электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова"
ISSN 2307-0609

 # 02, июнь 2019

УДК 536.2:539.3

Температурные напряжения в криволинейной пластине при импульсном нагреве

Соколов А.А., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»
Zokolof@yandex.ru

Научный руководитель: Кувыркин Г. Н., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедра «Прикладная математика»
fn2@bmstu.ru

Аннотация: Расчет температурных напряжений при неустановившемся режиме представляет известные трудности из-за меняющихся во времени основных расчетных параметров. На основе одномерной расчётной схемы в пластине конечной толщины проанализировано влияние основных параметров нагружения, свойств материала и средней кривизны поверхности на распределения температуры и напряжений. Получены аналитические решения для распределения температуры и напряжений методом разделения переменных.

Ключевые слова: температурные напряжения (temperature stresses), криволинейная граница (curved boundary), упругое твёрдое тело (elastic solid), средняя кривизна (mean curvature), метод разделения переменных (separation of variables), импульсный нагрев (pulse heating).

Введение

Для многих термонапряжённых конструкций характерны участки двоякой кривизны, в частности плоские, цилиндрические и сферические [1]. Расчёт температурного и напряжённо-деформированного состояния элементов конструкции при импульсном нагреве в полном объёме представляет собой довольно сложную задачу. Наибольшие градиенты температуры и напряжений возникают в поверхностном слое конструкции в первые моменты времени после начала нагружения [2]. В таком случае поведение конструкции необходимо исследовать с учётом динамических эффектов [1-9]. В нашем случае будем вести учёт динамических эффектов только при определении напряжений.

Постановка задачи

Рассмотрим упругое изотропное и однородное тело конечной толщины, ограниченное криволинейной поверхностью, с заданными внешними нагрузками. Для получения уравнений термоупругости и теплопроводности положим, что внешняя нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали, а температура и напряжения зависят только от времени t и координаты x_1, направленной по нормали вглубь тела. В силу быстрого протекания процесса термомеханические свойства среды примем постоянными [2, 10].

В криволинейной ортогональной системе координат закон сохранения количества движения в проекции на ось $O\mathrm{x}_1$ может быть записан в виде [5, 10-12]:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{1}$$

а уравнение теплопроводности – в виде:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{q_1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\frac{q_1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right). \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ – отличные от нуля компоненты тензора напряжений, ρ – плотность, c – удельная массовая теплоёмкость при постоянной деформации, q_1 – проекция вектора плотности теплового потока на ось $O\mathrm{x}_1$, T – абсолютная температура, u_1 – проекция вектора перемещения на ось $O\mathrm{x}_1$, H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ламе, причём $H_1=1,\ H_2=H_2^0\left(1+x_1/R_2\right),\quad H_3=H_3^0\left(1+x_1/R_3\right),\ \left|x_1/R_2\right|\ll 1,\quad \left|x_1/R_3\right|\ll 1,\quad H_2^0$ и H_3^0 – значения коэффициентов Ламе при нагружаемой поверхности, R_2 и R_3 – главные радиусы кривизн этой поверхности. Подставляя соответствующие выражения для H_2 и H_3 в (1) и (2) и пренебрегая после дифференцирования величинами $\left|x_1/R_2\right|$ и $\left|x_1/R_3\right|$, малыми по сравнению с единицей, эти уравнения можно привести к виду:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\frac{\sigma_{22}}{R_2}-\frac{\sigma_{33}}{R_3}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{\partial q_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)q_1. \tag{4}$$

Решение уравнения теплопроводности

Вектор плотности теплового потока q_1 определим по закону Био – Фурье [2]:

$$q_1 = -\lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \tag{5}$$

где $\lambda^{(T)}$ – коэффициент теплопроводности. Тогда уравнение теплопроводности (4) с соответствующими начальными и граничными условиями принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + 2a\kappa \frac{\partial T}{\partial x_1}, \tag{6}$$

