электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова"
ISSN 2307-0609

 # 01, июнь 2021

УДК 531.31:532.58

Рикошет тела от поверхности воды

Кушнев Д. В., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ),
кафедра «Электронные технологии в машиностроение»
kushnevdv@student.bmstu.ru

Научный руководитель: Калиниченко В. А., д.ф.-м.н. профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ),
кафедра «Теоретическая механика»
vakalin@mail.ru

Аннотация: Построена траектория рикошетирующего тела в приближении динамики материальной точки. Определена критическая скорость необходимая для рикошета, а также время соударения тела с водой. Найдена зависимость числа рикошетов от начальной скорости. Выявлена определяющая роль гироскопического эффекта на движение рикошетирующего тела, а также приведены результаты опытов, подтверждающие это. Взаимодействие точки с поверхностью моделируется косым ударом точки о «шероховатую» поверхность по гипотезе Рауса.

Ключевые слова: Рикошет, подъемная сила, сопротивление, коэффициент восстановления, гироскопический эффект, динамика материальной точки, удар точки о шероховатую поверхность.

Введение

Настоящая работа посвящена рикошету тел от воды, причем под рикошетом понимается отражённое движение какого-либо тела, ударившегося под небольшим углом к поверхности воды. Это, на первый взгляд, простое явление нашло применение в разных областях техники, в военном деле, а также в спорте.

Так, например, на рикошете основана конструкция «прыгающих» бомб, успешно использованных британскими войсками при бомбардировке плотин во время второй мировой войны [1]. Рикошет применяют в артиллерии для поражения разного рода целей [2]. Космические аппараты рикошетируют при первичном входе в атмосферу для гашения скорости перед приземлением [3]. Водяной рикошет глиссеров и гидросамолетов при

посадке на воду опасен при эксплуатации и рассматривается как крайне нежелательное явление [4]. В приложении к задачам глиссирования теория водяного рикошета, основанная на методах механического подобия, разработана в [5].

Процесс многократного рикошета тела от поверхности воды можно разбить на две повторяющиеся стадии – движение по баллистической траектории в воздухе и ударное взаимодействие с жидкостью. В настоящее время имеется ряд теоретических [6-8] и экспериментальных [9-11] работ, в которых исследовалась вторая стадия рикошета (взаимодействие тела с водой). Отметим отсутствие публикаций, посвященных изучению полной траектории рикошетирующего тела. Цель настоящей работы состоит в оценке гироскопического эффекта и в построении траектории тела в приближении динамики материальной точки.

1. Модель взаимодействия тела с водой

Воспользуемся подходом [6-8] и рассмотрим взаимодействие тела с водой. Отметим, что в рамках указанных моделей не учитываются процессы формирования струй и последующего каплеобразования.

На тело действуют (рисунок 1) сила тяжести, а также реакция со стороны воды, которая пропорциональна квадрату скорости V, площади соприкосновения S_{im}, плотности жидкости ρ, а также C_l - коэффициенту подъёмной силы, C_f - коэффициенту лобового сопротивления, данные коэффициенты в общем случае зависят от угла атаки θ. Эту силу реакции можно разложить на две составляющие: нормальную и касательную к поверхности воды.

$$\vec{F} = \frac{1}{2} C_l \rho V^2 S_{im} \vec{n} + \frac{1}{2} C_f \rho V^2 S_{im} \vec{\tau} \, .$$

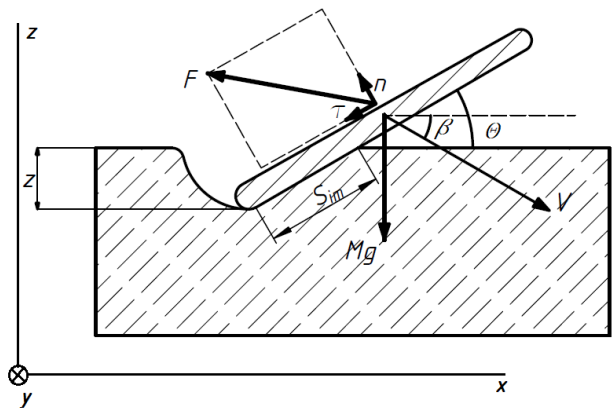


Рис. 1. Расчётная схема взаимодействия тела с водой

Составим уравнение движения в проекциях на оси z и x (рисунок 1).

