

УДК 517.977.1

Реализация типовых маневров четырехвинтового вертолета

Ю.С.Белинская

*Студент, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: Четвериков В.Н., д.ф.-м.н., профессор кафедры
«Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

Задачи управления движением различных беспилотных летательных аппаратов рассматриваются достаточно широко [1,2,6,7]. Один из возможных подходов заключается в формировании сложной пространственной траектории из типовых маневров, таких, как взлет в вертикальной плоскости, поворот и движение в вертикальной плоскости. Задача реализации типовых маневров рассмотрена в [6].

Цель настоящей работы – реализовать простейшие типовые маневры для четырехвинтового вертолета.

Следуя работе [5], приведем сначала необходимые теоретические сведения о модели квадрокоптера и подхода к синтезу программного и стабилизирующего управлений на основе теории плоскостности. Четырехвинтовой вертолет (квадрокоптер, четырехроторный вертолет) представляет собой летательный аппарат с четырьмя винтами (рис. 1). Винты закреплены на двух пересекающихся крест-накрест жестких балках и вращаются в противоположных направлениях, как показано на рис.2.

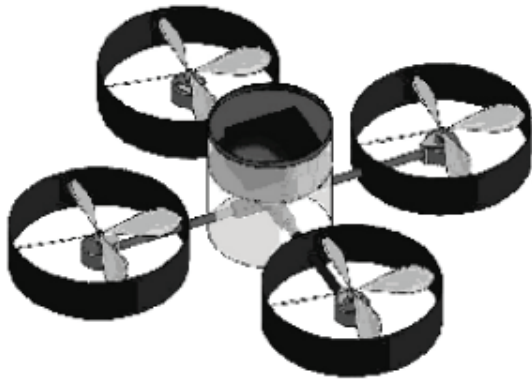


Рис. 1. Модель четырехвинтового вертолета.

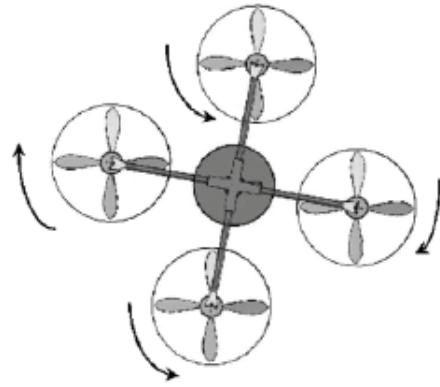


Рис. 2. Вращение винтов вертолета.

В работах [1, 2] показано, что движение квадрокоптера описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -u \sin \theta, \\
 m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \varphi, \\
 m\ddot{z} + mg &= u \cos \theta \cos \varphi, \\
 \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi, \\
 \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta, \\
 \ddot{\varphi} &= \tilde{\tau}_\varphi,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где (x, y, z) — координаты центра инерции квадрокоптера, $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ — суммарное ускорение динамической системы (1), m — масса квадрокоптера, (ψ, θ, φ) — углы Эйлера (ψ — угол рыскания, θ — угол тангажа, φ — угол крена), u — сумма неконсервативных сил, действующих на систему (включая силы лобового сопротивления и суммарную силу тяги четырех винтов), g — ускорение свободного падения, $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\varphi)$ — вектор угловых ускорений точки в локальной системе координат, связанной с центром инерции.

Заметим, что от переменной ψ остальные уравнения (1) не зависят, поэтому четвертое уравнение системы можно рассматривать отдельно и исследовать систему:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -u \sin \theta, \\
 m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \varphi, \\
 m\ddot{z} + mg &= u \cos \theta \cos \varphi, \\
 \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta, \\
 \ddot{\varphi} &= \tilde{\tau}_\varphi,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ — состояние системы, а $(u, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\varphi)$ — входы (управления) системы.

