электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова"
ISSN 2307-0609

 # 01, март 2020

УДК 621.86.01

Математическая модель трёхзвенного манипулятора

Андреев Е.В., *студент,*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Подводные аппараты и роботы»
edirab@yandex.ru

Научный руководитель: Минеев А.Б., ст. преподаватель,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедра «Инженерная графика»
mineev30@yandex.ru

Аннотация: В данной статье показан пример разработки математической модели трёхзвенного манипулятора на основе имеющегося реального устройства. Проведён анализ кинематики механизма и составлены кинематические уравнения. Показано решение прямой задачи кинематики для манипуляционного робота. Описана на примере неоднозначность определения положений звеньев при известных координатах цели. Предложен способ устранения неоднозначности и приведено решение обратной задачи кинематики с использованием геометрического метода. Определена минимальная грузоподъёмность устройства и проведено исследование его нагрузочной способности.

Ключевые слова: манипуляционный робот (manipulative robot), прямая задача кинематики (direct kinematic problem), обратная задача кинематики (inverse kinematic problem), 3D-печать (3D-printing), 3D-моделирование (3D-modeling).

Введение

В настоящее время в различных областях промышленности применяются промышленные манипуляционные роботы [1,2], используемые для выполнения широкого спектра технологических задач. Основным типом манипуляционных систем роботов являются механические манипуляторы [3].

Они представляют собой сложный электромеханический объект, обладающий рядом особенностей. Во-первых, манипуляционные роботы (МР) отличаются сложной кинематической структурой [4], содержащей множество независимых либо взаимосвязанных звеньев. Во-вторых, изменение положения последних в пространстве

оказывает влияние на физические силы, действующие на манипулятор. В-третьих, существует необходимость синхронного управления большим числом двигателей [5].

В связи с наличием указанных особенностей, для внедрения МР в производственный процесс требуется специально разрабатываемые системы управления [6]. Они служат для организации взаимодействия между человеком-оператором и МР, и обеспечивают выполнение процессов, необходимых для автоматизации технологической операции.

Целью данной работы является создание математической модели трёхстепенного манипулятора.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– составить кинематическую схему устройства;

– предложить способы решения неоднозначности определения положения для прямой и обратной задач кинематики;

– составить уравнения динамики для каждого звена;

– вычислить максимальную грузоподъёмность в худшем случае с учётом параметров используемых сервоприводов.

***

Система управления (СУ) строится на основе математической модели устройства. В свою очередь, для составления математической модели трёхзвенного манипулятора и дальнейшего построения системы управления, необходимо решить прямую и обратную задачи кинематики [7]. Прямая задача состоит в определении положения выходного звена манипулятора (рабочего органа) по заданным углам поворота звеньев. Кинематическая схема с введённой системой координат показана на рисунке 1.

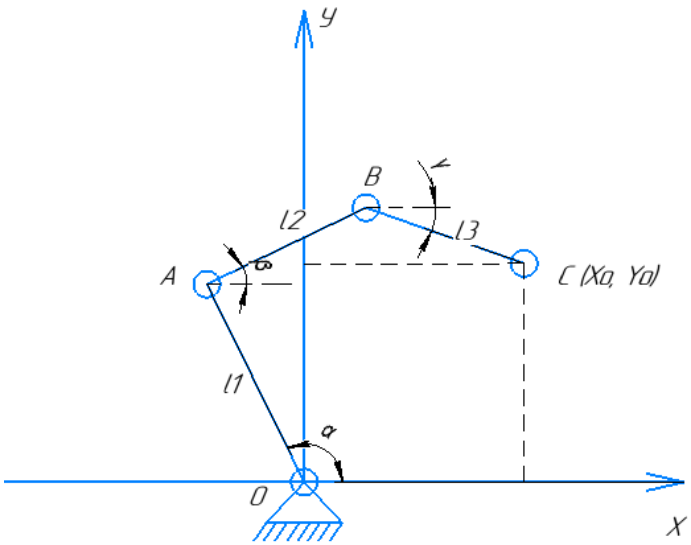

Рис. 1. Кинематическая схема манипулятора

Определим координаты каждого узла (A, B или C) в зависимости от положения связанных с ним звеньев. Для этого последовательно найдём проекции узлов звеньев на соответствующие оси.