$$\begin{cases} M\dfrac{dV_x}{dt} = -\dfrac{1}{2}\rho V^2 S_{im}\left(C_l \sin\theta + C_f \cos\theta\right) & (1а) \\ M\dfrac{dV_z}{dt} = -Mg + \dfrac{1}{2}\rho V^2 S_{im}\left(C_l \cos\theta - C_f \sin\theta\right). & (1б) \end{cases}$$

Для дальнейших расчётов необходимо сделать следующие допущения: угол θ – мал и в процессе соударения не изменяется; считаем постоянными S_{im} и коэффициенты C_l и C_f; $V_{0z}^2 \ll V_{0x}^2 \approx V^2$. Учитываем также, что $V_z = dz/dt$, где z – глубина погружения тела.

1.1. Тело квадратного сечения

Будем полагать, что тело имеет квадратное сечение со стороной а. Тогда площадь соприкосновения с поверхностью $S_{im} = a|z|/\sin\theta$.

Уравнение (1б) после преобразований принимает следующий вид

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = -Mg + \frac{1}{2}\rho {V_{0x}}^2 C\frac{az}{\sin\theta}, \qquad (2)$$

где $C = C_l \cos\theta - C_f \sin\theta$, $|z| = -z$ $(z < 0)$.

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g, \qquad (3)$$

где $\omega_0^2 = \rho {V_{0x}}^2 Ca/2M \sin\theta$ – циклическая частота.

Решение дифференциального уравнения (3) с учётом граничных условий $z(t) = z(0) = 0$, $\dot{z}(t) = \dot{z}(0) = V_{0z} < 0$, имеет вид:

$$z(t) = -\frac{g}{{\omega_0}^2} + \frac{g}{{\omega_0}^2}\cos\omega t + \frac{V_{0z}}{\omega_0}\sin\omega t. \qquad (4)$$

Из условия $z(t) = 0$, находим время соударения $t_{\text{соуд}} = 2\pi/\omega_0$.

Исследуем функцию (4) на максимум, находим:

$$|z_{max}| = \frac{g}{{\omega_0}^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 V_{0z}}{g}\right)^2}\right]. \qquad (5)$$

Отскок тела от поверхности воды возможен при выполнении условия $|z_{max}| < a\sin\theta$, в противном случае тело утонет. Учитывая данное ограничение, из (5) получим:

$$V_{0x} > V_c = \sqrt{4Mg/C\rho a^2}/\sqrt{1 - 2Mtg^2\beta/a^3 C\rho \sin\theta},$$

где $\beta = \text{arctg}(V_{0z}/V_{0x})$, а V_c – критическая скорость необходимая для рикошета.

Для параметров задачи выберем следующие значения:

$$M = 0.1 \text{ кг}; a = 0.1 \text{ м};\ C_l \approx C_f \approx 1;\ \rho = 1000\ \text{кг/м}^3; \beta \approx \theta \approx 10\,°.$$

Тогда критическая (минимальная) скорость и время соударения соответственно равны:

$$V_c \approx 0.71\ \text{м/с},\ t_{\text{соуд}} \approx 0.16\ \text{с}.$$

1.2. Потеря энергии после соударения

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$W = \frac{MV_{x1}^2}{2} - \frac{MV_{x0}^2}{2} = -\int_0^{t_{\text{соуд}}} F_x(t)V_x(t)dt\,. \qquad (6)$$

Где V_{x0} и V_{x1} – значения скорости тела до и после соударения; $F_x(t) = \frac{1}{2}\tilde{C}\rho v^2 S_{im}$ – сила сопротивления; $\tilde{C} = C_l \sin\theta + C_f \cos\theta$ – соответствующий коэффициент сопротивления.

В качестве первого приближения предполагаем:

$$\int_0^{t_{\text{соуд}}} F_x(t)V_x(t)dt \approx V_{x0}\int_0^{t_{\text{соуд}}} F_x(t)\,dt \qquad (7)$$

Пусть:

$$\mu = \tilde{C}/C.$$

Тогда:

$$F_x = \mu F_z. \qquad (8)$$

Среднее значение вертикальной силы с учётом (5) и (2):

$$\langle F_z(t)\rangle = \frac{1}{t_{\text{соуд}}}\int_0^{t_{\text{соуд}}} F_z(t)\,dt = Mg. \qquad (9)$$

Из (9) и (8) следует, что: $\langle F_x(t)\rangle = \mu Mg$.

