

УДК 681.513.1

## **Операторный метод получения передаточных функций летательного аппарата в трехканальной системе стабилизации с перекрёстными связями**

*Латыпова П.А., студент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Системы автоматического управления летательными аппаратами»*

*Научный руководитель: Воронов Е.М., д.т.н, профессор  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[evgeniy.voronov@iu1.bmstu.ru](mailto:evgeniy.voronov@iu1.bmstu.ru)*

Движение летательного аппарата (ЛА) характеризуется сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений. Основные методы исследования этих уравнений в теории автоматического управления связаны с их предварительной линеаризацией. Существуют различные методы линеаризации. Широко распространен метод линеаризации уравнений относительно малых отклонений параметров движения от их значений для некоторого опорного движения. Близость линеаризованной траектории к опорной при малых возмущающих влияниях служит основанием для линеаризации. При линеаризации уравнений нелинейные функции раскладываются в ряд Тейлора. Линеаризацию также можно проводить методом вариаций, что гораздо проще. При этом результаты аналогичны. Условия, при которых проводится линеаризация, различны. Традиционный метод линеаризации ориентируется на невозмущенную опорную траекторию, близкую к прямолинейной [1], на которой углы атаки и скольжения ( $\alpha_0, \beta_0$ ), крена и скоростного крена ( $\gamma_{c0}, \gamma_0$ ), являются малыми величинами, близкими к нулю. В современных высокоманевренных ЛА опорная траектория является возмущенной, при этом указанные углы не равны нулю, что приводит к появлению перекрестных связей между каналами стабилизации по тангажу, рысканию и крену. Линеаризация с учетом не равных нулю, но ограниченных величин данных углов позволяет получить полное описание перекрестных связей [6]. Далее на рисунке 1 представлен пример структурной схемы трехканальной системы стабилизации с перекрестными связями [6].

**О допустимых упрощенных условиях в последовательных вариантах линеаризации движения осесимметричного ЛА с перекрёстными связями.** Далее получена система уравнений, описывающих движение ЛА. Как известно [1],

динамические уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на оси полускоростной системы координат могут быть получены в виде:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X_a - G \sin \Theta; \\ mV \frac{d\Theta}{dt} &= (P \sin \alpha + Y_a) \cos \gamma_c + (P \cos \alpha \sin \beta - Z_a) \sin \gamma_c - G \cos \Theta; \\ -mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} &= (P \sin \alpha + Y_a) \sin \gamma_c - (P \cos \alpha \sin \beta - Z_a) \cos \gamma_c, \end{aligned} \quad (1)$$

где:  $m$  – масса ЛА,  $V$  – скорость ЛА,  $X_a, Y_a, Z_a$  – проекции аэродинамической силы, действующей на ЛА, на оси полускоростной системы координат,  $P$  – сила тяги,  $G$  – сила тяжести, действующая на ЛА,  $\alpha, \beta$  – углы атаки и скольжения,  $\gamma_c$  – скоростной угол крена,  $\Theta$  – угол наклона траектории,  $\Psi$  – угол поворота траектории.

Движение ЛА как твёрдого тела в связанной системе координат описываются уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора угловой скорости ЛА на оси связанной системы координат OXYZ,  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции аппарата относительно тех же осей,  $M_x, M_y, M_z$  – проекции момента всех внешних сил.

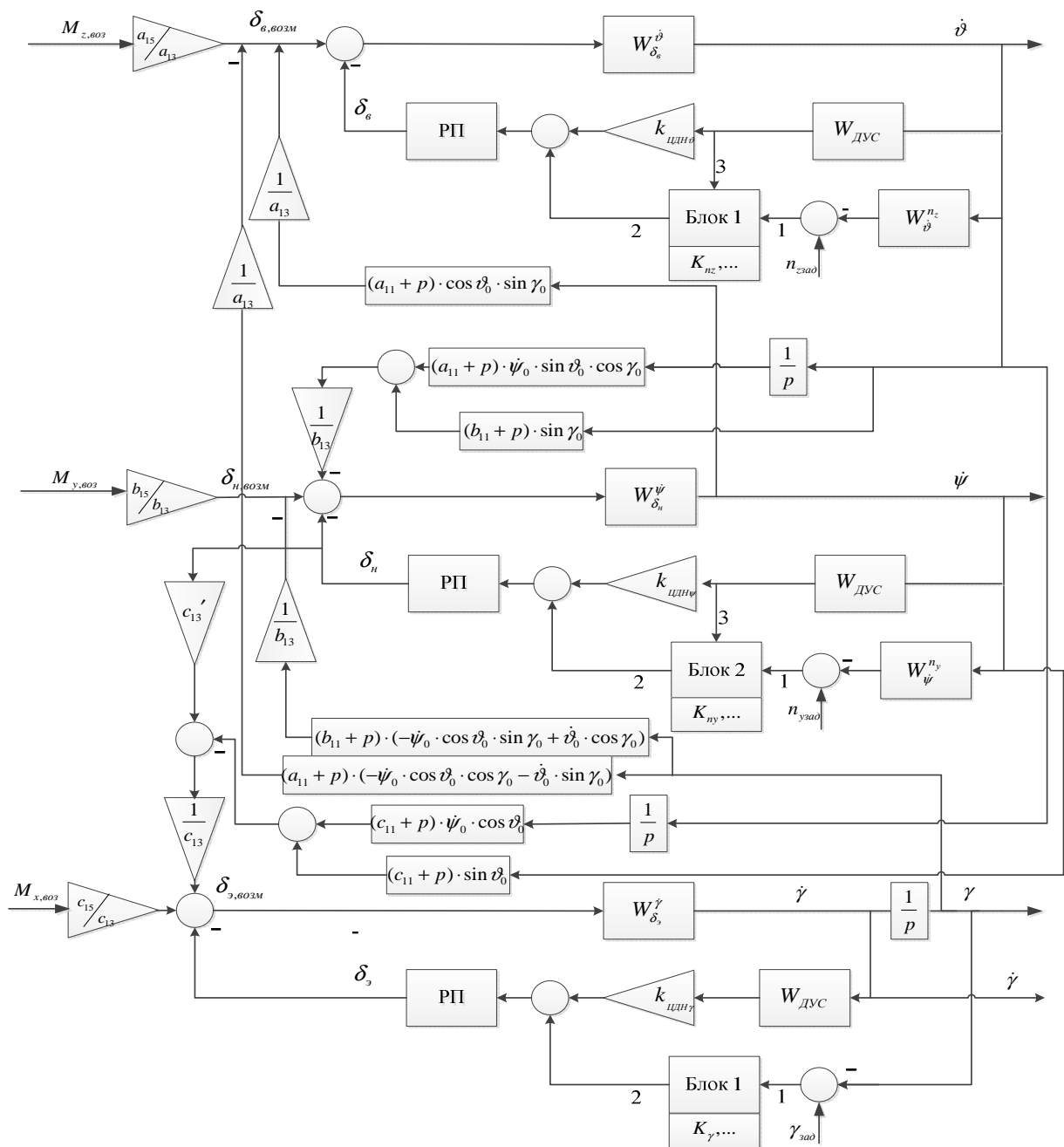


Рис. 1. Структурная схема трёхканальной системы стабилизации с перекрёстными связями