где $a = \lambda^{(T)} / (\rho c)$ – коэффициент температуропроводности, $\kappa = (1/R_1 + 1/R_2)/2$ – средняя кривизна поверхности. Начальные и граничные условия, соответствующие заданному поверхностному нагружению, запишем в виде:

$$\begin{gathered} -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = A \frac{m^m}{(m-1)!} \left(\frac{t}{t_0}\right)^m \exp\left(-\frac{mt}{t_0}\right), \ t \ge 0, \\ \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=h} = 0, \ t \ge 0, \\ T\big|_{t=0} = T_0, \ 0 \le x_1 \le h, \end{gathered} \tag{7}$$

где $T_0 = \text{const}$ – температура естественного состояния, h – толщина пластины, A – амплитудный параметр, m – импульсный параметр, t_0 – время достижения экстремума подаваемого теплового потока от начала отсчёта.

Введём следующие безразмерные параметры и переменные [2]:

$$\begin{gathered} x_1 = z\sqrt{at_0}, \ t = t_0 \bar{t}, \ \kappa = \frac{\bar{\kappa}}{\sqrt{at_0}}, \ L = \frac{h}{\sqrt{at_0}}, \ \Delta T = T - T_0, \ T^* = \frac{A}{\lambda}\sqrt{at_0}, \\ \Delta T = \Theta T^*, \ \Theta = u e^{-\bar{\kappa} z}, \ M = \frac{m^m}{(m-1)!}, \ Q(\tau) = -M \bar{t}^{\,m} e^{-m\bar{t}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тогда задача (6) – (7) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \bar{\kappa} \dfrac{\partial u}{\partial z}, \ 0 < z < L, \ \bar{t} > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z} - \bar{\kappa} u\right|_{z=0} = Q(\bar{t}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z} - \bar{\kappa} u\right|_{z=L} = 0, \\ u\big|_{\bar{t}=0} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Приведём уравнение (9) к уравнению с однородными граничными условиями введя замену:

$$u\left(z,\bar{t}\right)=\left(\frac{1-L\bar{\kappa}}{L\bar{\kappa}^2}+\frac{z}{L\bar{\kappa}}\right)Q\left(\bar{t}\right)+F\left(z,\bar{t}\right).$$

Тогда относительно $F(z,\bar{t})$ получаем задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \bar{t}}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\bar{\kappa}^2\dfrac{\partial F}{\partial z}-f\left(z,\bar{t}\right),\ \ 0<z<L,\ \bar{t}>0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}-\bar{\kappa}F\Big|_{z=0,L}=0,\ \ F\big|_{\bar{t}=0}=0,\end{cases}\tag{10}$$

где

$$f\left(z,\bar{t}\right)=\left(\frac{1-L\bar{\kappa}}{L}+\frac{\bar{\kappa}z}{L}\right)Q\left(\bar{t}\right)+\left(\frac{1-\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}^2}+\frac{z}{\bar{\kappa}}\right)\frac{dQ}{d\bar{t}}.$$

Для решения уравнение (10), поставим ей соответствующую однородную задачу относительно $\tilde{F}\left(z,\bar{t}\right)$, решение которой будем искать методом разделения переменных [13-15] $\tilde{F}\left(z,\bar{t}\right)=V\left(\bar{t}\right)X\left(z\right)$.Тогда относительно X получаем задачу Штурма – Лиувилля [13-15]:

$$X''-\bar{\kappa}^2X=\gamma X,$$

где γ – собственное число. Обозначим через $D=\bar{\kappa}^2+\gamma$. В случаях когда $D\geq 0$ получаем тривиальные решения, поэтому рассмотрим случай, когда $D<0$. В таком случае решение имеет вид:

$$X\left(z\right)=C_1\cos\sqrt{|D|}z+C_2\sin\sqrt{|D|}z.$$

Подставив это выражение в граничные условия уравнения (10) и упростив выражения, получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}-\bar{\kappa}C_1+\sqrt{|D|}C_2=0,\\ \left(\sqrt{|D|}C_1+\bar{\kappa}C_2\right)\sin\sqrt{|D|}L=0.\end{cases}$$