$$\begin{cases} x_A = OA\cos\alpha \\ y_A = OA\sin\alpha \end{cases} => \begin{cases} x_B = x_A + AB\cos\beta \\ y_B = y_A + AB\sin\beta \end{cases} => \begin{cases} x_C = x_B + BC\cos\gamma \\ y_C = y_B + BC\sin\gamma \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} x_C = OA\cos\alpha + AB\cos\beta + BC\cos\gamma, \\ y_C = OA\sin\alpha + AB\sin\beta + BC\sin\gamma. \end{cases}$$

Как видим, прямая задача кинематики не представляет никаких сложностей.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Система уравнений, приведённая выше, состоит из двух уравнений, в состав которых входят три переменных. В отличие от двухзвенного манипулятора, решение ОЗК для данного случая приводит к некоторой неоднозначности. Поясним на примере (рисунок 2).

На рисунке 2 показано альтернативное положение звеньев (OA’B’C), позволяющее занять желаемое положение. Для наглядности оставлены вспомогательные дуги, демонстрирующие последовательность построения. Причина заключается в том, что звено AB способно совершать плоское движение, в отличие от других звеньев. В этой неоднозначности и заключается сложность в разработке математической модели и построении СУ.

Проанализируем указанные два произвольных положения. На рисунке 2 звёздочками отмечены условные центры тяжести каждого звена. Очевидно, что исходное положение OABC выгоднее с точки зрения энергетики, точности и грузоподъёмности, нежели OA’B’C’, поскольку на приводы, расположенные в основании, приходится максимальная нагрузка.

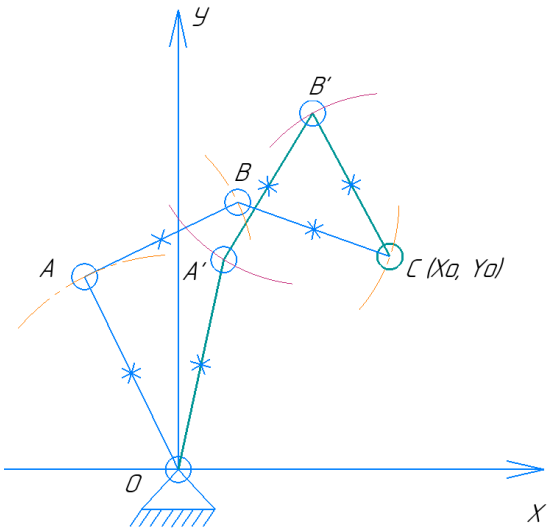

Рис. 2. Пояснение к неоднозначности решения ОЗК для трёхзвенного манипулятора

Дальнейшую проработку будем осуществлять на реальном объекте, спроектированном в программе Solidworks 2016 [8] и изготовленном с помощью 3D-печати (рисунки 3 и 4). Геометрические характеристики звеньев приведены в таблице 1.

Таблица 1

Длины звеньев

Звено	Величина, мм
l1	100
l2	80
l3	67,5

Для упрощения пренебрежём высотой основания.

