

УДК 519.6

**Применение гибридных алгоритмов оптимизации к обратным спектральным задачам для механических систем**

**И.В. Кытманов<sup>1</sup>, С.К. Носачев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Студент кафедры «Ракетные и импульсные системы»,  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Студент, кафедра «Аэрокосмические системы»  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: В.Д. Сулимов, старший преподаватель кафедры  
«Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

*Научный консультант: П.М. Шкапов, д.т.н., зав. кафедрой «Теоретическая  
механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

МГТУ им. Н.Э. Баумана

[spm@bmstu.ru](mailto:spm@bmstu.ru)

В процессе проектирования, отработки и эксплуатации технических систем возникает необходимость решения двух типов экстремальных задач – оптимизации и диагностики. Задачи первого типа возникают при выборе оптимальных параметров систем или процессов. Обеспечение безопасной и эффективной эксплуатации систем предполагает решение обратных задач второго типа: коррекции расчетных динамических моделей и диагностирования систем по результатам косвенных измерений. Входными данными для диагностирования являются результаты измерения характеристик исследуемой системы или процесса, например, регистрируемые параметры колебательных процессов; при этом искомыми являются коэффициенты уравнений расчетной динамической модели, граничные условия, геометрические и другие характеристики [1]. Далее формулируются обратные задачи на собственные значения для механических систем. Проводится сравнение спек-

тров колебаний системы, соответствующих ее искомому и текущему состояниям. Решение может быть получено минимизацией функции рассогласования сравниваемых спектров при изменении характеристик системы. Далее вводится предположение, что измерения могут быть выполнены с приемлемой точностью только для частот собственных колебаний, тогда как погрешности определения соответствующих форм чрезмерны. Следовательно, требуется восстановить характеристики исследуемой системы по неполным входным данным. Значительная трудоемкость решения обратных задач обусловлена их некорректностью, которая чаще всего проявляется в неустойчивости решения относительно погрешностей входных данных. Используемый подход основан на разработке математических моделей систем и применении математических методов расчета основных динамических характеристик систем, методов теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Приближенное решение регуляризованной экстремальной задачи предполагает поиск неизвестных переменных  $x$ , определяющих модель системы и минимизирующих функционал невязки  $f(x, \zeta_\delta) = \mu_D^2(A(x), \zeta_\delta) + \alpha s(x)$ . Здесь  $\zeta$  – измеренные данные,  $\zeta \in D$  – элемент метрического пространства данных  $D$ ;  $\delta$  – ошибка измерения;  $\zeta_\delta = \zeta + \delta\zeta$ ;  $\mu_D$  – функция расстояния,  $\mu_D(\zeta_\delta, \zeta) \leq \delta$ ;  $A(\cdot)$  – оператор прямого моделирования;  $s(x)$  – стабилизирующий функционал;  $\alpha$  – параметр регуляризации. Неизвестный действительный параметр  $\alpha$  определяется из условия:  $\mu_D(A(x_\alpha), \zeta_\delta) = \delta$ , где  $x_\alpha$  – элемент, на котором функционал  $f(x, \zeta_\delta)$  достигает своего минимума. На практике физическое существование решения обратной задачи не вызывает сомнений, однако формальное математическое решение существует не всегда. Требуется найти модель, способную воспроизвести данные измерений, которые всегда содержат некоторые ошибки. Итерационный процесс решения завершается на шаге, когда параметрический функционал достигает заданного уровня  $\varepsilon_0$ :  $\delta f(x_N) \leq \varepsilon_0$ . К настоящему времени методы решения задач глобальной минимизации многоэкстремальных функций достаточно хорошо разработаны. Следует отметить, что эффективность детерминированных алгоритмов ограничена их зависимостью от размерности задачи. К числу наиболее мощных современных стохастических алгоритмов глобальной оптимизации относится алгоритм РСА, реализующий метод Метрополиса [2]. Существенным шагом алгоритма является сравнительная оценка качества решения, определяемого текущей и предшествующей конфигурацией системы. Пробное решение на текущем шаге принимается с определенной вероятностью, что исключает сходимость к локальному минимуму; локальный поиск также осуществляется

стохастическим методом. Вместе с тем, одним из ресурсов повышения эффективности алгоритма PCA является совершенствование процедуры локального поиска [3].