Проецирование угловых скоростей вращения связанной системы координат (ССК) ЛА на её же оси позволяет получить кинематические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение ЛА:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \dot{\gamma} + \psi \sin \vartheta; \\
 \omega_y &= \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma; \\
 \omega_z &= -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Кинематические уравнения движения ЦМ ЛА в проекциях на земные оси:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dx} &= V \cos \Theta \cos \Psi; \\ \frac{dy}{dx} &= V \sin \Theta; \\ \frac{dz}{dx} &= -V \cos \Theta \sin \Psi.\end{aligned}\tag{4}$$

Приведённая система уравнений (1) – (4) является сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений, и для дальнейшего исследования необходима линеаризация. Далее эти уравнения линеаризуются относительно малых отклонений параметров движения от их невозмущённых значений (значений на опорной траектории). Линеаризованные уравнения получаются варьированием исходных уравнений. Процесс варьирования уравнения аналогичен процессу взятия дифференциала от каждого члена уравнения, причём бесконечно малое приращение аргумента (дифференциал) заменяется конечным (вариацией). Не варьируемые величины берутся при равновесных значениях аргумента.

Необходимо отметить, что силы и моменты, действующие на ЛА, в основном являются сложными нелинейными функциями кинематических параметров движения и углов отклонения органов управления [1]. Кроме того, принят ряд упрощений [1], позволяющих пренебречь вариациями скорости ( $V = V_0 + \Delta V; V \approx V_0$ ), зависимостью аэродинамических сил от углов отклонения ОУ и моментов – от угловой скорости ОУ, влиянием силы тяжести, которая много меньше сил тяги и подъёмной силы крыльев. Если также пренебречь эффектом скоса потока, аэродинамические моменты не будут зависеть от углов атаки и скольжения  $\alpha, \beta$ . Тяга двигательной установки (ДУ) считается известной и с малой вариацией в короткопериодическом движении ( $P = P_0 + \Delta P \approx P_0$ ) [1]. Высота считается постоянной, так как влияние вариаций высоты на вариации других параметров движения мало, а также высота не является регулируемой переменной в проектируемой системе стабилизации.

С учётом допустимых упрощений линеаризованные зависимости сил и моментов от кинематических параметров движения и углов отклонения органов управления примут вид (5).

$$\begin{aligned}
X_a(\alpha, \beta) &\equiv X_{a0} + X_a^\alpha \Delta\alpha + X_a^\beta \Delta\beta + o(\alpha, \beta); \\
Y_a(\alpha) &\equiv Y_{a0} + Y_a^\alpha \Delta\alpha + o(\alpha); \\
Z_\beta(\beta) &\equiv Z_{a0} + Z_a^\beta \Delta\beta + o(\beta); \\
M_x(\beta, \delta_H, \delta_3, \omega_x) &\equiv M_{x0} + M_{x0}^\beta \Delta\beta + M_{x0}^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_{x0}^{\delta_3} \Delta\delta_3 + M_{x0}^{\omega_x} \Delta\omega_x + o(\beta, \delta_H, \delta_3, \omega_x); \\
M_y(\beta, \delta_H, \omega_y) &\equiv M_{y0} + M_{y0}^\beta \Delta\beta + M_{y0}^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_{y0}^{\omega_y} \Delta\omega_y + o(\beta, \delta_H, \omega_y); \\
M_z(\alpha, \delta_B, \omega_z) &\equiv M_{z0} + M_{z0}^\alpha \Delta\alpha + M_{z0}^{\delta_B} \Delta\delta_B + M_{z0}^{\omega_z} \Delta\omega_z + o(\alpha, \delta_B, \omega_z),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $o(\cdot)$  означает бесконечно малую величину.

После подстановки (3) в (2) и варьирования (1), (2) с учетом (5) получена линеаризованная система уравнений движения ЛА (6):

$$\begin{aligned}
mV\Delta\dot{\theta} &= \left( -(P \sin \alpha_0 + Y_{a0}) \sin \gamma_{c0} + \cos \gamma_{c0} (P \cos \alpha_0 \sin \beta_0 - Z_{a0}) \right) \Delta\gamma_c + \\
&+ \Delta\alpha (P \cos \alpha_0 \cos \gamma_{c0} - P \sin \alpha_0 \sin \beta_0 \sin \gamma_{c0}) + \\
&+ P \cos \alpha_0 \cos \beta_0 \sin \gamma_{c0} \Delta\beta + Y_a^\alpha \cos \gamma_{c0} \Delta\alpha - Z_a^\beta \sin \gamma_{c0} \Delta\beta \\
mV \sin \theta_0 \dot{\Psi}_0 \Delta\theta - mV \cos \theta_0 \Delta\dot{\Psi} &= \left( (P \sin \alpha_0 + Y_{a0}) \cos \gamma_{c0} + \sin \gamma_{c0} (P \cos \alpha_0 \sin \beta_0 - Z_{a0}) \right) \Delta\gamma_c + \\
&+ \Delta\alpha (P \cos \alpha_0 \sin \gamma_{c0} + P \sin \alpha_0 \sin \beta_0 \cos \gamma_{c0}) - \\
&- P \cos \alpha_0 \cos \beta_0 \cos \gamma_{c0} \Delta\beta + Y_a^\alpha \sin \gamma_{c0} \Delta\alpha + Z_a^\beta \cos \gamma_{c0} \Delta\beta \\
I_x \left[ \Delta\ddot{\gamma} + \underbrace{\Delta\ddot{\psi} \sin \vartheta_0}_1 + \underbrace{\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \Delta\dot{\vartheta}}_2 \right] &= \\
= M_x^\beta \Delta\beta + \underbrace{M_x^{\delta_H} \Delta\delta_H}_3 + \underbrace{M_x^{\delta_3} \Delta\delta_3}_4 + \underbrace{M_x^{\omega_x} [\Delta\dot{\gamma} + \Delta\dot{\psi} \sin \vartheta_0 + \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \Delta\vartheta]}_5 + M_{x, \text{BO3M}} \\
I_y \left[ \underbrace{\Delta\dot{\gamma} (-\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 + \dot{\vartheta}_0 \cos \gamma_0)}_6 - \underbrace{\Delta\dot{\vartheta} (\dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \cos \gamma_0)}_7 + \Delta\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 + \underbrace{\Delta\dot{\vartheta} \sin \gamma_0}_8 \right] &= \\
= M_y^\beta \Delta\beta + M_y^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_{y, \text{BO3M}} + \\
+ M_y^{\omega_y} \left[ \underbrace{\Delta\gamma (-\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 + \dot{\vartheta}_0 \cos \gamma_0)}_9 - \underbrace{\Delta\vartheta (\dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \cos \gamma_0)}_{10} + \Delta\psi \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 + \underbrace{\Delta\dot{\vartheta} \sin \gamma_0}_{11} \right] \\
I_z \left[ \underbrace{(-\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 - \dot{\vartheta}_0 \sin \gamma_0)}_{12} \Delta\dot{\gamma} + \Delta\vartheta \dot{\psi}_0 \sin \gamma_0 - \underbrace{\Delta\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0}_{13} + \Delta\ddot{\vartheta} \cos \gamma_0 \right] &= \\
= M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\delta_B} \Delta\delta_B + M_{z, \text{BO3M}} + \\
+ M_z^{\omega_z} \left[ \underbrace{(-\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 - \dot{\vartheta}_0 \sin \gamma_0)}_{14} \Delta\gamma + \Delta\dot{\vartheta} \dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \sin \gamma_0 - \underbrace{\Delta\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0}_{15} + \Delta\dot{\vartheta} \cos \gamma_0 \right]
\end{aligned} \tag{6}$$