Тогда из (7) и (6) получаем, что изменение кинетической энергии:

$$W \approx \mu MgV_{0x}\frac{2\pi}{\omega_0} = \mu Mgl,$$

где $l = V_{0x} \cdot 2\pi/\omega_0$.

При многократном N рикошетировании имеем:

$$\frac{MV_x^2(N)}{2} - \frac{MV_x^2(0)}{2} = -\mu NMgl.$$

Полагая, что кинетическая энергия после последнего соударения стала равна нулю, находим зависимость количества рикошетов от начальной скорости:

$$N \approx \frac{MV_x^2(0)}{2\mu Mgl}.$$

Для $M = 0.1$ кг; $a = 0.1$ м; $C_l \approx C_f \approx 1$; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\beta \approx \theta \approx 10°$ параметр принимает следующее значение $\mu = 1.4$. Соответствующее значение N при различных начальных скоростях тела приведены в таблице ниже.

Таблица 1

Начальная скорость и количество рикошетов

Начальная скорость, V_{x0}, м/с	Количество рикошетов, N, шт.
5	6
8	17
12	38

Из (6) следует, что:

$$\frac{MV_{x0}^2}{2} > |W| = \mu Mgl.$$

Это накладывает ещё одно ограничение на начальную скорость.

$$V_{0x} > V_c = \sqrt{2\mu gl}.$$

Используя значения ранее приведённых параметров, получаем $V_c \approx 2$ м/с. Таким образом, необходимая для рикошета критическая скорость тела увеличивается в 3 раза.

2. Гироскопический эффект

Выше полагалось, что угол нутации θ при взаимодействии с водой есть величина постоянная – рисунок 2. Эксперименты [9] показали, что необходимым условием многократного рикошетирования является вращение тела вокруг оси симметрии. В [9] приведена серия фотографий, из которых следует, что при отсутствии вращения тело при соударении зарывалось в воду передней кромкой и тонуло под действием момента $M_\theta = F_n OP$.

Для оценки гироскопического момента запишем динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta} + (I_1 - I_0)\dot{\varphi}\omega_x = M_\theta. & (10а) \\ I_1\dot{\omega}_x + (I_0 - I_1)\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0. & (10б) \end{cases}$$

где I_0и I_1 - моменты инерции относительно осей n и τ соответственно.

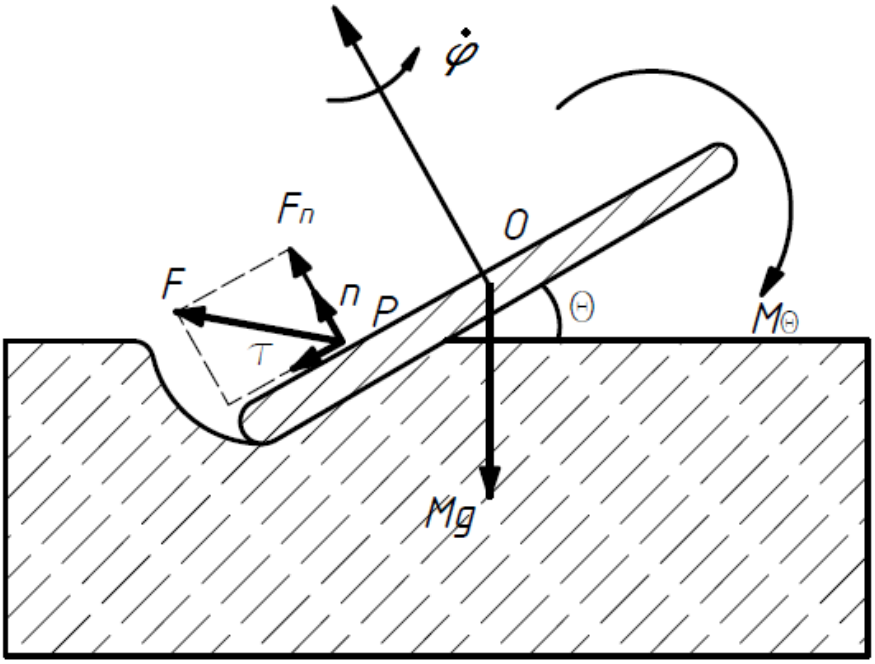


Рис. 2. Расчётная схема для гироскопического эффекта

Из (10б):

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{I_1 - I_0}{I_1}\dot{\varphi}_0\dot{\theta}.$$

Считая $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = const$, получаем

$$\omega_x = \frac{I_1 - I_0}{I_1}\dot{\varphi}_0(\theta - \theta_0). \qquad (11)$$

Тогда из (10а) и (11):

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_0) = \frac{M_\theta}{I_1}.$$

где $\omega = \dot{\varphi}_0\,(I_0 - I_1)/I_1$.