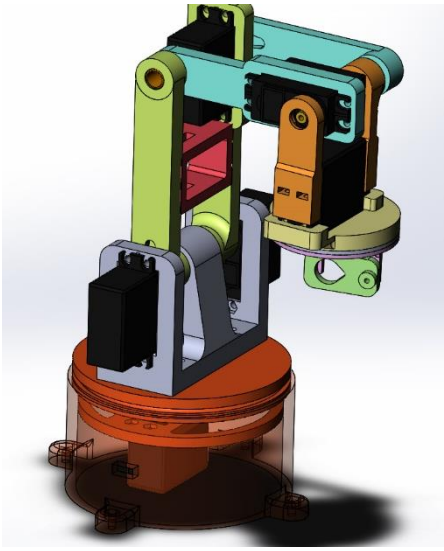

Рис. 3. Сборка в САПР Solidworks

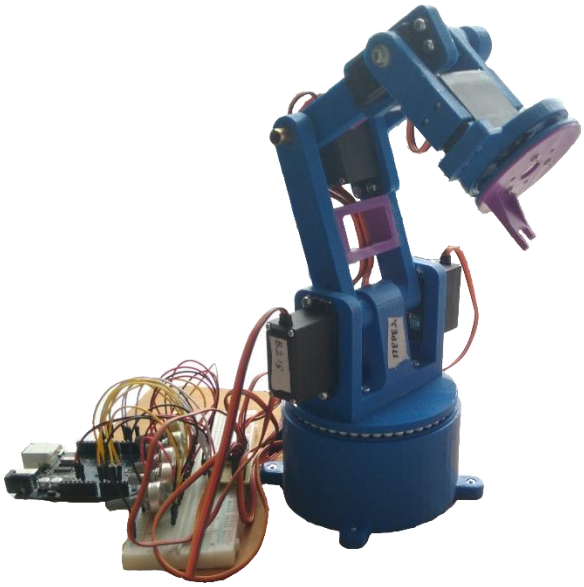

Рис. 4. Исследуемая модель

Как было указано выше, в силу наличия неоднозначности, необходимо ввести некоторое дополнительное условие, которое позволило бы однозначно определить положение выходного звена в любой момент времени. На рисунке 5 показан «захват сверху», при котором последнее звено BC расположено перпендикулярно плоскости стола. Если объект будет расположен правее, то дальнейшее «растяжение» будет производиться с учётом наклона звена BC к плоскости горизонта. В случае, когда объект находится левее, звено BC всегда будет перпендикулярно. Это допустимо, поскольку $l2 + l3 > l1$ (см. табл. 1). Расстояние OC определено экспериментально и составляет 140 мм.

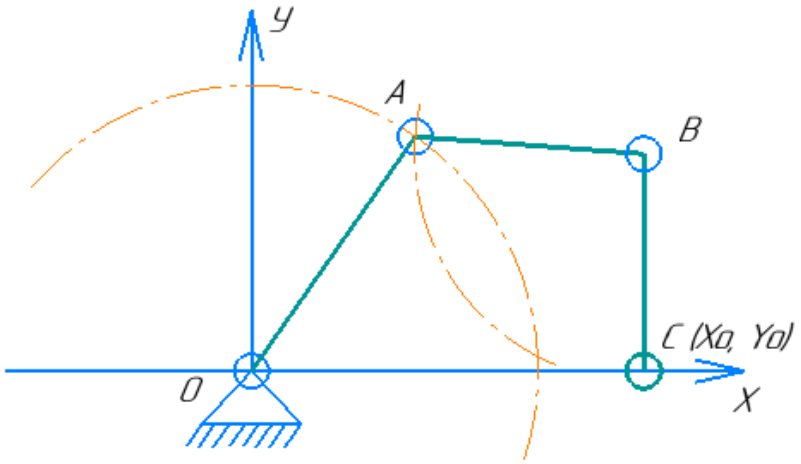

Рис. 5. Крайнее положение захвата «сверху»

Таким образом, итоговые уравнения, полученные при решении ПЗК, примут вид:

1. Если расстояние OC меньше или равно 140 мм:

$$\begin{cases} x_C = OA\cos\alpha + AB\cos\beta + 0, \\ y_C = OA\sin\alpha + AB\sin\beta + BC, \end{cases}$$

поскольку $\gamma = 90°$ (см. рис. 5 и рис. 1).