В работах [1, 2] показано, что функции

$$h_1 = x, h_2 = y, h_3 = z \quad (3)$$

являются плоским выходом системы (2). Действительно,

$$x = h_1, y = h_2, z = h_3, \dot{x} = \dot{h}_1, \dot{y} = \dot{h}_2, \dot{z} = \dot{h}_3,$$

а из (2) получим, что

$$\ddot{h}_1 = -\frac{u}{m} \sin \theta, \ddot{h}_2 = \frac{u}{m} \cos \theta \sin \varphi, \ddot{h}_3 + g = \frac{u}{m} \cos \theta \cos \varphi,$$

откуда получаются выражения для углов тангажа и крена:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\ddot{h}_2}{\ddot{h}_3 + g}\right), \theta = -\arctg\left(\cos \varphi \frac{\ddot{h}_1}{\ddot{h}_3 + g}\right), \quad (4)$$

а выражения для $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ получаются дифференцированием выражений (4). Значит, все переменные состояния системы выражаются через функции h_i , то есть эти функции действительно являются плоским выходом.

Для построения динамической обратной связи введем две дополнительные переменные:

$$\xi_1 = \sqrt{\ddot{h}_1^2 + \ddot{h}_2^2 + (\ddot{h}_3 + g)^2}, \xi_2 = \dot{\xi}_1. \quad (5)$$

Функции (5) вместе с функциями состояния системы (2) определяют обратную замену переменных к переменным $h_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, 3, j = 0, \dots, 3$ во всем пространстве состояний.

Используя указанную замену переменных, выразим производные $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ и входы системы через ξ_1, ξ_2 , переменные состояния и $v_i = h_i^{(4)}, i = 1, 2, 3$. Продифференцировав (5) по времени, получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 (\cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - \sin \theta \cdot v_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot v_2 + \cos \theta \cos \varphi \cdot v_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Суммарная сила тяги выражается следующим образом:

$$u = m \xi_1. \quad (7)$$

Для выражения $\tilde{\tau}_\theta$ и $\tilde{\tau}_\varphi$ используем (4). Получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\theta &= \frac{1}{\xi_1} (\sec \theta \cdot (v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi) - 2\dot{\varphi}(\xi_2 - \xi_1 \dot{\theta} g \theta)), \\ \tilde{\tau}_\varphi &= -\frac{1}{\xi_1} \cos \varphi \left| \sec \varphi \right| (v_1 \cos \theta + (v_3 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi) \sin \theta + \xi_1 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\xi_2 \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (8)$$

Формулы (6), (7), (8) определяют динамическую обратную связь, линеаризующую систему (2).

Граничные условия задачи терминального управления для типового маневра смены высоты вертолета ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z}(0) = 0, \\ \theta(0) &= 0, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, \\ x(T) &= x_0, y(T) = y_0, z(T) = z_d, \dot{x}(T) = 0, \dot{y}(T) = 0, \dot{z}(T) = 0, \\ \theta(T) &= 0, \dot{\theta}(T) = 0, \varphi(T) = 0, \dot{\varphi}(T) = 0.\end{aligned}$$

Начальные и конечные значения переменных ξ зададим следующим образом: $\xi_1(0) = \xi_1(T) = g$, $\xi_2(0) = \xi_2(T) = 0$. Благодаря такому выбору начальных значений $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ траектория по переменной z не уходит в отрицательную подобласть. В переменных h условия переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}h_1(0) &= x_0, h_2(0) = y_0, h_3(0) = z_0, \dot{h}_1(0) = 0, \dot{h}_2(0) = 0, \dot{h}_3(0) = 0, \\ \ddot{h}_1(0) &= 0, \ddot{h}_2(0) = 0, \ddot{h}_3(0) = 0, \ddot{h}_1(0) = 0, \ddot{h}_2(0) = 0, \ddot{h}_3(0) = 0, \\ h_1(T) &= x_0, h_2(T) = y_0, h_3(T) = z_d, \dot{h}_1(T) = 0, \dot{h}_2(T) = 0, \dot{h}_3(T) = 0, \\ \ddot{h}_1(T) &= 0, \ddot{h}_2(T) = 0, \ddot{h}_3(T) = 0, \ddot{h}_1(T) = 0, \ddot{h}_2(T) = 0, \ddot{h}_3(T) = 0.\end{aligned}$$