Все величины в уравнениях (6), обозначенные нулевым индексом, относятся к опорной траектории. В системе уравнений (6):

- 1.3.4, – перекрестные связи канала рыскания с каналом крена;
- 5 – перекрестные связи канала тангажа с каналом крена;
- 6.9 – перекрестные связи канала крена с каналом рыскания;
- 7.8.10.11 – перекрестные связи канала тангажа с каналом рыскания;
- 114 – перекрестные связи канала крена с каналом тангажа;
- 13.15 – перекрестные связи канала рыскания с каналом тангажа.

Следует отметить, что в данных трёх уравнениях (6) величины:

$$\Delta\alpha \neq \Delta\vartheta - \Delta\theta; \Delta\beta \neq \Delta\psi - \Delta\Psi \quad (7)$$

Выражения (7) имеют более общий вид, который получен далее.

При линеаризации и получении системы (6) учтено, что вариации переменных относительно опорной траектории являются малыми величинами и их произведения являются величинами второго порядка малости, которые отбрасывались. Малыми являются также опорные значения угловых скоростей, поэтому их произведения друг на друга и на вариации есть величины второго порядка малости.

Система (6) составляет наиболее общий вариант линеаризации со сложными уравнениями поступательного и углового движения и ещё более сложными линеаризованными соотношениями между углами  $\Psi, \theta, \gamma_c$  скоростной СК и углами  $\vartheta, \psi, \gamma$  связанной СК через углы  $\alpha$  и  $\beta$  на опорной траектории и в отклонениях – вариациях, которые здесь не приводятся из-за сложного вида.

С целью последовательного допустимого упрощения данных соотношений и сопутствующего допустимого упрощения системы (6) с перекрёстными связями далее рассмотрены три последовательных варианта линеаризации на основе углов атаки  $\alpha_0$ , скольжения  $\beta_0$ , крена  $\gamma_0$  и скоростного крена  $\gamma_{c0}$ .

Первый вариант предполагает, что величины  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_{c0}, \gamma_0$  могут принимать любые физически допустимые значения. Результатом линеаризации будет являться система (6), представляющая собой наиболее общую вид системы уравнений движения ЛА.

Во втором варианте предполагается, что углы  $\alpha_0, \beta_0$  – малые величины, что является допустимым в типичной ситуации на опорной траектории и упрощает описание линеаризованного поступательного движения ЛА в продольном и боковом канале с перекрёстными связями по сравнению с первыми двумя уравнениями (6), соотношения

между углами  $\Psi, \theta, \gamma_c$  и  $\psi, \vartheta, \gamma$  через углы  $\alpha$  и  $\beta$  в исходном виде на опорной траектории и в отклонениях-вариациях при полном сохранении трёх последних уравнений системы (6) углового движения с перекрёстными связями.

В третьем варианте принимается, что углы  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_{c0}, \gamma_0$  являются малыми с малыми отклонениями органов управления  $\delta_\theta, \delta_\eta, \delta_\psi$ . В большинстве случаев это допущение не является грубым, а кроме того, так как ЛА является осесимметричным, то при определенных дополнительных допущениях [1] линейная система уравнений распадается на независимые системы более низкого порядка с исчезновением перекрестных связей. При этом, как известно [1], движение ЛА можно разделить на продольное и боковое. Например, уравнения продольного движения имеют вид:

$$\begin{aligned} mV\Delta\dot{\Theta} &= P\Delta\alpha + Y_a^\alpha\Delta\alpha; \\ I_z\Delta\ddot{\vartheta} &= M_z^\alpha\Delta\alpha + M_z^{\delta_\theta}\Delta\delta_\theta + M_z^{\omega_z}\Delta\dot{\vartheta} + M_{z\text{возм}}; \\ \Delta\alpha &= \Delta\vartheta - \Delta\Theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что при применении первого и второго варианта линеаризации формируются многосвязные системы уравнений для продольного, бокового канала с короткопериодическим поступательным угловым движением и канала крена. Эти системы уравнений представляют собой более общий вид системы (8). Следовательно, передаточные функции, которые можно получить на основе этих систем, так же обобщают передаточные функции, получаемые из (8).

**Получение линеаризованного описания динамики поступательного движения ЛА и динамико-кинематического углового движения ЛА по тангажу в продольном канале с учётом перекрёстных связей при малых углах  $\alpha_0, \beta_0$ .** Первое уравнение системы (6) после учёта малости углов  $\alpha_0, \beta_0$  приводится к виду:

$$\begin{aligned} mV\Delta\dot{\Theta} &= -(Y_{a0} \sin \gamma_{c0} + Z_{a0} \cos \gamma_{c0})\Delta\gamma_c + (P \cos \gamma_{c0} + Y_a^\alpha \cos \gamma_{c0})\Delta\alpha + \\ &+ (P \sin \gamma_{c0} - Z_a^\beta \sin \gamma_{c0})\Delta\beta \end{aligned} \quad (9)$$

где:  $\Delta\beta, \Delta\gamma_c$  – перекрёстные связи.

Линеаризованное соотношение между  $\Delta\gamma_c, \Delta\gamma$  при малых  $\alpha_0, \beta_0$  имеет следующий вид:

$$a \cdot \Delta\gamma_c = b \cdot \Delta\gamma + c \cdot \Delta\Theta - d \cdot \Delta\vartheta - e \cdot \Delta\beta, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \cos \gamma_{c0} \cos \theta_0; \quad b = \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0; \quad c = \sin \gamma_{c0} \sin \theta_0; \\ d &= \sin \gamma_0 \sin \vartheta_0; \quad e = \cos \beta_0 \sin \vartheta_0 \approx \sin \vartheta_0. \end{aligned}$$

Связь между  $\gamma_{c0}$  и  $\gamma_c$  на опорной траектории при малых  $\alpha_0, \beta_0$  имеет вид (11):

$$\sin \gamma_{c0} \cos \theta_0 = \beta_0 \sin \vartheta_0 + \sin \gamma_0 \cos \vartheta_0 \quad (11)$$

Линеаризованная связь между  $\Delta\vartheta, \Delta\Theta, \Delta\alpha, \Delta\beta$  при малых  $\alpha_0, \beta_0$  имеет вид:

$$\Delta\vartheta \cos \vartheta_0 = \Delta\theta \cos \theta_0 + \Delta\alpha \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0 + \Delta\beta \sin \gamma_0 \cos \vartheta_0 \quad (12)$$