Предполагаем, что $\sin\sqrt{|D|}L=0$,откуда находим, что $\gamma_k=-\bar{\kappa}^2-\left(\pi k/L\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда система имеет решение $C_1=\sqrt{|D|}=\pi k/L$, $C_2=\bar{\kappa}$, и набор базисных функций имеет вид $X_k\left(\mathrm{z}\right)=\pi k/L\cos\left(\pi kz/L\right)+\bar{\kappa}\sin\left(\pi kz/L\right)$, $k\in\mathbb{N}$. Данный набор не является полным, так как исходная задача имела граничные условия второго рода, поэтому недостающей функцией является $X_0\left(\mathrm{z}\right)=e^{\bar{\kappa}z}$ и соответствующее ей собственное число

$\gamma_0 = 0$ [13-15]. Стоит отметить, что данный набор собственных функций является ортогональным, но не ортономированным.

Решение уравнения (10) имеет вид [13-15]:

$$F\left(z,\bar{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k\left(\bar{t}\right) X_k\left(z\right).$$

Для отыскания V_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, подставляем решение в (10) и получаем систему независимых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$V'_k - \gamma_k V_k + f_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{11}$$

где

$$f_k\left(\bar{t}\right) = \frac{1}{\left\|X_k\right\|^2} \int_0^L f\left(z,\bar{t}\right) X_k\left(z\right) dz, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Решение системы (11) выглядит следующим образом:

$$V_k\left(\bar{t}\right) = \int_0^{\bar{t}} f_k\left(s\right) e^{\gamma_k\left(\bar{t}-s\right)} ds, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для дальнейших выкладок будет удобно пользоваться решением в виде:

$$\Delta T\left(z,\bar{t}\right) = \left(\left(\frac{1-L\bar{\kappa}}{L\bar{\kappa}^2} + \frac{z}{L\bar{\kappa}}\right) Q\left(\bar{t}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k\left(\bar{t}\right) X_k\left(z\right)\right) T^* e^{-\bar{\kappa} z}.$$

Решение уравнения движения

Для получения уравнения относительно σ_{11}, запишем закон Дюамеля – Неймана [2, 10-12] для σ_{11}, σ_{22} и σ_{33}, при этом заметим, что в данном случае σ_{22} и σ_{33} оказались равны:

$$\sigma_{11} = \left(\lambda + 2\mu\right)\varepsilon_{11} - \alpha^{(T)}\left(3\lambda + 2\mu\right)\Delta T,$$
$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} - \alpha^{(T)}\left(3\lambda + 2\mu\right)\Delta T,$$

где $\alpha^{(T)}$ – температурный коэффициент линейного расширения, ε_{11} – деформация вдоль оси Ox_1, λ, μ – константы Ламе. Выразим ε_{11} через σ_{11} и ΔT, подставим в уравнения для σ_{22} и σ_{33}, а так же воспользуемся тем фактом, что $\partial u_1 / \partial x_1 = \varepsilon_{11}$. В результате уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}-2\kappa\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}-\alpha^{(T)}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\Delta T}{\partial x_1}\right)=$$
$$=\rho\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}+\alpha^{(T)}\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\Delta T}{\partial t^2}\right). \tag{12}$$

Воспользуемся обозначениями, предложенными в (8), а так же введём новые [2]:

$$\sigma_{11}=\alpha^{(T)}T^*(3\lambda+2\mu)\sigma,\quad R^2=\frac{a\rho}{(\lambda+2\mu)t_0},$$
$$C=-\frac{2\bar{\kappa}\lambda}{(\lambda+2\mu)R^2},\quad g(z,\bar{t})=-\frac{4\bar{\kappa}\mu}{(\lambda+2\mu)R^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\bar{t}^2}.$$