Для решения рассматриваемых экстремальных задач применены гибридные алгоритмы глобальной оптимизации, в которых исследование области переменных модели проводится стохастическим методом, а при локальном поиске используются детерминированные методы. В гибридном алгоритме PCALMS локальный поиск проводится с использованием градиентной информации для сглаживающих аппроксимаций критериальной функции [4]. При локальном поиске в гибридном алгоритме PCASFC реализован метод кривой, заполняющей пространство [5]. Результаты тестирования показали высокую эффективность используемых гибридных алгоритмов.

Пример 1. В качестве диагностируемой рассматривается механическая система, представляющая собой горизонтальный прямолинейный стержень с тремя упругими опорами, ограничивающими вертикальные перемещения. Стержень считается однородным. Две опоры на его концах имеют одинаковые жесткостные характеристики, третья опора связана с центром масс. Длина стержня равна 1 м при массе, равной 1 кг. Известны начальные (номинальные) значения жесткостных характеристик опор:  $x_1 = 1600$  Н/м (опоры на концах) и  $x_2 = 800$  Н/м (средняя опора). Решение прямой задачи в аналитической форме для рассматриваемой системы представлено в [6]. При номинальных характеристиках опор системы собственные значения равны 2066.(6) и 4900, что соответствует частотам 8.219 и 12.732 Гц. Значения характеристик  $x_1$  и  $x_2$  (переменные управления), с течением времени могут изменяться, что приводит к соответствующим изменениям спектра колебаний системы. Такое изменение системы рассматривается как аномалия. Предполагается, что измерения частот собственных колебаний системы могут быть выполнены с точностью, необходимой для решения обратной задачи. Пусть аномальное состояние характеризуется следующими значениями жесткостных характеристик опор:  $x_1^* = 1225$  Н/м;  $x_2^* = 650$  Н/м; измеренные значения частот составляют 7.235 и 11.141 Гц. Требуется минимизировать регуляризованную функцию рассогласования частот изменением переменных управления, т.е. выполнить настройку системы на заданный аномальный спектр. Решение задачи получено с использованием гибридного алгоритма PCALMS. Изменение значений переменных управления на завершающих итерациях алгоритма (число итераций  $Niter = 54$ ) показано на рис. 1.

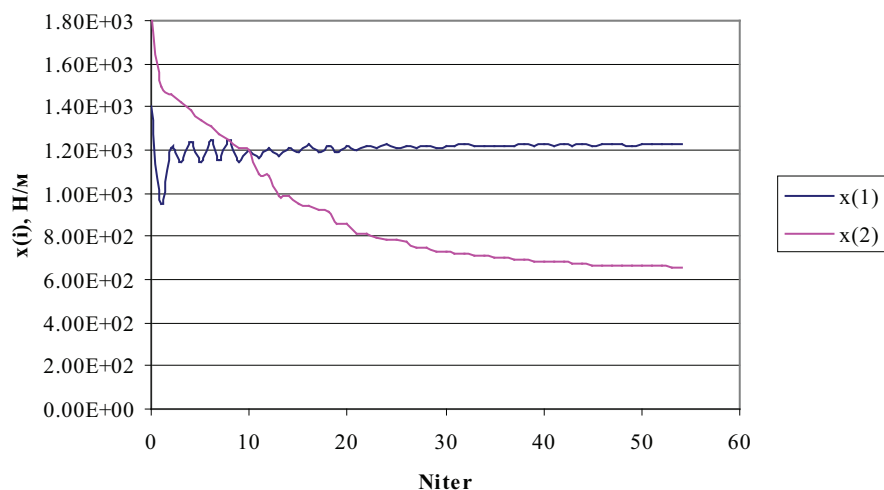


Рис. 1. Изменение значений переменных управления

Соответствующее изменение критериальной функции и нормы вектора улучшающего направления приведено на рис. 2.