Уравнение линеаризованного углового движения ЛА в продольном канале по углу тангажа с перекрёстными связями (см. пятое уравнение системы (6)) получено на основе линеаризации с допущениями третьего уравнения по угловой скорости системы (3):

$$\Delta\omega_z = \left( -\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 - \dot{\vartheta}_0 \sin \gamma_0 \right) \Delta\gamma + \dot{\psi}_0 \Delta\vartheta \sin \vartheta_0 \sin \gamma_0 - \Delta\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 + \Delta\dot{\vartheta} \cos \gamma_0 \quad (13)$$

и подстановки (13) в выражение для момента  $M_z$  (пятое выражение в системе (6)), а также подстановкой (13) и полученного выражения для  $M_z$  в линеаризованное третье уравнение системы (2). В результате получаем пятое уравнение системы (6) с полным набором перекрёстных связей. Полученная система уравнений и соотношений (9), (10), (12) вместе с пятым уравнением системы (6) дает полное описание динамики ЛА в канале тангажа во втором варианте линеаризации (где  $\alpha_0, \beta_0$  - малые величины) при наличии перекрёстных связей.

**Получение линеаризованного описания динамики поступательного движения ЛА и динамико-кинематического углового движения ЛА по рысканию в боковом канале с учётом перекрёстных связей при малых углах  $\alpha_0, \beta_0$ .** Далее рассмотрены результаты по аналогии с разделом 2. Второе уравнение системы (6) после учёта малости углов приводится к виду:

$$mV \sin \theta_0 \dot{\Psi}_0 \Delta\theta - mV \cos \theta_0 \Delta\dot{\Psi} = (Y_{a0} \cos \gamma_{c0} - Z_{a0} \sin \gamma_{c0}) \Delta\gamma_c + (P + Y_a^\alpha) \Delta\alpha \sin \gamma_{c0} + (Z_a^\beta - P) \cos \gamma_{c0} \Delta\beta, \quad (14)$$

где  $\Delta\Theta, \Delta\gamma_c, \Delta\alpha$  динамические перекрёстные связи,  $\Theta_0, \gamma_{c0}$  - статические перекрёстные связи.

Линеаризованное соотношение между  $\Delta\gamma_c$  и  $\Delta\gamma$  при малых углах  $\alpha_0, \beta_0$  имеет вид (10). Связь между  $\Delta\gamma_c$  и  $\Delta\gamma$  при малых углах  $\alpha_0, \beta_0$  на опорной траектории имеет вид (11). Линеаризованная связь между  $\Delta\Psi, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\vartheta, \Delta\beta$  при малых  $\alpha_0, \beta_0$  имеет следующий вид:



$$\begin{aligned} & \Delta\Psi \cos \Psi_0 \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \Psi_0 \sin \theta_0 = \\ & = \Delta\psi \cos \psi_0 \cos \vartheta_0 - \Delta\vartheta \sin \vartheta_0 \sin \psi_0 - \Delta\beta(\cos \psi_0 \cos \gamma_0 - \sin \gamma_0 \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) + \\ & + \Delta\alpha(\cos \psi_0 \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение линеаризованного углового движения ЛА в боковом канале по углу рыскания с перекрёстными связями (см. четвёртое уравнение системы (6)), полученное на основе линеаризации с допущениями второго уравнения по угловой скорости системы (3):

$$\begin{aligned} \Delta\omega_y = & \Delta\gamma(-\dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \sin \gamma_0 + \dot{\vartheta}_0 \cos \gamma_0) - \\ & - \Delta\vartheta(\dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \cos \gamma_0) + \Delta\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0 + \Delta\dot{\vartheta} \sin \gamma_0, \end{aligned} \quad (16)$$

и подстановки (16) в выражение для момента  $M_y$  (пятое выражение в системе (6)), а также подстановкой (16) и полученного выражения для  $M_y$  в линеаризованное второе уравнение системы (2). В результате получено четвёртое уравнение системы (6) с полным набором перекрёстных связей. Полученная система уравнений и соотношений (14), (10), (15) вместе с четвёртым уравнением системы (9) даёт полное описание динамики ЛА в канале рыскания во втором варианте линеаризации при наличии перекрёстных связей.

**Получение линеаризованного описания динамико-кинематического движения ЛА по каналу крена с перекрёстными связями.** Аналогично разделам 2 и 3 уравнения линеаризованного углового движения ЛА по углу крена с перекрёстными связями (см. третье уравнение системы (6)), полученное на основе линеаризации с допущениями первого уравнения по угловой скорости  $\omega_x$  системы (3):

$$\Delta\omega_x = \Delta\dot{\gamma} + \Delta\psi \sin \vartheta_0 + \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 \Delta\vartheta \quad (17)$$

и подстановки (17) в выражение для момента  $M_x$  (четвёртое выражение в системе (6)), а также подстановки (17) и полученного выражения для  $M_x$  в линеаризованное первое уравнение системы (2). В результате получаем третье уравнение системы (6) с полным набором перекрёстных связей. Через функцию (10) третье уравнение системы (6) связано с линеаризованным продольным и боковым движениями ЛА. Полученное третье уравнение системы (6) даёт полное описание динамики ЛА в канале крена во втором варианте линеаризации при наличии перекрёстных связей.

**Операторный метод получения передаточных функций ЛА в продольном, боковом канале и канале крена с перекрёстными связями во втором варианте линеаризации при малых углах  $\alpha_0, \beta_0$  на опорной возмущенной траектории.** Для получения передаточных функций ЛА данная трёхканальная система с перекрёстными связями приведена в компактном виде, преобразованном по Лапласу. Преобразованы по

Лапласу следующие восемь уравнений: (9), (10), (12), пятое уравнение системы (6), (14), (15), четвертое уравнение системы (6), третье уравнение системы (6). При этом учтена малость углов  $\alpha_0, \beta_0$ . Получена система уравнений в следующем виде (18), где знак « $\Delta$ » и аргумент « $p$ » опущены :

$$\left\{ \begin{array}{l} p\theta = -d_1\gamma_c + d_2\alpha + d_3\beta \\ K_1\gamma_c = K_2\gamma + K_3\theta - K_4\vartheta - K_5\beta \\ l_1\vartheta = l_2\theta + K_2\alpha + l_3\beta \\ \left[ (a_{11} + p)m_1 + (a_{11}p + p^2)m_2 \right] \vartheta - (a_{11}p + p^2)l_3\Psi + (a_{11} + p)m_3\gamma + a_{12}\alpha = -a_{13}\delta_\theta + a_{15}M_{z\theta} \\ n_1\theta - l_2p\Psi = -n_3\gamma_c + n_4\alpha - n_5\beta \\ r_1\Psi - r_2\theta = r_3\Psi - r_4\vartheta - r_5\beta + r_6\alpha \\ -(b_{11} + p)m_5\vartheta + (b_{11}p + p^2)l_2\Psi + (b_{11} + p)m_4\gamma + b_{12}\beta = -b_{13}\delta_\theta + b_{15}M_{y\theta} \\ (c_{11} + p)m_7\vartheta + (c_{11}p + p^2)K_5\Psi + (c_{11}p + p^2)\gamma + c_{12}\beta = -c_{13}\delta_\theta + c_{15}M_{x\theta} \end{array} \right. \quad (18)$$