Решение задачи для h_1 и h_2 тривиально: $h_1^* \equiv x_0$, $h_2^* \equiv y_0$. Решение задачи для h_3 ищем в пространстве многочленов седьмого порядка, поскольку имеется восемь граничных условий по переменной h_3 . Это решение выглядит следующим образом:

$$h_3^* = -20(z_d - z_0)\left(\frac{t}{T}\right)^7 + 70(z_d - z_0)\left(\frac{t}{T}\right)^6 - 84(z_d - z_0)\left(\frac{t}{T}\right)^5 + 35(z_d - z_0)\left(\frac{t}{T}\right)^4.$$

Выполним численное моделирование для $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 2, z_d = 10$. На рис.3. представлена полученная зависимость координаты z от времени.

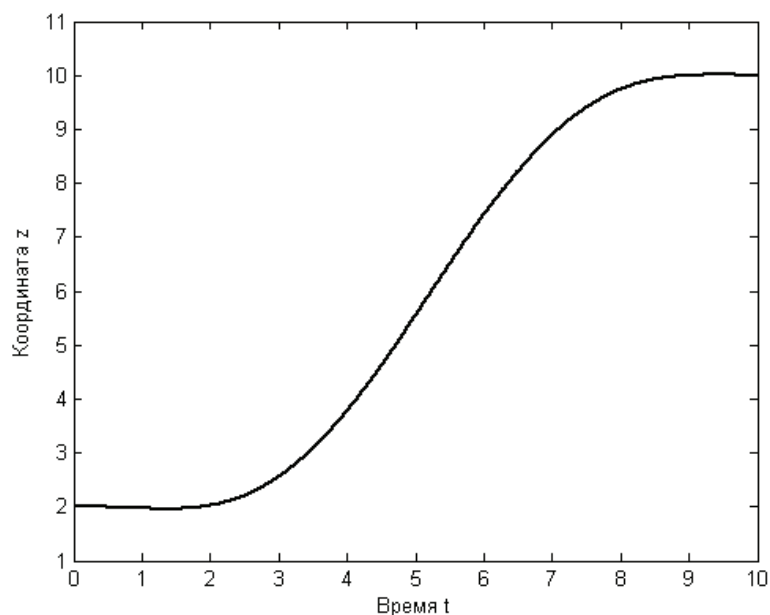


Рис. 3. График зависимости $z(t)$

Для проверки физической реализуемости управления построим графики сил тяги каждого винта.