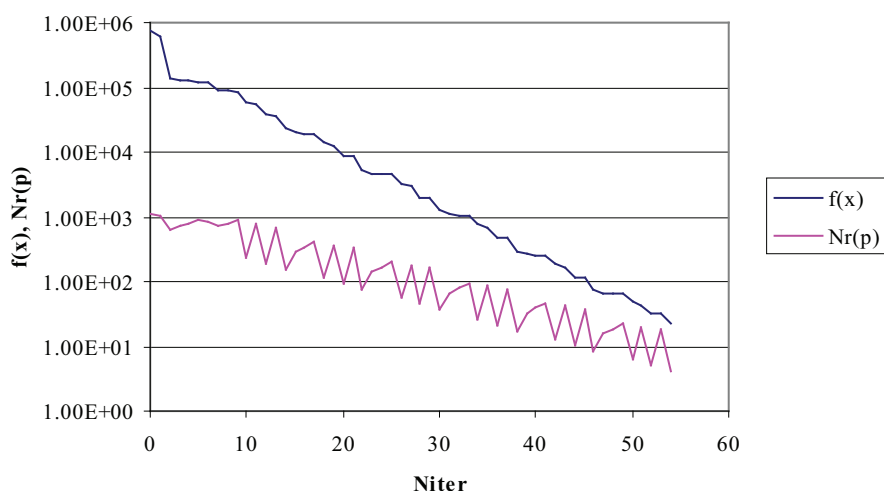


Рис. 2. Изменение критериальной функции и нормы вектора

В результате решения получены следующие значения переменных управления (жесткостных характеристик опор):  $x_1^{54} \approx 1224.66$  Н/м;  $x_2^{54} \approx 658.79$  Н/м. При этом значение критериальной функции уменьшилось от  $0.7788 \cdot 10^6$  до  $0.2249 \cdot 10^2$ . Можно отметить, что погрешность определения аномальных значений жесткостных характеристик опор не превышает 0.5%.

Пример 2. Рассматриваются свободные поперечные колебания прямолинейной цилиндрической трубы, шарнирно опертой на концах, при протекании через нее идеальной

несжимаемой жидкости. Труба представляется как однородная эйлерова балка. Жидкость полностью занимает внутренний объем трубы и движется прямолинейно и равномерно, с постоянной по сечению трубы скоростью. Предполагается, что геометрические и механические характеристики трубы известны, а две низшие круговые частоты  $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$  изгибных колебаний трубы с протекающей жидкостью получены экспериментально. Требуется определить плотность жидкости  $\rho$  и скорость  $v$  ее течения в трубе. Решение прямой задачи приведено в [7].

Труба имеет длину 2.75 м. Значения наружного диаметра поперечного сечения трубы заключены в пределах от 0.02 до 0.1 м; значения толщины стенки – 0.001 до 0.002 м. Модуль Юнга материала трубы равен 69.0 ГПа, плотность материала – 2780 кг/м<sup>3</sup>. Жидкость в трубе может быть неподвижной или иметь установившуюся скорость, не превышающую 18.0 м/с; плотность жидкости может изменяться от 1000 до 1800 кг/м<sup>3</sup>. Пусть в результате измерений получены две низшие круговые частоты собственных изгибных колебаний трубы с протекающей жидкостью:  $\omega_1^* \approx 41.64855$  рад/с;  $\omega_2^* \approx 177.02695$  рад/с. Требуется определить наружный диаметр и толщину стенки поперечного сечения трубы, а также плотность жидкости и скорость ее течения в трубе.