В итоге задача относительно $\sigma(z,\bar{t})$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial\bar{t}^2}=\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}+C\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}-g(z,\bar{t}),\ \ 0<z<L,\ \ \bar{t}>0,\\ \sigma\big|_{z=0,L}=0,\ \ \sigma\big|_{\bar{t}=0}=0,\ \ \dfrac{\partial\sigma}{\partial\bar{t}}\Big|_{\bar{t}=0}=0.\end{cases} \tag{13}$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде $\sigma(z,\bar{t})=\bar{\sigma}(z,\bar{t})\exp\left(-CR^2z/2\right)$.

После подстановки уравнение примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial\bar{t}^2}=\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial z^2}-\dfrac{C^2R^2}{4}\bar{\sigma}-g(z,\bar{t})\exp\left(\dfrac{CR^2}{2}z\right),\ \ 0<z<L,\ \ \bar{t}>0,\\ \bar{\sigma}\big|_{z=0,L}=0,\ \ \bar{\sigma}\big|_{\bar{t}=0}=0,\ \ \dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{t}}\Big|_{\bar{t}=0}=0.\end{cases} \tag{14}$$

Для решение данного уравнения, поставим соответствующую однородную задачу относительно $\tilde{\sigma}(z,\bar{t})$ и будем искать решение методом разделения переменных в виде $\tilde{\sigma}(z,\bar{t})=W(\bar{t})Y(z)$. Тогда относительно Y получаем задачу Штурма – Лиувилля [13-15]:

$$BY''-\frac{C^2R^2}{4}Y=\omega Y,$$

где ω – собственное число. Дальнешие выкладки аналогичны тем, что были произведены при решении уравнения (10). В итоге

$$\omega_k=-\frac{C^2R^2}{4}-\left(\frac{\pi k}{L}\right)\frac{1}{R^2},\ \ k\in\mathbb{N},$$

$$Y_k(z)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi kz}{L}\right),\quad k\in\mathbb{N},$$

$$g_k(\bar{t}) = \int_0^L g(z,\bar{t}) \exp\left(\frac{CR^2}{2} z\right) Y_k(z)\, dz, \;\; k \in \mathbb{N},$$

$$W_k(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} g_k(s) e^{\omega_k(\bar{t}-s)} ds,$$

$$\sigma(z,\bar{t}) = \exp\left(-\frac{CR^2}{2} z\right) \sum_{k=1}^{\infty} W_k(\bar{t}) Y_k(z) \;. \tag{15}$$

Случай плоской поверхности

В случае, когда средняя кривизна $\kappa = 0$, уравнения (3) и (4) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{16}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_1}{\partial x_1}. \tag{17}$$

Для уравнения теплопроводности (17) будут так же верны обозначения, введённые в (8), за исключением Θ, для которой экспонента обратится в единицу, тем самым изменив последующие подстановки. Решение будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta T(z,\bar{t}) = \left(\left(z - \frac{1}{2L} z^2\right) Q(\bar{t}) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k^*(\bar{t}) X_k^*(z)\right) T^*, \tag{1}$$

где

$$X_k^*(z) = \begin{cases} 1, \;\; k = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi k z}{L}\right), \;\; k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$\gamma_k^* = -\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \;\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$f^*(z,\bar{t}) = \frac{1}{2L} Q(\bar{t}) + \left(z - \frac{1}{2L} z^2\right) \frac{dQ}{d\bar{t}},$$

$$f_k^* = \int_0^L f^*(z,\bar{t}) X_k^*(z)\, dz, \;\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$V_k^*(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f_k^*(s) e^{\gamma_k^*(\bar{t}-s)} ds, \;\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для уравнения движения (16) решение будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma(z,\bar{t})=\sum_{k=0}^{\infty}W_k^*(\bar{t})Y_k(z), \tag{19}$$

