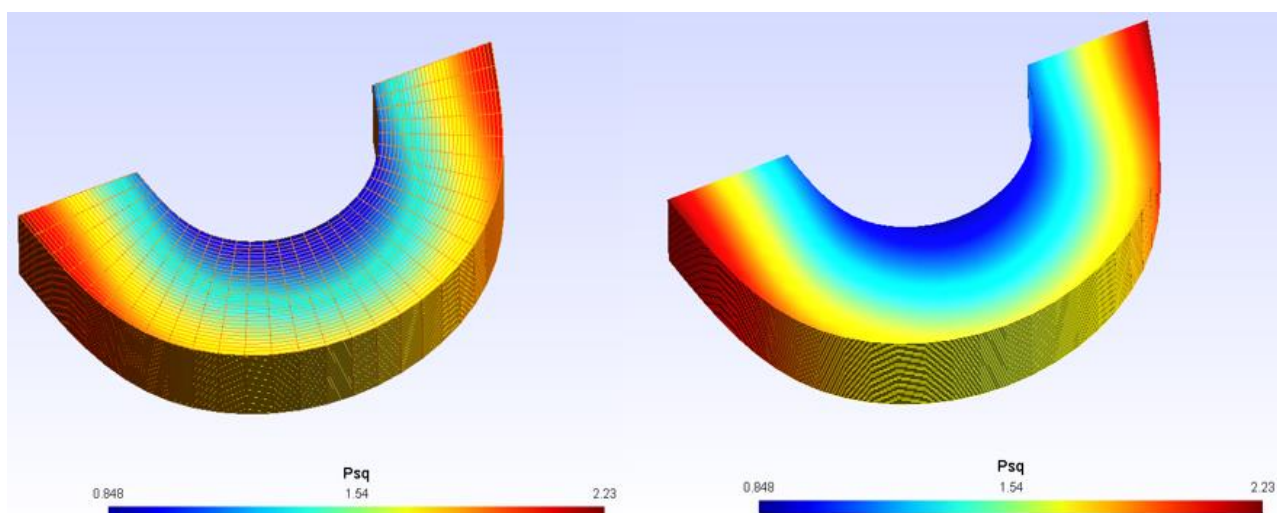


Рис. 8. Распределение параметра P^{sq} для сегмента полого цилиндра

На рис. 9-10 представлены значения параметра P^{cf} , характеризующего отклонение ячеек сетки от конформности для рассматриваемых областей соответственно.