2. Если расстояние OC больше 140 мм:

$$\begin{cases} x_C = OA\cos\alpha + AB\cos\beta + BC\cos\gamma, \\ y_C = OA\sin\alpha + AB\sin\beta + BC\sin\gamma. \end{cases}$$

Покажем, как получить значения углов для обоих случаев. Для этого воспользуемся некоторыми геометрическими соображениями [9, 10]. В случае 1 рассмотрим рисунок 6. Для звена OA необходимо определить углы ϑ и φ, которые в сумме составляют угол α, а для звена AB – угол β. Рассмотрим два прямоугольных треугольника OAN и ABN. Составим выражения по теореме Пифагора:

$$\begin{cases} h^2 = AB^2 - (OB - ON)^2, \\ h^2 = OA^2 - \mathrm{ON}^2. \end{cases}$$

Выразим h и приравняем выражения, сократим подобные и выразим отрезок ON. Получим:

$$ON = \frac{OA^2 - AB^2 + OB^2}{2 \cdot OB}.$$

При этом длина отрезка OB известна, так как известны координаты точки C и положение звена *l3*: $OB = \sqrt{OC^2 + BC^2}$. Таким образом, $\varphi = \arccos\frac{ON}{OA}$ и $\vartheta = \operatorname{arc}tg\frac{BC}{OC}$.

Итоговый угол, определяющий положение звена *l3* вычисляется как $\alpha = \varphi + \vartheta$.

Угол β наклона звена AB к плоскости горизонта равен: $\beta = -\operatorname{arcctg}\frac{|x_B - x_A|}{|y_B - y_A|}$.

Отметим, что угол α изменяется в пределах от 0° до 180°, в то время как угол β – в диапазоне от -90° до 0°, если за положительно направления принимается поворот против часовой стрелки. Последнее ограничение не позволит манипулятору занять положение OA'BC (рисунок 6).

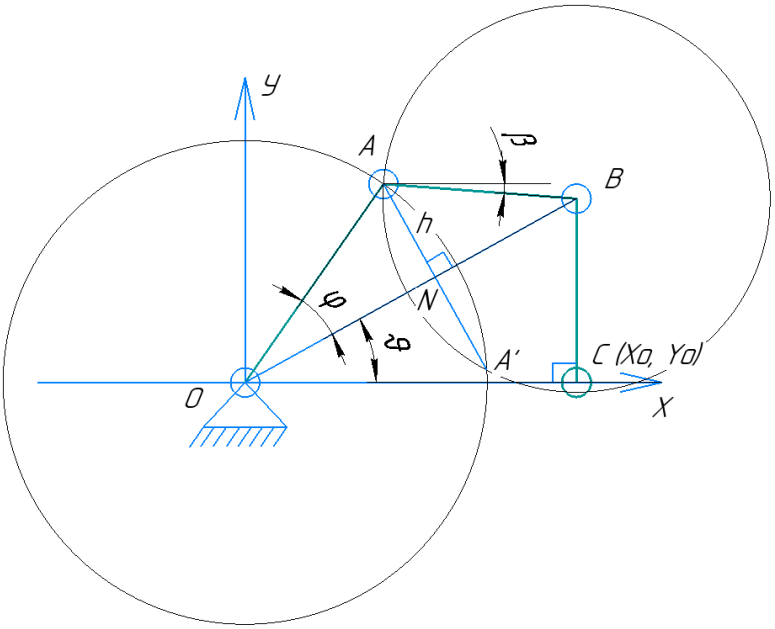

Рис. 6. Пояснение к решению ПЗК

Решение системы 1 во втором случае, когда расстояние OC больше 140 мм, не может быть осуществлено стандартными алгебраическими методами, поскольку система по-прежнему содержит лишь два уравнения и три неизвестных. Предлагается использовать численный метод со следующим алгоритмом [11]:

1. Задать углу γ декремент в 1°.

2. Вычислить координаты точки B.

3. Если расстояние OB больше суммы радиусов, то перейти снова к пункту 1.

4. Решить систему (1) как в первом случае с учётом подобранного угла γ.

Данный алгоритм позволит минимизировать нагрузку, оказываемую на приводы основания, поскольку центры масс звеньев будут как можно ближе к вертикальной оси вращения манипулятора. А следовательно, точностные характеристики будут наилучшими.