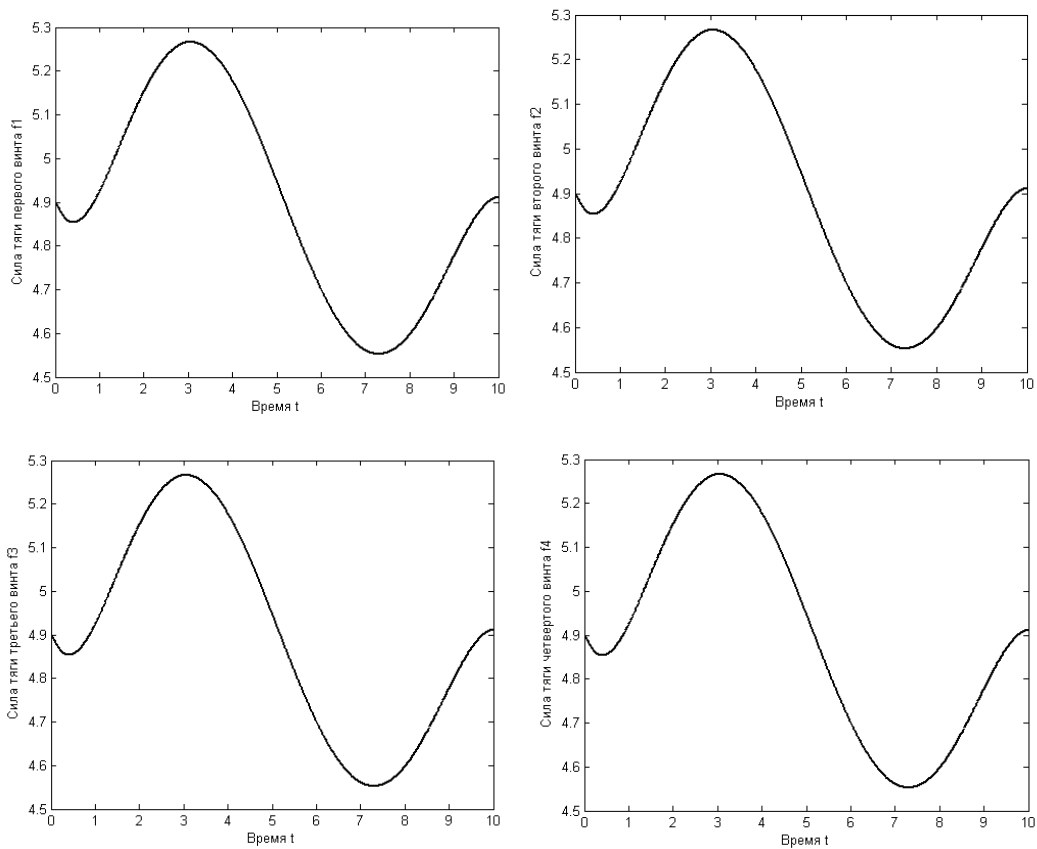


Рис. 4. Графики зависимости сил тяги от времени

Из графиков видно, что выполняется условие допустимости управления: $f_i > 0$.

Теперь решим задачу поворота четырехвинтового вертолета. Поскольку поворот связан с изменением угла рыскания, разобьем решение задачи на 2 этапа:

1. Решение задачи по переменной ψ
2. Решение задачи по остальным переменным.

Граничные условия задачи терминального управления определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = z_0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z}(0) = 0, \\
 \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0, \\
 x(T) = x_d, y(T) = y_d, z(T) = z_0, \dot{x}(T) = 0, \dot{y}(T) = 0, \dot{z}(T) = 0, \\
 \theta(T) = 0, \dot{\theta}(T) = 0, \varphi(T) = 0, \dot{\varphi}(T) = 0, \psi(T) = \frac{\pi}{2}, \dot{\psi}(T) = 0.
 \end{aligned}$$

Решение задачи по переменной ψ ищется в пространстве полиномов 3-й степени. По остальным переменным решение задачи аналогично решению, представленному при реализации маневра смены высоты. Выполняя численное моделирование, получим графики, представленные на рис. 5-6.