В системе (18) используются следующие обозначения:

$$d_1 = \left( \frac{Y_{a0}}{mV} \sin \gamma_{c0} + \frac{Z_{a0}}{mV} \cos \gamma_{c0} \right); d_2 = a_{42} \cos \gamma_{c0}; d_3 = b_{42} \sin \gamma_{c0};$$

$$K_1 = \cos \gamma_{c0} \cos \theta_0; K_2 = \cos \gamma_0 \cos \vartheta_0; K_3 = \sin \gamma_{c0} \sin \theta_0; K_4 = \sin \gamma_0 \sin \vartheta_0; K_5 = \sin \vartheta_0;$$

$$l_1 = \cos \vartheta_0; l_2 = \cos \theta_0; l_3 = \sin \gamma_0 \cos \vartheta_0;$$

$$m_1 = \dot{\psi}_0 \sin \gamma_0 \sin \vartheta_0; m_2 = \cos \gamma_0;$$

$$n_1 = \sin \theta_0 \dot{\Psi}_0; n_3 = \left( -\frac{Y_{a0}}{mV} \cos \gamma_{c0} + \frac{Z_{a0}}{mV} \sin \gamma_{c0} \right); n_4 = a_{42} \sin \gamma_{c0}; n_5 = b_{42} \cos \gamma_{c0};$$

$$r_1 = \cos \Psi_0 \cos \theta_0; r_2 = \sin \theta_0 \sin \Psi; r_3 = \cos \Psi_0 \cos \vartheta_0; r_4 = \sin \vartheta_0 \sin \Psi_0;$$

$$r_5 = (\cos \Psi_0 \cos \gamma_0 - \sin \Psi_0 \sin \vartheta_0 \sin \gamma_0); r_6 = (\cos \Psi_0 \sin \gamma_0 + \sin \Psi_0 \sin \vartheta_0 \cos \gamma_0).$$

Коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  соответствуют аэродинамическим коэффициентам ЛА в продольном движении, движении рыскания и движении крена соответственно [2].

Систему (18) необходимо переписать в соответствии с вектором состояния  $x$ :

$$x = (\Delta\vartheta(p), \Delta\Psi(p), \Delta\gamma(p), \Delta\Theta(p), \Delta\gamma_c(p), \Delta\Psi(p), \Delta\alpha(p), \Delta\beta(p))$$

Затем проведен переход к вектору состояния  $y$ :

$$y = (p\Delta\vartheta(p), p\Delta\Psi(p), p\Delta\gamma(p), \Delta\Theta(p), \Delta\gamma_c(p), \Delta\Psi(p), \Delta\alpha(p), \Delta\beta(p))$$

Для этого преобразована система (18). Полученная система записана в виде  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ , где:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p & d_1 & 0 & -d_2 & -d_3 \\ \frac{\mathbf{K}_4}{p} & 0 & \frac{-\mathbf{K}_2}{p} & -\mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_1 & 0 & 0 & \mathbf{K}_5 \\ \frac{l_1}{p} & 0 & 0 & -l_2 & 0 & 0 & -\mathbf{K}_2 & -l_3 \\ \frac{[(a_{11}+p)m_1 + (a_{11}p+p^2)m_2]}{p} & \frac{-(a_{11}+p)pl_3}{p} & \frac{(a_{11}+p)m_3}{p} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_1 & n_3 & -l_2p & -n_4 & n_5 \\ \frac{r_4}{p} & \frac{-r_3}{p} & 0 & -r_2 & 0 & r_1 & -r_6 & r_5 \\ \frac{(b_{11}+p)(m_5 - pm_6)}{p} & \frac{(b_{11}p+p^2)l_2}{p} & \frac{(b_{11}+p)m_4}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} \\ \frac{(c_{11}+p)m_7}{p} & \frac{(c_{11}p+p^2)\mathbf{K}_5}{p} & \frac{(c_{11}p+p^2)}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \end{bmatrix}$$

(19)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a_{13}\Delta\delta_B + a_{15}M_{zB} \\ 0 \\ 0 \\ -b_{13}\Delta\delta_H + b_{15}M_{yB} \\ -c_{13}\Delta\delta_3 + c_{15}M_{xB} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Определитель матрицы  $\mathbf{A}$  вычислен с помощью ПО MATLAB с использованием встроенной функции для вычисления определителя матрицы  $\det()$ . Полученное выражение имеет вид:

$$\Delta\mathbf{A} = (g_1p^7 + g_2p^6 + g_3p^5 + g_4p^4 + g_5p^3 + g_6p^2 + g_7p + g_8) / p^2 \quad (21)$$

Далее получена матрица  $\mathbf{A}_{\Delta\delta\theta}^{p\Delta\theta}$  (22):

$$\mathbf{A}_{\Delta\delta_6}^{p\Delta\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p & d_1 & 0 & -d_2 & -d_3 \\ 0 & 0 & \frac{-K_2}{p} & -K_3 & K_1 & 0 & 0 & K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -l_2 & 0 & 0 & -K_2 & -l_3 \\ a_{13} & \frac{-(a_{11}+p)pl_3}{p} & \frac{(a_{11}+p)m_3}{p} & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_1 & n_3 & -l_2p & -n_4 & n_5 \\ 0 & \frac{-r_3}{p} & 0 & -r_2 & 0 & r_1 & -r_6 & r_5 \\ 0 & \frac{(b_{11}p+p^2)l_2}{p} & \frac{(b_{11}+p)m_4}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & \frac{(c_{11}p+p^2)K_5}{p} & \frac{(c_{11}p+p^2)}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Определитель матрицы  $\mathbf{A}_{\Delta\delta_6}^{p\Delta\vartheta}$  (22) также вычислен с помощью функции  $\det()$  в ПО MATLAB. Полученное выражение имеет вид:

$$\mathbf{A}_{\Delta\delta_6}^{p\Delta\vartheta} = (-a_{13}\Delta\delta_B + a_{15}M_{\text{возм}}) \cdot ((b_1 \cdot p^5 + b_2 \cdot p^4 + b_3 \cdot p^3 + b_4 \cdot p^2 + b_5 \cdot p + b_6) / p)$$

$$p\Delta\vartheta(p) = \frac{|\mathbf{A}_{\Delta\delta_6 + M_{z\delta}}^{p\Delta\vartheta}|}{|\mathbf{A}|} = W_{\delta_6}^{\vartheta}(p)(-a_{13}\Delta\delta_B) + W_{M_{\text{возм}}}^{\vartheta}(p)(a_{15}M_{\text{возм}}) \quad (23)$$