Сформулируем обратную спектральную задачу. Значения геометрических параметров сечения трубы и характеристик потока жидкости определяются так:

$$D = D_{\min} + (D_{\max} - D_{\min})x_1 / 100 \text{ м};$$

$$h = h_{\min} + (h_{\max} - h_{\min})x_2 / 100 \text{ м};$$

$$\rho = \rho_{\min} + (\rho_{\max} - \rho_{\min})x_3 / 100 \text{ кг/м}^3;$$

$$v = v_{\max}x_4 / 100 \text{ м/с};$$

здесь  $x_i$  – переменная управления,  $i = \overline{1,4}$ ;  $D$  – наружный диаметр поперечного сечения трубы;  $h$  – толщина стенки поперечного сечения;  $\rho$  – плотность жидкости;  $v$  – скорость течения жидкости в трубе;  $(\cdot)_{\min}$ ,  $(\cdot)_{\max}$  – наименьшее и наибольшее значение соответствующего геометрического или физического параметра. Здесь:

$$D_{\min} = 0.02 \text{ м}; D_{\max} = 0.1 \text{ м}; h_{\min} = 0.001 \text{ м}; h_{\max} = 0.002 \text{ м};$$

$$\rho_{\min} = 1000 \text{ кг/м}^3; \rho_{\max} = 1800 \text{ кг/м}^3; v_{\max} = 18 \text{ м/с}.$$

На значения используемых переменных управления наложены ограничения:  $0 \leq x_i \leq 100\%$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Функция рассогласования частот определена в виде:

$$f(x) = \max_{x \in X \subset \mathbb{R}^4} \{f_1(x), f_2(x)\},$$

где  $f_i(x) = |\omega_i(x) - \omega_i^*|$ ,  $i = 1, 2$ . Требуется восстановить геометрические параметры поперечного сечения трубы и физические характеристики потока жидкости, протекающей через трубу. т.е. определить вектор  $x^* \in X \subset \mathbb{R}^4$ , минимизирующий функцию рассогласования.

Решение задачи ищем с использованием алгоритма редукции многомерной задачи к эквивалентной одномерной построением развертки – кривой Пеано. Изменение значений функции рассогласования для числа уровней разбиения  $m = 3$  показано на рис. 3.

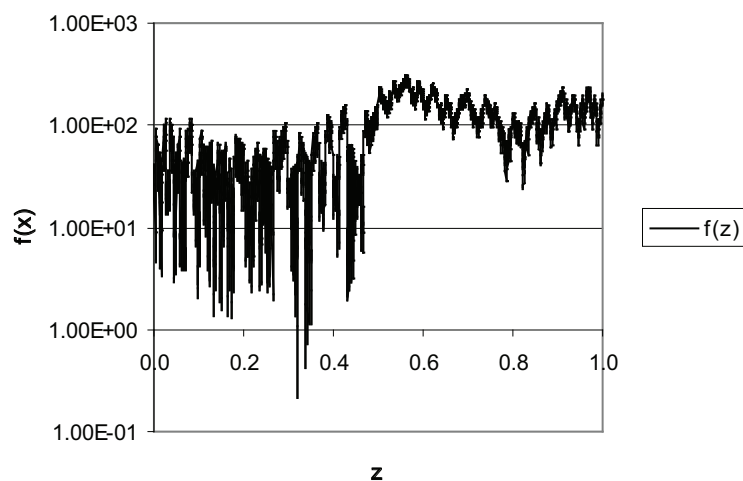


Рис. 3. Изменение функции рассогласования

При возрастании числа уровней разбиения значение  $f(x)$  убывает. Изменение значений функции рассогласования и переменных управления представлено на рис. 4 и рис. 5 соответственно. Решение рассматриваемой модельной задачи получено при  $m = 5$ :  
 $f(x_*) \approx 0.2487 \cdot 10^{-3}$ ;  $x_1^* = 26.5625\%$ ;  $x_2^* = 10.9375\%$ ;  $x_3^* = 48.4375\%$ ;  
 $x_4^* = 76.5625\%$ .