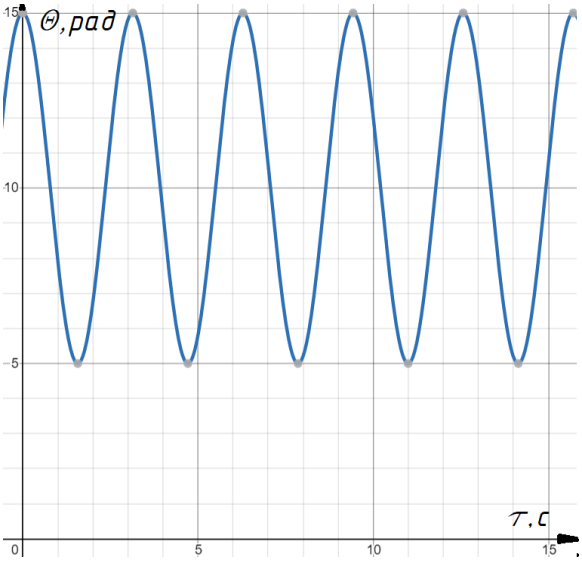
Решая данное дифференциальное уравнение:

Если $\dot{\varphi}_0 = 0$: $\theta = -\frac{M_\theta t^2}{2I_1} + \theta_0$.

Если $\dot{\varphi}_0 \neq 0$: $\theta = -\frac{2M_\theta}{I_1\omega^2}sin^2\frac{\omega t}{2} + \theta_0$.

Как видно из рис. 3, если тело имеет скорость собственного вращения, угол атаки будет колебаться около некоторого положения, что не позволит утонуть ему. Таким образом, гироскопический эффект обеспечивает стабилизацию плоскости диска по отношению к горизонтали, и возможен многократный рикошет.

а)



б)

Рис. 3. Зависимость угла нутации от времени.

$$a)\ \dot{\varphi}_0 \neq 0,\ \text{б)}\ \dot{\varphi}_0 = 0.$$

3. Расчёт траектории тела

На основании полученных выше результатов можно сделать следующие выводы: время взаимодействия тела с водой мало, при соударении происходит потеря кинетической энергии, гироскопический эффект стабилизирует угол атаки. Это, в свою очередь, позволяет для конечных размеров (диск или квадратная пластина) использовать модель материальной точки, а поверхность воды рассматривать как шероховатую поверхность. Тогда процесс рикошетирования может быть представлен как движение точки массой M в воздухе с последующим многократным соударением о поверхность воды. Отметим, что при описании косого удара точки о поверхность используется гипотеза Рауса [12], согласно которой имеются нормальная и тангенциальная составляющая ударного импульса, т.е. при ударе изменяются как нормальная, так и тангенциальная составляющие скорости материальной точки.

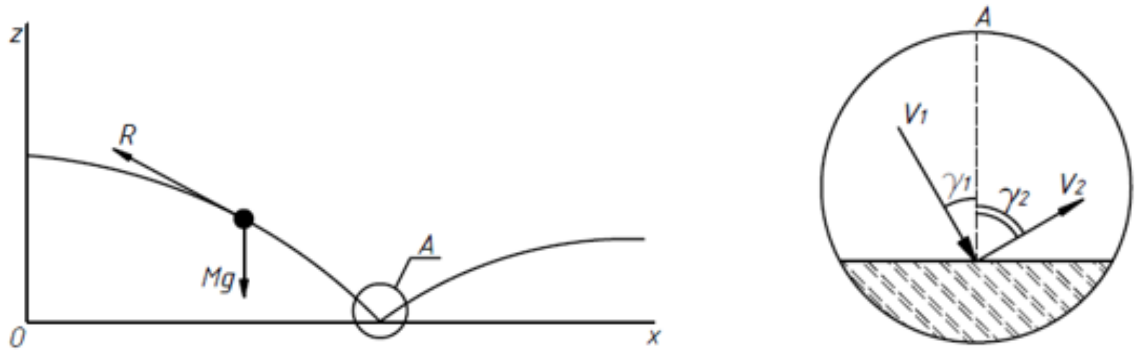
При движении на точку действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха (рисунок 4а).

$$M\vec{a} = M\vec{g} - C_{\text{в}}|\vec{V}|\vec{V}.$$

где $C_{\text{в}}$ – коэффициент сопротивления воздуха.