Далее аналогичным образом получены матрицы  $\mathbf{A}_{\Delta\delta_H}^{p\Delta\Psi}$  и  $\mathbf{A}_{\Delta\delta_3}^{p\Delta\Upsilon}$  и вычислены определители. Определитель матрицы  $\mathbf{A}_{\Delta\delta_H}^{p\Delta\Psi}$  также вычислен с помощью функции  $\det()$  в ПО MATLAB. Полученное выражение имеет вид:

$$\mathbf{A}_{\Delta\delta_H}^{p\Delta\Psi} = (-b_{13}\Delta\delta_H + b_{15}M_{\text{yb}}) \cdot ((c_1 \cdot p^6 + c_2 \cdot p^5 + c_3 \cdot p^4 + c_4 \cdot p^3 + c_5 \cdot p^2 + c_6 \cdot p + c_7) / p^2)$$

$$p\Delta\Psi(p) = \frac{|\mathbf{A}_{\Delta\delta_H + M_{\text{yb}}}^{p\Delta\Psi}|}{|\mathbf{A}|} = W_{\delta_H}^{\Psi}(p)(-b_{13}\Delta\delta_H) + W_{M_{\text{возм}}}^{\Psi}(p)(b_{15}M_{\text{возм}}) \quad (24)$$

Аналогичным образом вычислен определитель матрицы  $\mathbf{A}_{\Delta\delta_3}^{p\Delta\Upsilon}$ , который имеет вид:

$$\mathbf{A}_{\Delta\delta_3}^{p\Delta\Upsilon} = (-c_{13}\Delta\delta_3 + c_{15}M_{\text{xв}}) \cdot ((u_1 \cdot p^5 + u_2 \cdot p^4 + u_3 \cdot p^3 + u_4 \cdot p^2 + u_5 \cdot p + u_6) / p)$$

$$p\Delta\Upsilon(p) = \frac{|\mathbf{A}_{\Delta\delta_3 + M_{\text{xв}}}^{p\Delta\Upsilon}|}{|\mathbf{A}|} = W_{\delta_3}^{\Upsilon}(p)(-c_{13}\Delta\delta_3) + W_{M_{\text{возм}}}^{\Upsilon}(p)(c_{15}M_{\text{возм}}) \quad (25)$$

Для выражений (23), (24), (25) верно следующее:

$$W_{\delta_{B, H, 3}}^{\vartheta, \Psi, \Upsilon}(p) = W_{M_{\text{возм}}}^{\vartheta, \Psi, \Upsilon}(p).$$

Полные выражения не приводятся в связи с ограниченным размером публикации.

**Пример применения операторного метода получения передаточных функций трехканальной системы стабилизации типовой противокорабельной ракеты.** По причине ограниченности размера публикации рассмотрено применения метода только для канала тангажа. Передаточные функции получены с использованием численных данных, представленных в таблицах 1 и 2. Они соответствуют реальным значениям аэродинамических коэффициентов и значениям углов и угловых скоростей на опорной траектории противокорабельной ракеты. Полет происходит на высоте  $H=504\text{м}$  при числе маха  $M=1$ .

Таблица 1

Значения углов и угловых скоростей на опорной траектории

$\Psi, \text{град}$	$\Theta, \text{град}$	$\psi, \text{град}$	$\dot{\psi}, \text{град/с}$	$\vartheta, \text{град}$	$\dot{\vartheta}, \text{град/с}$
-12,54	16,15	-13,25	-5,15	21,08	2,196
$\dot{\Psi}, \text{град/с}$	$\dot{\Theta}, \text{град/с}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$\gamma, \text{град}$	$\dot{\gamma}, \text{град/с}$
0,196	-0,363	4,87	-1,01	-3,85	28,034

А также  $\frac{Y_{a0}}{mV} = 0,0385; \frac{Z_{a0}}{mV} = 0.$

Таблица 2

Значения аэродинамических коэффициентов

$a_{11}, \text{с}^{-1}$	$a_{12}, \text{с}^{-2}$	$a_{13}, \text{с}^{-2}$	$a_{15}, 1/(\text{кг}\cdot\text{м}^2)$	$a_{42}, \text{с}^{-1}$
0,8559	28,3255	62,6142	0,001836	0,4172
$b_{11}, \text{с}^{-1}$	$b_{12}, \text{с}^{-2}$	$b_{13}, \text{с}^{-2}$	$b_{15}, 1/(\text{кг}\cdot\text{м}^2)$	$b_{42}, \text{с}^{-1}$
0,3325	4,0094	41,29639	0,001836	0,4068
$c_{11}, \text{с}^{-1}$	$c_{12}, \text{с}^{-2}$	$c_{13}, \text{с}^{-2}$	$c_{15}, 1/(\text{кг}\cdot\text{м}^2)$	$a_{43}, \text{с}^{-1}$
0,7938	68,4545	278,5714	0,1333	0,00198

С помощью ПО MATLAB получены ПФ для трех каналов, как описано выше. Для этого был написан программный код в среде MATLAB, использующий встроенные функции вычисления определителя матрицы ( $\text{det}()$ ), вычисления корней полинома

(solve()), функции, позволяющие задать ПФ в различном виде (tf() и zpk()). Для канала тангажа получена ПФ по угловой скорости тангажа:

$$W_{\delta_b}^{\dot{\delta}}(p) = \frac{45,81p^6 + 96,06p^5 + 262,3p^4 + 296,5p^3 + 88,06p^2 + 2,476p}{0,7332p^7 + 2,163p^6 + 27,66p^5 + 37,19p^4 + 102p^3 + 77,33p^2 + 2,047p + 0,1899} = \quad (26)$$

$$= \frac{62,482p(p+0,9908)(p+0,4025)(p+0,03133)(p^2+0,6724p+4,326)}{(p+0,841)(p^2+0,02394p+0,002538)(p^2+0,4205p+3,873)(p^2+1,665p+31,33)}$$

На рисунке 2 представлен годограф Найквиста, построенный для (26).