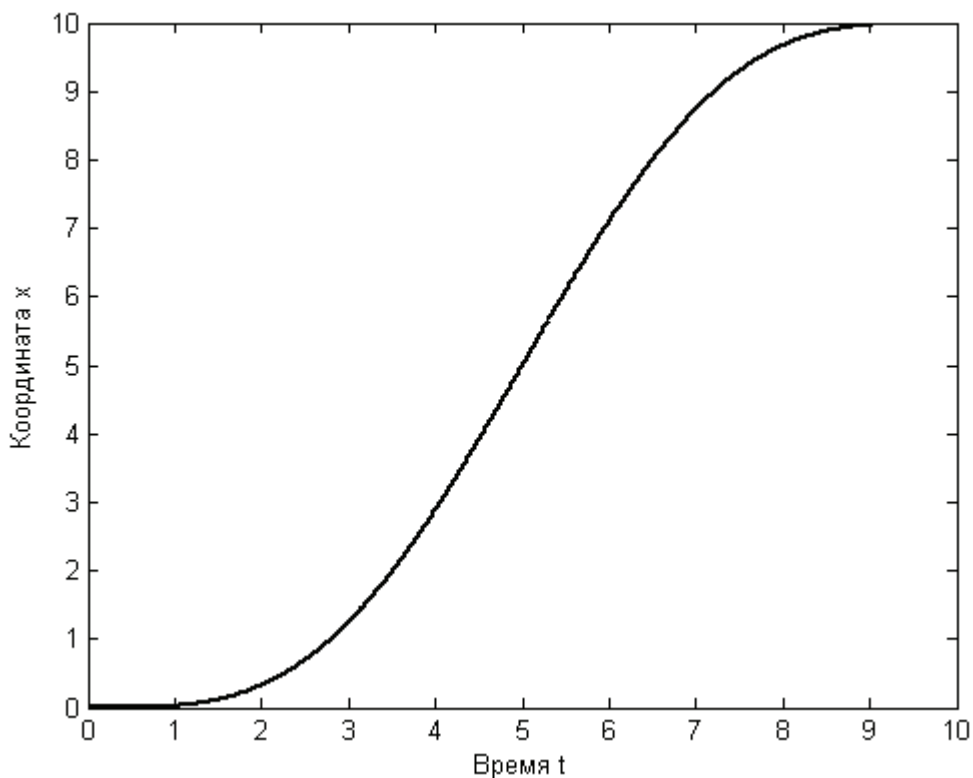


Рис. 5. График зависимости $x(t)$

График зависимости $\psi(t)$ приведен на рис. 6. Видно, что найденная траектория является решением поставленной задачи терминального управления.

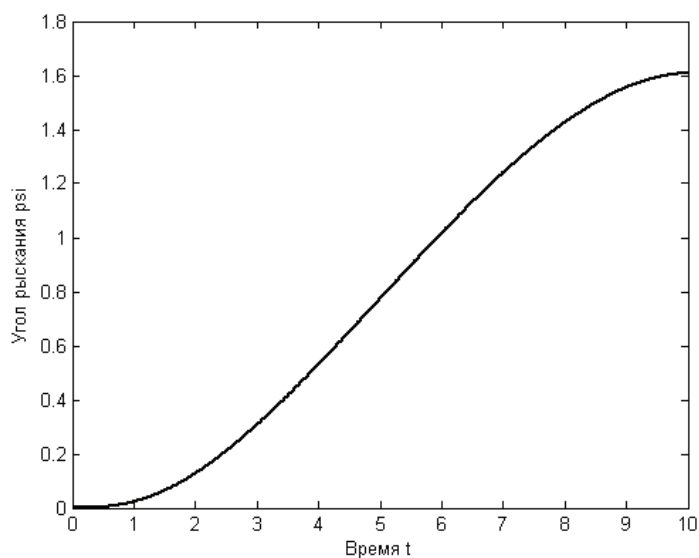


Рис. 6. График зависимости $\psi(t)$

Для проверки допустимости выбранного управления построим графики сил тяги каждого винта.