где

$$\omega_k^*=-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2,\ \ k\in\mathbb{N},$$

$$g^*(z,\bar{t})=\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Delta T}{\partial t^2},$$

$$g_k^*(\bar{t})=\int_0^L g(z,\bar{t})Y_k(z)dz,\ \ k\in\mathbb{N},$$

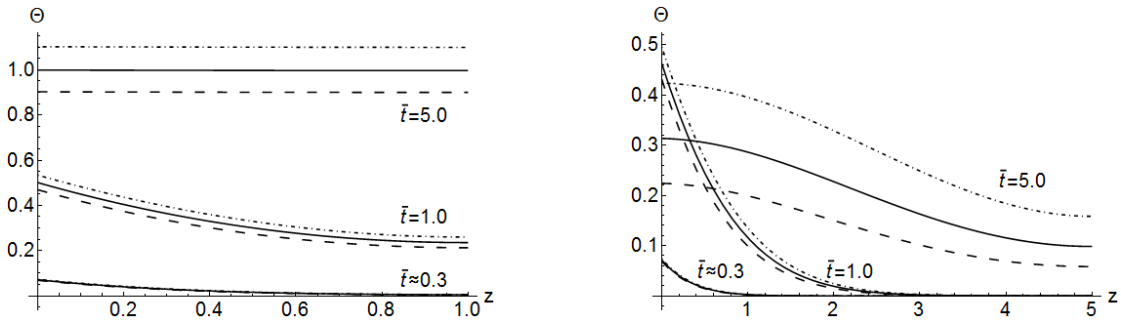
$$W_k^*(\bar{t})=\int_0^{\bar{t}} g_k^*(s)e^{\omega_k^*(\bar{t}-s)}ds,\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Можно заметить, что для уравнения движения базисные функции не изменились.

Анализ решений

На всех рисунках ниже сплошная линия соответствует случаю плоской поверхности, штриховая случаю $\bar{\kappa}=0.1$, штрихпунктирная случаю $\bar{\kappa}=-0.1$. Параметр $m=2$.

На рисунке 1 представлены распределения безразмерной температуры Θ по координате z в различные моменты времени $\bar{t}$ в пластинах разной толщины L. Видно, что при положительной средней кривизне значения температуры ниже, а при отрицательной наоборот выше, чем в случае плоской поверхности.



а) б)

Рис. 1. Распределение температуры по глубине в различные моменты времени в пластинах разной толщины L; а) $L=1$; б) $L=5$;

На рисунке 2 представлены сравнения решений при различных параметрах R^2, толщина пластины принята $L=5$. При увеличении параметра R^2 скорость

распространения волны напряжений заметно уменьшается, но при этом возрастает амплитуда. Как и в случае температур при положительной средней кривизне получаемый результат в среднем меньше по модулю, а при отрицательной наоборот больше, чем в случае плоской поверхности.