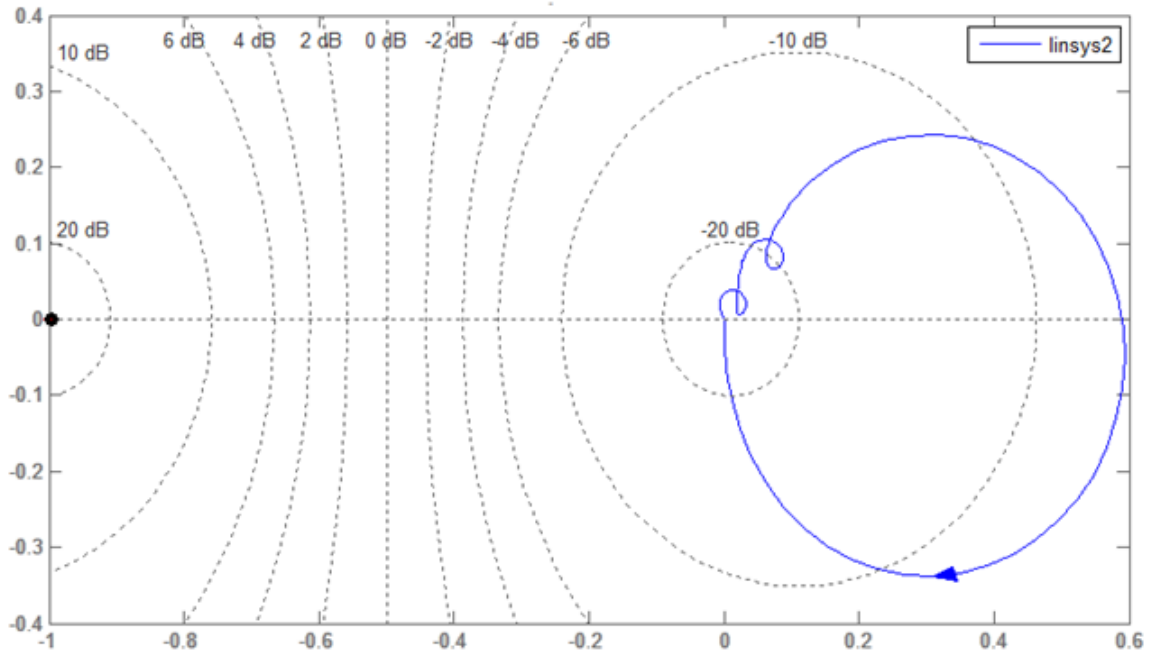


Рис. 2. Годограф Найквиста (канал тангажа)

По рис.2 и корням (26) можно сделать вывод о том, что исследуемый объект устойчив.

Также получена ПФ по угловой скорости тангажа по известной формуле [2] с использованием данных таблицы 2:

$$W_{t_{\delta_b}}^{\dot{\delta}}(p) = \frac{a_{13}p + a_{13} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{43}}{p^2 + (a_{11} + a_{42})p + a_{12} + a_{11}a_{42}} = \frac{62,61p + 26,07}{p^2 + 1,273p + 28,68} \quad (27)$$

Необходимо отметить, что отличие ПФ (26) от ПФ (27) в том, что ПФ (26) получена из системы уравнений, линеаризованных при условии, что малы углы  $\alpha_0, \beta_0$  (второй вариант линеаризации), а ПФ (27) получена из системы уравнений, линеаризованных при условии, что малы углы  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_{c0}, \gamma_0$  (третий вариант линеаризации). На рисунке 3 представлены ЛАФЧХ для ПФ (26) и (27).

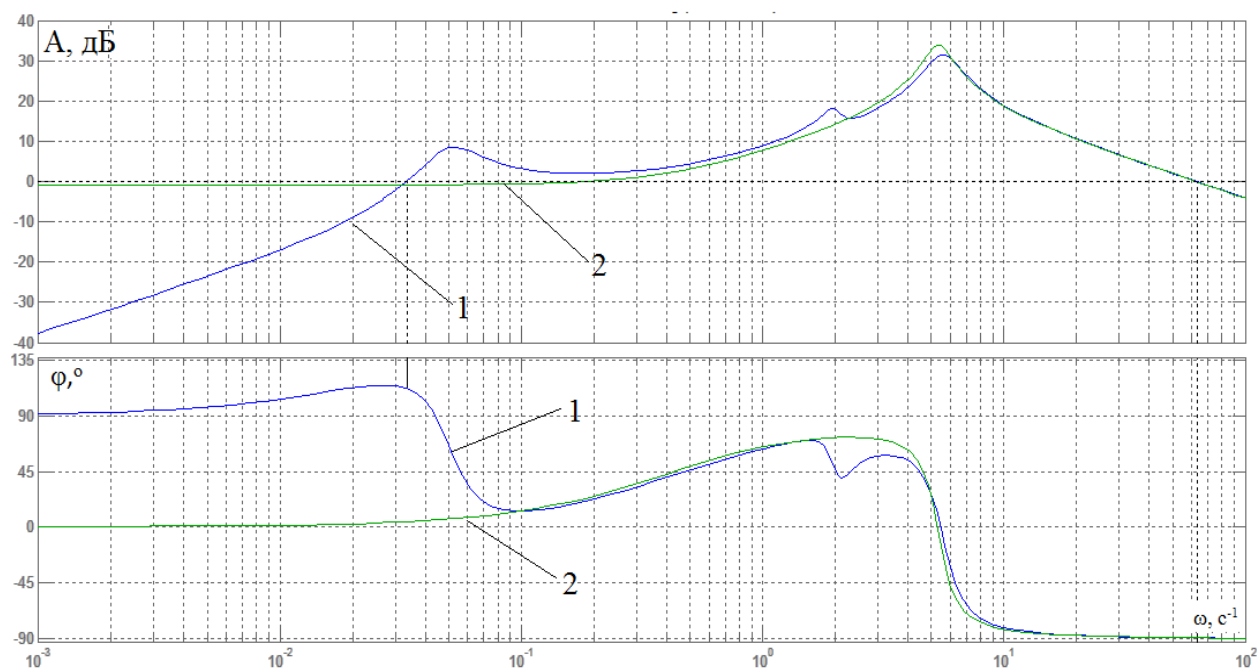


Рис. 3. ЛАФЧХ для канала тангажа для двух вариантов ПФ (1 – ПФ, соответствующая второму варианту линеаризации, 2 – ПФ, соответствующая третьему варианту линеаризации)

Как видно из рис.3, амплитудные характеристики близки, особенно ярко это проявляется в высокочастотной области, в то время как в низкочастотной области характеристики расходятся. В целом, влияние перекрестных связей хорошо видно на полученных характеристиках, хотя их общий вид близок. С целью упрощения вида ПФ рассмотрим корни числителя и знаменателя. В (30) видно, что в числителе и знаменателе имеется два звена, соответствующих корням с близкими значениями:  $(p + 0,9908)$  и  $(p + 0,841)$ . Эти звенья «компенсируют» друг друга. Заменяв их коэффициентом усиления, можно снизить порядок числителя и знаменателя до 5-го и 6-го соответственно:

$$\begin{aligned}
 W_{\delta_b}^{\dot{\delta}}(p) &= \\
 &= \frac{62,482 \cdot p \cdot 0,9908(1,009p+1)(p+0,4025)(p+0,03133)(p^2+0,6724p+4,326)}{0,841(1,189p+1)(p^2+0,02394p+0,002538)(p^2+0,4205p+3,873)(p^2+1,665p+31,33)} \approx (28) \\
 &\approx \frac{73,61 \cdot p(p+0,4025)(p+0,03133)(p^2+0,6724p+4,326)}{(p^2+0,02394p+0,002538)(p^2+0,4205p+3,873)(p^2+1,665p+31,33)}.
 \end{aligned}$$

На рисунке 4 показано, что такой подход позволяет «упростить» вид ПФ, при этом оставляя характеристики практически неизменными.