В проекциях на оси z и x имеем^

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g + \dfrac{C_z}{M}\dot{z}\sqrt{\dot{z}^2 + \dot{x}^2} \\ \ddot{x} = -\dfrac{C_x}{M}\dot{x}\sqrt{\dot{z}^2 + \dot{x}^2} \end{cases}. \qquad (12)$$



а) б)

Рис. 4. Расчётная схемы полёта материальной точки в воздухе (а) и её косого удара о шероховатую поверхность (б)

При косом ударе по гипотезе Рауса коэффициенты восстановления в проекциях на оси не одинаковы и приводят к изменению горизонтальной и вертикальной составляющих скорости.

При:

$$z = 0: \begin{cases} \vec{V}_{2x} = k_x\vec{V}_{1x} \\ \vec{V}_{2z} = -k_y\vec{V}_{1z} \end{cases}, \qquad (13)$$

где k_x и k_z – соответствующие коэффициенты восстановления.

Приведенные в [11] результаты экспериментов с рикошетирующими от воды коническими цилиндрами позволяют оценить интегральный коэффициент восстановления (по значениям модуля скорости непосредственно до и после удара), значение которого лежат в k~0.3 ... 0.9. Указанный диапазон используется в расчётах ниже, причём полагается $k_x > k_z$.

Траектория точки может быть получена при численном решении системы уравнений (12) с граничными условиями (13) при использовании пакета Mathematica, причем для учета

условий (13) при $z = 0$ (изменение скорости при соударениях) использовалась процедура WhenEvent.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки, моделирующий рикошет от поверхности воды диска радиуса $r = 5$ см и массы $m = 100$ г. Начальные положение точки и горизонтальная скорость (вертикальная составляющая равна нулю) определялись величинами $z_0 = 50$ см и $V_0 = 1000$ см/с. Коэффициенты сопротивления воздуха имели значения $C_x = 0.3$, $C_z = 0.9$ (соответствуют движению рассматриваемого диска в воздухе). Коэффициенты восстановления принимались равными $k_x = 0.9$ и $k_z = 0.75$.