На следующем этапе проработки математической модели необходимо определить величину нагрузки, которую манипулятор способен перемещать и удерживать, а также её зависимость от совокупного положения звеньев и их геометрических параметров.

Ключевым элементов любого подобного устройства является сервопривод – электромеханический привод, способный занять и удерживать требуемое положение. Характеристики сервопривода MG995 [12], использованного в данной конструкции, приведены в таблице 2.

Таблица 2

Характеристики сервопривода MG995

Параметр	Величина
Рабочее напряжение	4.8-7.2 В
Угол поворота	120 градусов
Крутящий момент	5 кг/см (при 5 В),
Скорость	0,20 с/60° (при 5 В)
Вес	55 г

По аналогии с уравнениями кинематики, составим уравнения динамики манипулятора для каждого звена и объединим их в систему.

$$\begin{cases} M_B = (m_н + m_{ск}) \cdot g \cdot BC \cos\gamma, \\ M_A = (m_н + m_{ск}) \cdot g \cdot (BC\cos\gamma + AB\cos\beta) + m_{ск} \cdot g \cdot AB\cos\beta, \\ M_0 = (m_н + m_{ск}) \cdot g \cdot (BC\cos\gamma + AB\cos\beta + OA\cos\alpha) + \\ + m_{ск} \cdot g \cdot (AB\cos\beta + OA\cos\alpha) + m_{ск} \cdot g \cdot OA\cos\alpha, \end{cases}$$

где

M_A, M_B и M_C – момент относительно каждой из осей;

OA, AB и BC – длины соответствующих звеньев согласно таблице 1;

g – ускорение свободного падения;

$m_н$ – масса нагрузки;

$m_{ск}$ – масса сервопривода и крепежа (определена экспериментально).

При составлении системы (2) было принято некоторое допущение: сила тяжести, действующая на сервопривод и крепёжные элементы (4 винта M3x16 с соответствующими

гайками), была перенесена в точку, лежащую на оси, относительно которой этот сервопривод совершает работу (рисунок 7). Допущение применимо, поскольку реальное положение центра масс сервопривода является трудно определимым. На рисунке 8 показано типовое внутреннее устройство привода. Основной вклад в массу устройства вносит электродвигатель, который, как легко заметить, расположен в противоположной стороне от выходного вала, следовательно, реальный центр масс будет смещён ближе к геометрическому центру звена. Данное допущение позволяет существенно упростить выражения системы (2).

Также опустим составляющую силы трения в сочленениях звеньев, поскольку в местах соединения установлены подшипники скольжения [13, 14]. Подшипники скольжения не обладают моментом страгивания, что положительно влияет на динамические точностные характеристики (уменьшается перерегулирование и динамическая ошибка) системы управления.

Рис. 7. Звено 1 с показанной осью вращения

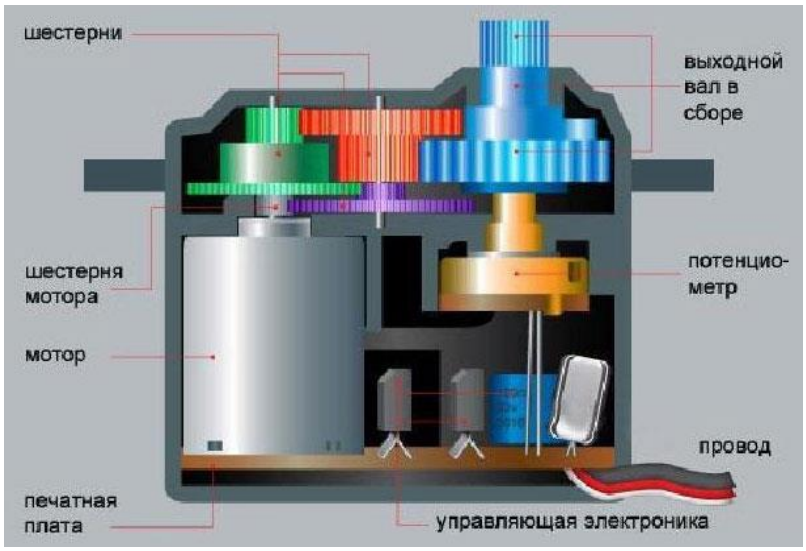

Рис. 8. Типовое внутреннее устройство сервопривода

Определим моменты, которые могут развивать сервоприводы относительно каждого звена:

$$\begin{cases} M_B = 5кг/см = 0,5\ Н\cdot м, \\ M_A = 5кг/см = 0,5\ Н\cdot м, \\ M_0 = 10кг/см = 1\ Н\cdot м. \end{cases}$$

Момент M_o больше, поскольку в основании установлены два привода (см. рис 3 и рис. 4). Исследуем поведение объекта в крайнем (максимально растянутом) положении. Для этого в уравнении (2) положим углы равными 0°, тогда косинусы станут равными единице. Рассмотрим выражение для M_o как наиболее информативное:

$$M_0 = (m_н + m_{ск})\cdot g\cdot(BC + \mathrm{AB} + OA) + m_{ск}\cdot g\cdot(BC + \mathrm{AB}) + m_{ск}\cdot g\cdot OA.$$

Подставив числовые данные из табл. 1 и табл. 2, получим:

$$1 = (m_н + 0,06)\cdot 9,81\cdot 0,2475 + 0,06\cdot 9,81\cdot 0,18 + 0,06\cdot 9,81\cdot 0,1.$$

$m_н = 0,284 = 284\ г$ – минимальная грузоподъёмность манипулятора.

Также интерес представляет зависимость минимальной нагрузки от длин звеньев. На рисунке 9 приведён график, согласно которому при равномерном уменьшении каждого из звеньев на 40 мм наихудшая грузоподъёмность увеличится с 284 г до 675 г.

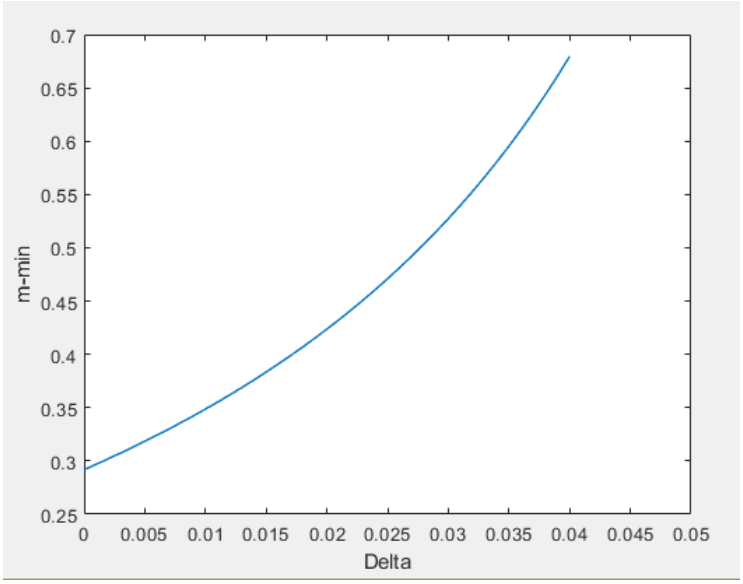

Рис. 9. График зависимости грузоподъёмности от величины уменьшения длин звеньев

Как можно заметить, кривая имеет нелинейный характер, несмотря на то что момент силы от нагрузки есть полностью линейная величина. Это связано с наличием дополнительного момента от $m_{ск}$, который входит в виде свободного слагаемого в (3). Читателю может быть полезно ознакомиться с кодом программы на языке Matlab [15] для построения подобного графика, код приведен в таблице 3.