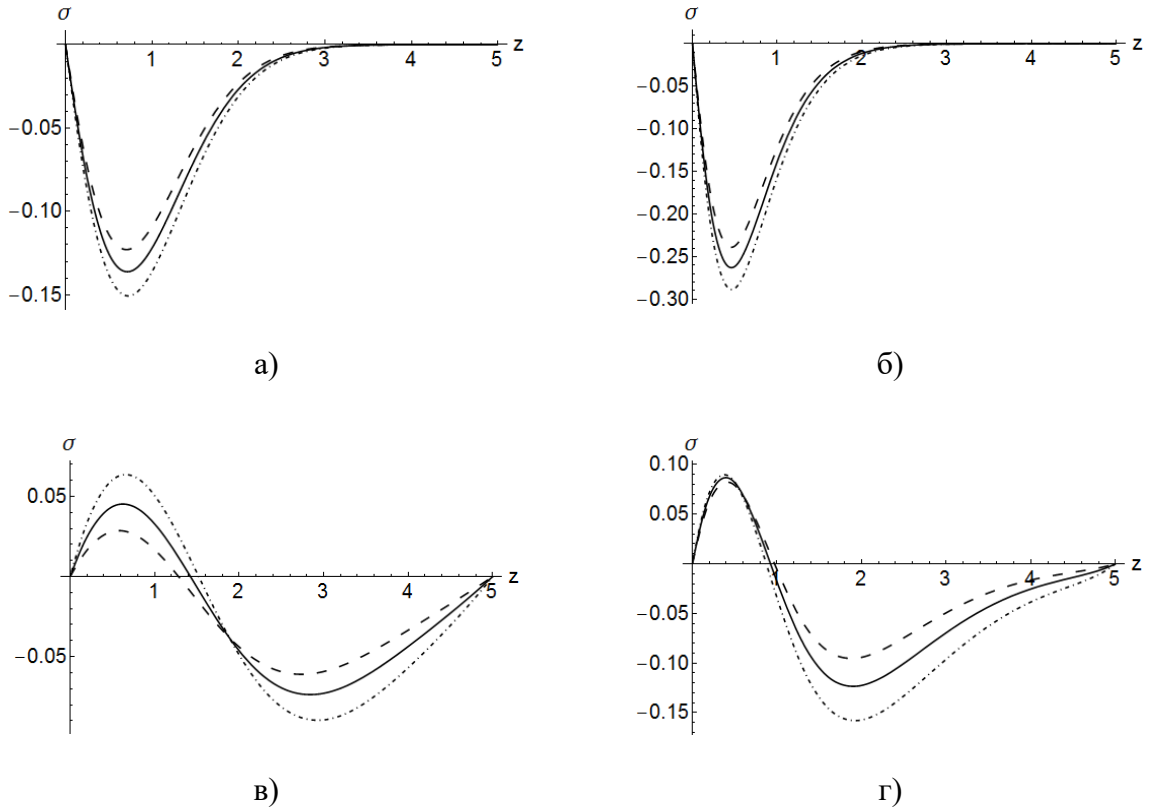


Рис. 2. Распределение напряжений при $R^2 = 1$ (а, в) и $R^2 = 5$ (б, г) при $\bar{t} = 0.5$ (а, б) и $\bar{t} = 2$ (в, г).

Заключение

В статье получены аналитические зависимости для нахождения температуры и напряжений в среде с учётом средней кривизны поверхности, а также конечной толщины методом разделения переменных. Показано, что учёт средней кривизны, как и учёт толщины могут оказывать существенное влияние на распределение температуры и напряжений в среде.

Список литературы

[1]. Савельева И.Ю. Динамические температурные напряжения в упругом теле с криволинейной границей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 38-46. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-38-46

[2]. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.

[3]. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 181 с.

[4]. Golovin N.N., Kuvyrkin G.N. Problem of numerical modeling of the temperature and stress field in the structures of SFRE nozzle blocks // Journal of Eng. Physics and Thermophysics, 2000. V.73, Issue 1. Pp.145- 154.

[5]. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes in aircraft structures // Journal of Eng. Physics and Thermophysics, 2000. V.73, Issue 1. Pp.138-144.

[6]. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical models of thermomechanics of a relaxing solid // Mechanics of Solids, 2012, 47 (2). Pp.252-260.

[7]. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical Modeling of Thermomechanical Processes under Intense Thermal Effect // High Temperature. Vol.41, No 2. 2003. Pp. 257-265.

[8]. Savel'Eva, I.Yu., Zhuravskii, A.V. Modeling of thermal processes during vapor deposition of material on curvilinear surface // 2017 Journal of Physics: Conference Series.

[9]. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Моделирование температурных полей в твердом теле при поверхностном нагреве // Тепловые процессы в технике, 2009. Т.1, № 9. С. 375-380.

[10]. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

[11]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

[12]. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

[13]. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Математика в техническом университете. В 21 т. Т. 12. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

[14]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Московского университета, 1977. 735 с.

[15]. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.