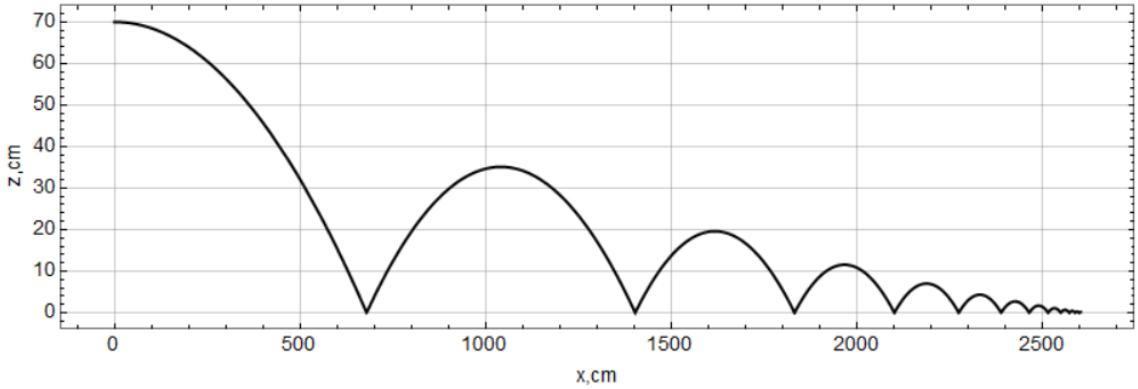


Рис. 5. Траектория точки

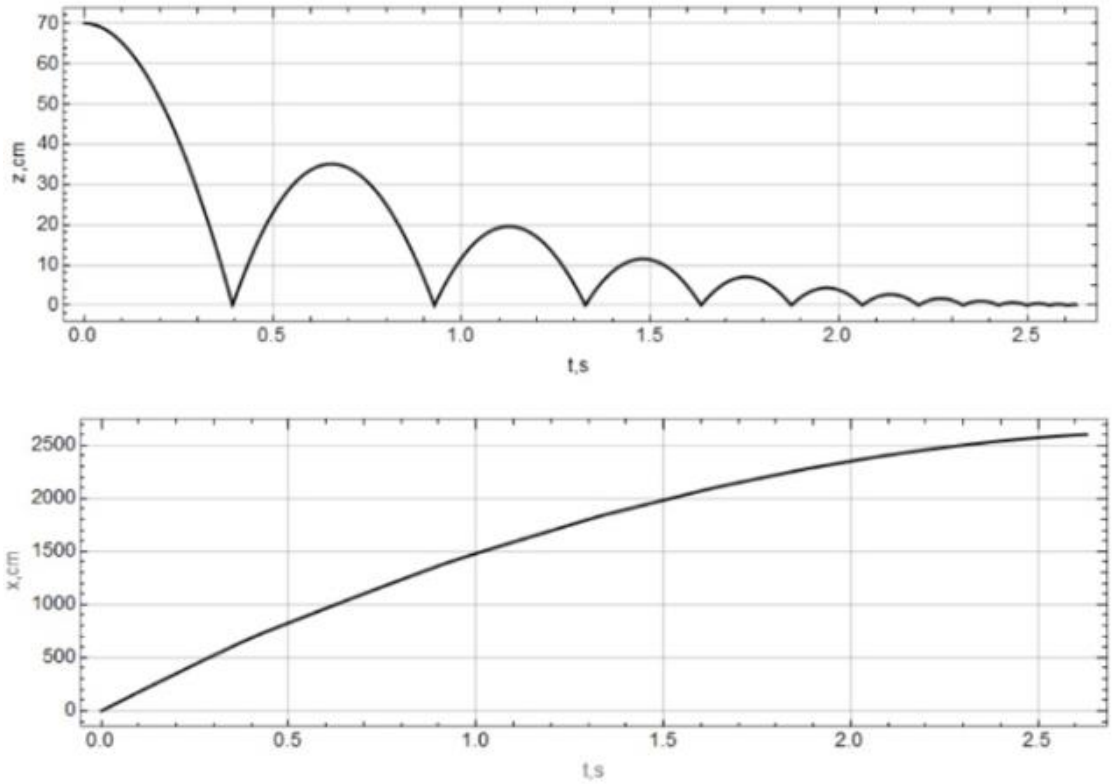


Рис. 6. Зависимости вертикальной и горизонтальной координат токи от времени

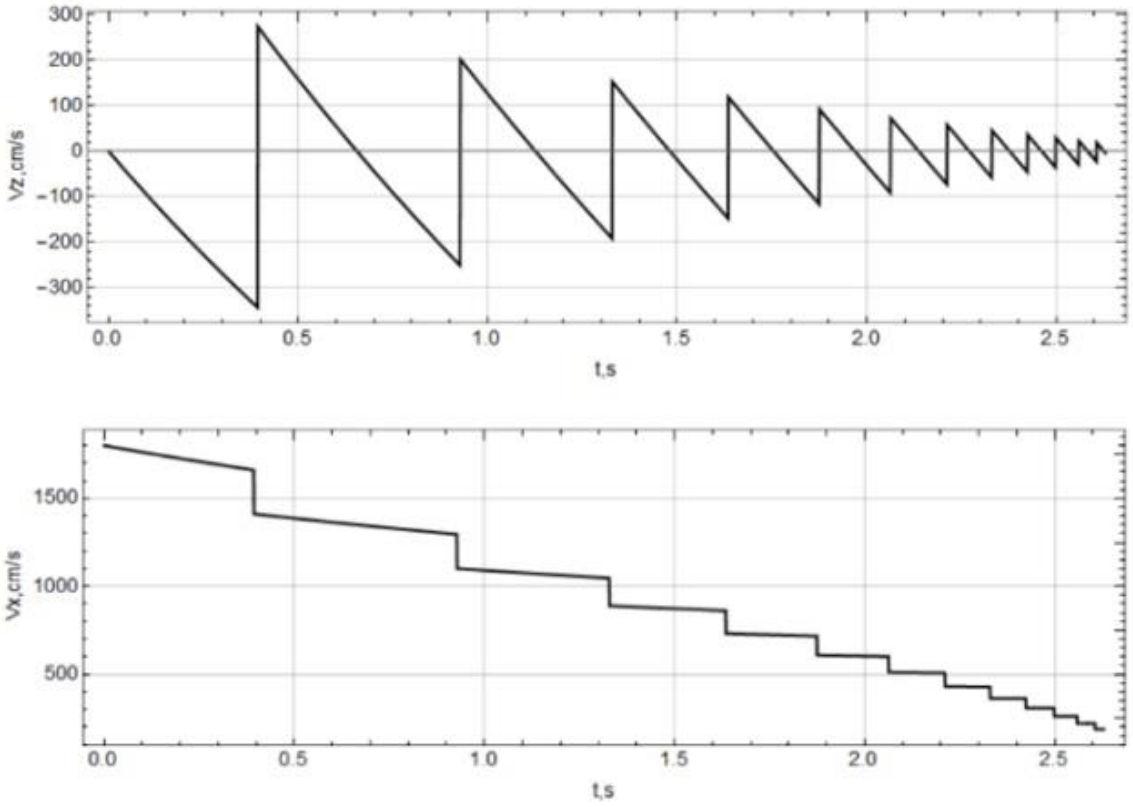


Рис. 7. Зависимости вертикальной и горизонтальной составляющих скорости точки от времени.

На рисунке 5 приведена рассчитанная траектория $z = z(x)$ точки. Видно, что число рикошетов равно $N{\sim}7$. Полученная величина N вполне реальная и может быть проверена на водоеме при броске плоского камешка и подсчете числа отскоков. Отметим, что расчеты дают около 15 рикошетов, однако вводится критерий отсечки снизу: расстояние между соседними отскоками должно превышать диаметр рассматриваемого диска.

Показанные на рисунке 6 зависимости $z(t)$ и $x(t)$ свидетельствуют о монотонном росте горизонтальной координаты и многократном обнулении координаты вертикальной.

Временные зависимости составляющих скорости представлены на рисунке 7. Если вертикальная скорость в момент рикошета изменяется по направлению и величине, то горизонтальная скорость ступенчато уменьшается.

Отсутствие опытных данных исключает сравнение приведённых на рисунках 5-7 зависимостей с экспериментом. Кроме того, отсутствуют экспериментальные оценки коэффициентов восстановления скорости при ударе тела о водную поверхность.

Заключение

Рассмотрены имеющиеся модели рикошета тела от воды. Показана определяющая роль гироскопического эффекта и получены количественные оценки определяющих

параметров. Для рикошета использована гипотеза Рауса косого удара точки о «шероховатую» поверхность. Построена траектория рикошетирующего тела в приближении динамики материальной точки.