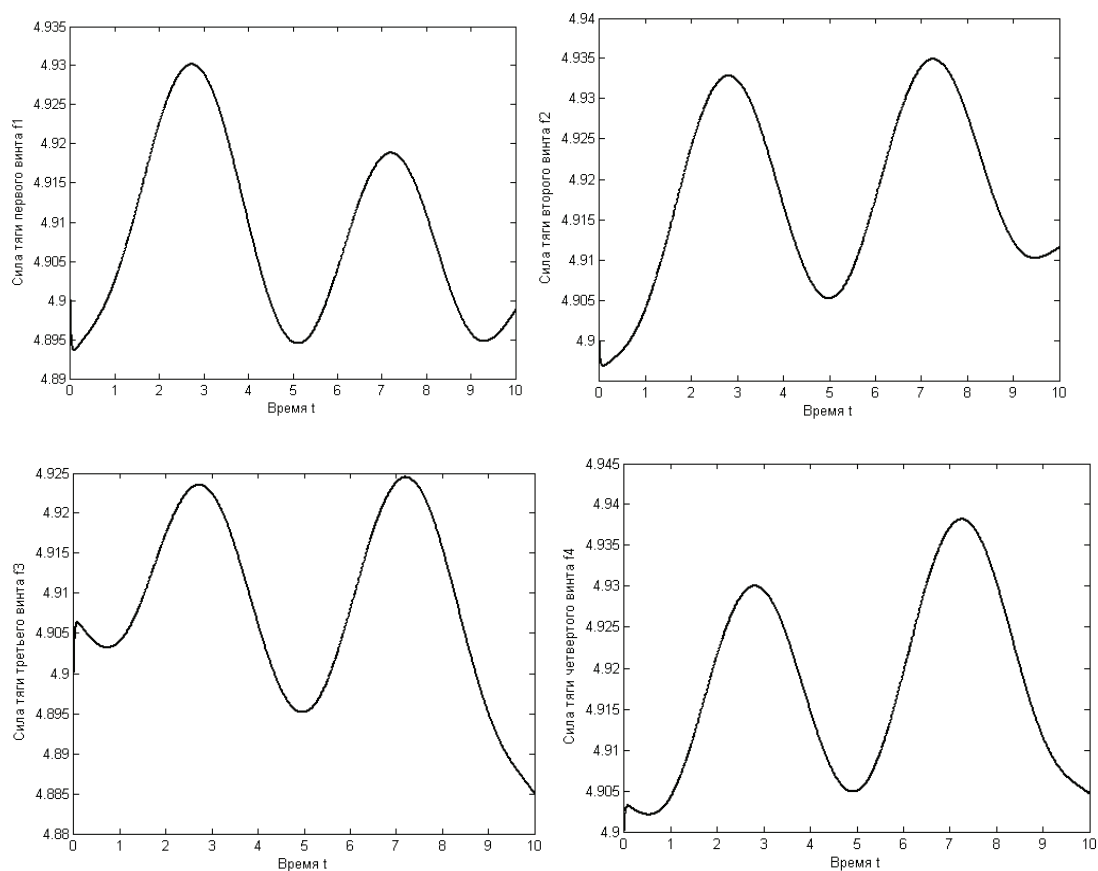


Рис. 7. Графики зависимости сил тяги от времени

Из графиков видно, что выполняется условие допустимости управления: $f_i > 0$.

Заключение

Решена задача формирования типовых маневров смены высоты и поворота для четырехвинтового вертолета с применением теории плоскостности. Для плоских систем предложен метод формирования программной траектории и соответствующего ей программного управления на базе полиномов седьмого порядка. Порядок полинома определяется количеством граничных условий. При этом часть граничных условий, соответствующая дополнительным переменным, введенным для построения динамической обратной связи, может быть выбрана различным образом.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0370) и РФФИ (грант 13-07-00736).

Список литературы

1. Beji L., Abichou A., Slim R. Stabilization with Motion Planning of a Four Rotor Mini-rotorcraft for Terrain Missions // Fourth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA) – 2004. P.335-340.
2. Beji L., Abichou A.. Trajectory and Tracking of a Mini-rotorcraft // Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation – 2005. P.2618-2623.
3. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. V. 44, №5. – P.922 – 937.
4. Четвериков В.Н. Управляемость плоских систем // Дифференциальные уравнения. – 2007. Т. 43, № 11. – С.1518-1527.
5. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 5. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/397373.html> (дата обращения 10.03.2013).
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости. Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. №3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html> (дата обращения 10.03.2012)
7. Крищенко А.П., Канатников А.Н., Ткачев С.Б. Планирование пространственного разворота беспилотного летательного аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Энергетическое и транспортное машиностроение. Специальный выпуск. – 2011. С.151-163.