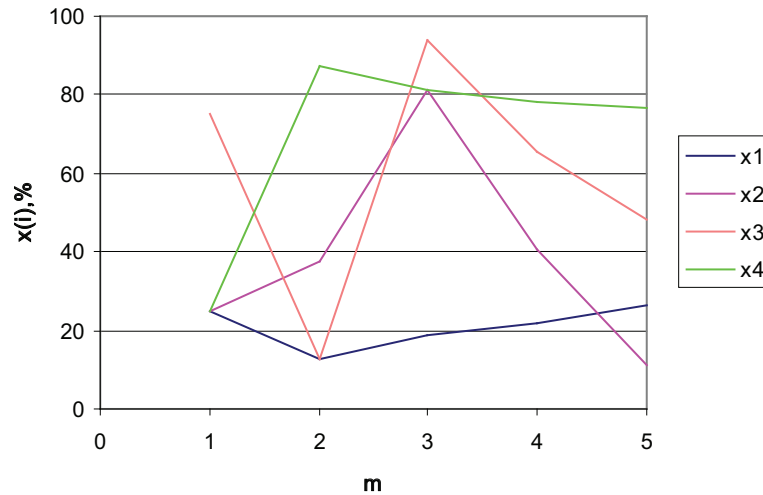


Рис. 4. Изменение значений функции рассогласования

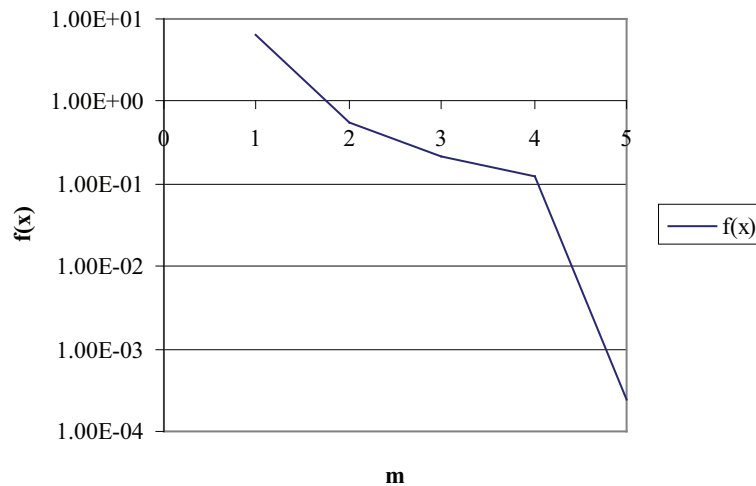


Рис. 5. Изменение значений функции переменных управления

Теперь могут быть определены геометрические параметры сечения трубы и физические характеристики потока жидкости:

$$D_* = 0.0515625 \text{ м}; h_* = 0.001109375 \text{ м}; \rho_* = 1484.375 \text{ кг/м}^3;$$

$$v_* = 13.78125 \text{ м/с}.$$

Некоторые результаты применения гибридных алгоритмов для коррекции расчетной модели ракеты-носителя приведены в работе [8].

### Список литературы

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

2. Sacco W.F., de Oliveira C.R.E. A new stochastic optimization algorithm based on particle collisions // Proceedings of the 2005 ANS Annual Meeting. Transactions of the American Nuclear Society, 2005. V. 92. P. 657-659.
3. Sacco W.F., Filho H.A., Henderson N., de Oliveira C.R.E. A Metropolis algorithm combined with Nelder-Mead Simplex applied to nuclear reactor core design // Annals of Nuclear Energy. 2008. V. 35, № 5. P. 861-867.
4. Сулимов В.Д., Шкапов П.М. Методология решения экстремальных задач для механических и гидромеханических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2012. № S8. С. 44-58.
5. Sulimov V.D., Shkapov P.M. Hybrid algorithms for multiobjective optimization of mechanical and hydromechanical systems // Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. V. 2, № 3. P. 190-196.
6. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 428 с.
7. Хачатурян С.А. Волновые процессы в компрессорных установках. М.: Машиностроение, 1983. 224 с.
8. Дорошенко С.А., Кытманов И.В. Гибридные алгоритмы коррекции расчетной модели ракеты-носителя // Студенческий научный сборник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011., Т.11.- Ч.1.-С.150-151.