Таблица 3

Код программы на языке Matlab для построения графика зависимости грузоподъёмности от величины уменьшения длин звеньев

```
% масса сервопривода и крепежа
m_servo = 0.06;

% длины звеньев
l1 = 0.1;
l2 = 0.08;
l3 = 0.0675;

g = 9.81;

% углы (в градусах)
alpha = 0;
beta = 0;
gamma = 0;

% Моменты
M_B = 0.5;
M_A = 0.5;
M_0 = 1;

syms m;

count = 1;
n = zeros(1, 11);
for s = 0:0.001:0.04
    L1 = l1 -  s;
    L2 = l2 - s;
    L3 = l3 - s;

    z = solve(-M_0 + (m_servo + m)*g*(L3+L2+L1) +...
    m_servo*g*(L2+L3)+...
    m_servo*g*L1)';

    n(count) = double(z);
    count = count + 1;
end

delta = 0:0.001:0.04;
plot(delta, n, 'LineWidth',1)

xlabel('Delta');
ylabel('m-min');
xlim([0 0.05]);
```

Заключение

Итогом проделанной работы является математическая модель исследуемого манипуляционного робота, выраженная уравнениях динамики и кинематики, которые

позволяют определить положения всех звеньев (и как следствие, управляющие сигналы на приводы) в любой момент времени, а также нагрузку, оказываемую на них. Также был построен график, отражающий зависимость наименьшей грузоподъёмности от длин звеньев.

Разработанная математическая модель проста и может быть использована как основа для построения в дальнейшем более сложных систем. Модель удобна для исследования основных принципов работы манипуляторов в целом и построения примитивных алгоритмов запрограммированного движения в обучающих целях. Учёт иных факторов, таких как моменты трения в соединениях, момент страгивания электродвигателя, а также трение зубчатых передач редукторов сервоприводов не существенен, поскольку точностные характеристики данного манипуляционного робота сильно ограничены точностью выбранных сервоприводов.

Список литературы

[1]. Анализ современного состояния применения роботов в промышленности // Википедия: сайт. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Промышленный_робот (дата обращения: 09.09.2019).

[2]. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. М.: Машиностроение. 1988. 392 с.

[3]. А. Г. Схиртладзе, В. И. Выходец, Н. И. Никифоров Классификация и структура промышленных роботов. Режим доступа: http://tmm-umk.bmstu.ru/lectures/lect_19.htm (дата обращения: 09.08.2019).

[4]. Кинематические схемы манипуляторов // Строительная техника: справочник. Режим доступа: http://stroy-technics.ru/article/kinematicheskie-skhemy-manipulyatorov (дата обращения: 09.03.2019).

[5]. Р. А. Мирзаев, Н. А. Смирнов Система автоматического управления сервоприводами. Вестник СибГАУ. №1, 2014. С. 161.

[6]. А.С. Климчик Р.И. Гомолицкий. Разработка управляющих программ промышленных роботов, Минск, 2008. 131 с.

[7]. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. Теоретические основы робототехники. Т.1. М.: Наука, 2006. 383 с.

[8]. Мюррей Д. Solidworks. М.: ЛОРИ, 2018. 712 с.

[9]. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990. 592 с.

[10]. Древовидная модель робота на основе твёрдых тел // MathWorks: сайт. Режим доступа: https://www.mathworks.com/help/robotics/ug/rigid-body-tree-robot-model.html (дата обращения: 09.10.2019).

[11]. Юревич Е.И. Управление роботами и робототехническими системами. СПб, 2000. 171 с.

[12]. Характеристики сервопривода MG995 // Тридиай: сайт. Режим доступа: https://3d-diy.ru/wiki/arduino-mechanics/servo-mg995/ (дата обращения: 09.10.2019).

[13]. Тищенко О.Ф. Элементы приборных устройств. Часть 1. Детали, соединения и передачи. М.: Высшая школа, 1980. 300 с.

[14]. Бондаренко Л.Н., Демин Г.К. Момент трения в подшипниках скольжения. Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, 2016, № 9. 222 с.

[15]. Егоренков. Д.Л., Фрадков А.Л., Харламов В.Ю. Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке Matlab. СПб.: БГТУ, 1994. 190 с.