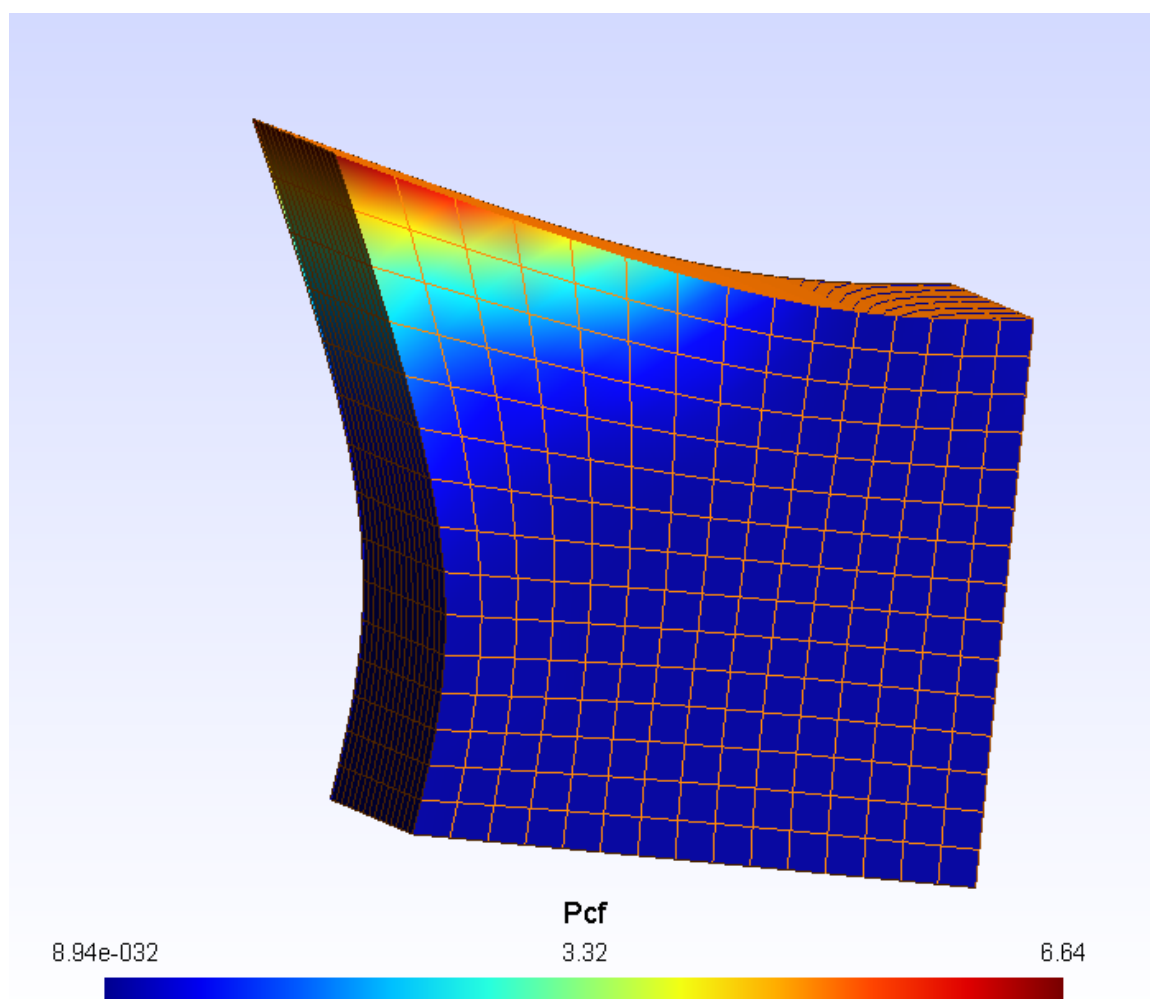


Рис. 9. Распределение параметра P^{cf} для деформированного единичного куба

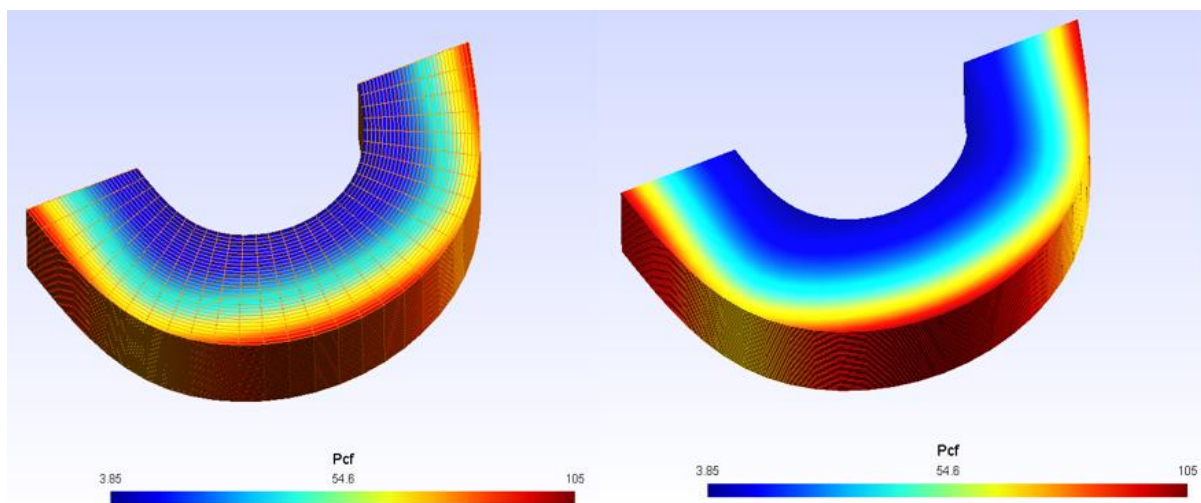


Рис.10. Распределение параметра P^{cf} для сегмента полого цилиндра

На основе анализа свойств ячеек адаптивных разностных сеток и исследования компонентов тензора деформации найдена взаимосвязь и проведено исследование следующих параметров качества адаптивных разностных сеток: деформация ячеек, отношение поперечных и продольных размеров граней, характеристики неортогональности, площади поверхности ячеек, характеристика отклонения от конформности. Полученные характеристики сеточных ячеек и узлов позволят установить области с неудовлетворительным качеством сетки, понять причины нефизических возмущений при расчетах на данных сетках. С помощью рассчитанных параметров можно сравнивать различные методы генерации сеток и выбирать те, которые дают наилучшее качество, а также проводить оптимизацию уже сгенерированных сеток.

Список литературы

- [1]. Димитриенко Ю. И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике: учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 280 с.
- [2]. Vladimir D. Liseikin Grid Generation Methods. Novosibirsk State University, 2017. 530 p.
- [3]. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. [Текст]: учеб. изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
- [4]. Димитриенко Ю. И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. Том 2. [Текст]: учеб. пособие: в 4 т. / Ю.И Димитриенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 599 с.