Список использованной литературы

[1]. Johnson W. The ricochet of spinning and non-spinning spherical projectiles, mainly from water. Part II: An outline of theory and warlike applications. Int. J. Impact Eng. 21(1998): 25–34. (Johnson, W. (1998). The ricochet of spinning and non-spinning spherical projectiles, mainly from water. Part II: An outline of theory and warlike applications. Int. J. Impact Eng., 21(1-2), 25–34).

[2]. Левченко В.А., Сергин М.Ю., Иванов В.А., Г. В. Зеленин. Стрельба и управление огнем артиллерийских подразделений. Тамбов: ТГТУ, 2004. 268 с.

[3]. Космические аппараты/Под общ. ред. К. П. Феоктистова. М.: Воениздат, 1983. 319 с.

[4]. Косоуров К.Ф. Гидросамолеты. Их мореходность и расчет. М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 371 с.

[5]. Седов Л.И. Методы теории размерности и теории подобия в механике. Л.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1944. 136 с.

[6]. Bocquet L. The physics of stone skipping, Am. J. Physics, 71, 150-155 (2003).

[7]. Babbs C.F. Stone skipping physics. The Physics Teacher, 2019. 57(5), 278–281.

[8]. Yan G.-X., Pan G., Shi Y., Ma J.-T. Numerical investigation of the skip characteristics of a disk based on the coupled FEM-SPH method. Mod. Phys. Lett. B. 2019. 1950238.

[9]. Rosellini, L., Hersen, F., Clanet, C., & Bocquet, L. Skipping stones. J. Fluid Mech.2005. 543(-1), 137.

[10]. Hewitt I.J., Balmforth N.J., Mcelwaine J.N. Continual skipping on water. J. Fluid Mech. 2011. 669, 328–353.

[11]. Chen G. et al Motion characteristics after ricochet: an experimental investigation // Pol. Marit. Res. 2020. 27(2). 4-20.

[12]. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: МГУ, 2000. 719 с.