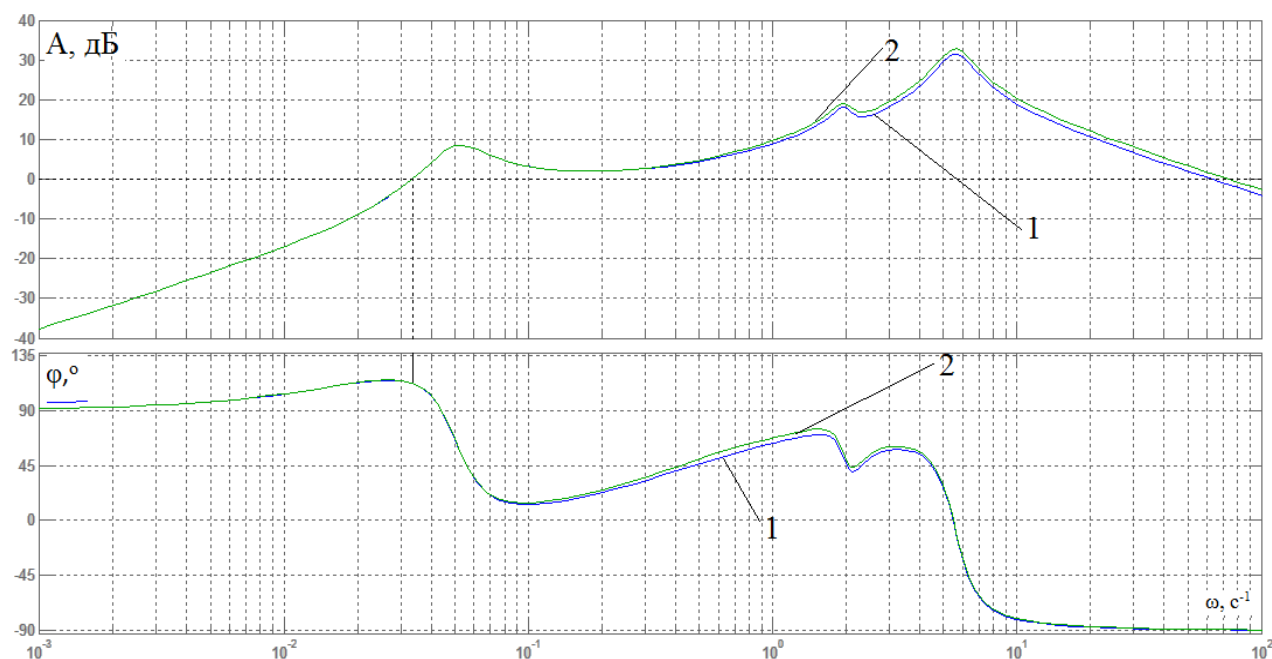


Рис. 4. ЛАФЧХ для ПФ, учитывающей перекрестные связи, без понижения порядка (1) и с понижением порядка (2) числителя и знаменателя

Известно [2], что продольное возмущенное движение ЛА разделяется на короткопериодическое и длиннопериодическое движение. В процессе управления ЛА основную роль играет короткопериодическая составляющая. Динамические свойства системы стабилизации слабо зависят от характеристик длиннопериодического движения, если постоянные времени, соответствующие этому движению, велики по сравнению со временем переходного процесса. Среди корней характеристических полиномов есть достаточно малые по сравнению с другими корни (в числителе:  $-0,03133$ , что соответствует постоянной времени  $T_1=31,92$ с, в знаменателе:  $(p^2 + 0,02394p + 0,002538)$ , что соответствует  $T_2=19,84$ с). Такие значения постоянных времени, как  $T_1$  и  $T_2$ , в данном случае соответствуют длиннопериодическому движению. Далее получена ПФ без учета указанных звеньев:

$$W_{\delta_b}^{\dot{\delta}}(p) = \frac{73,61 \cdot p(p + 0,4025)(p^2 + 0,6724p + 4,326)}{(p^2 + 0,4205p + 3,873)(p^2 + 1,665p + 31,33)}. \quad (29)$$

На рисунке 5 представлены ЛАФЧХ (26), (27), (29).



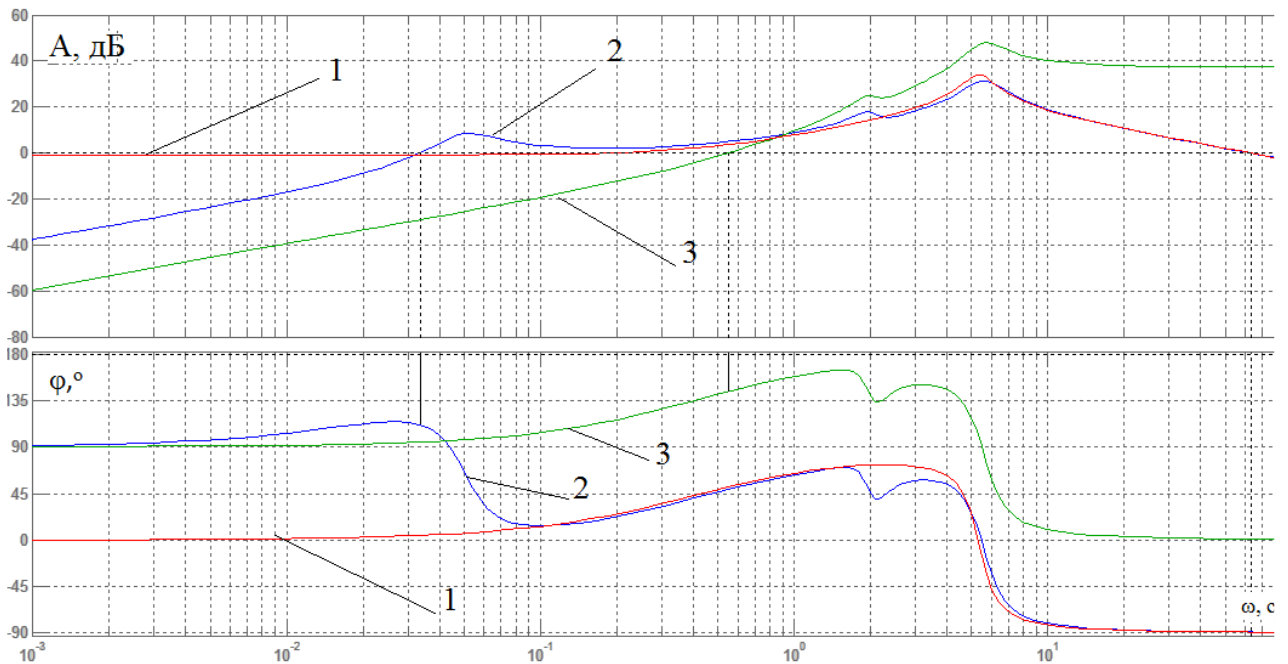


Рис. 5. ЛАФЧХ для трех вариантов ПФ: 1 – ПФ, соответствующая третьему варианту линейризации, 2 – ПФ, соответствующая второму варианту линейризации, 3 – ПФ, соответствующая второму варианту и не учитывающая длиннопериодическое движение

**Выводы.** В данной работе исследовался операторный метод получения передаточных функций ЛА в трехканальной системе стабилизации с перекрестными связями. Исследуемый метод линейризации уравнений дал возможность получить полное описание перекрестных связей. При этом были уточнены, и даже изменились, соотношения между основными углами. Получены ПФ, в числителе которых стоит полином 6-го, а в знаменателе – полином 7-го порядка. Для исследования были использованы численные данные, соответствующие малым углам атаки и скольжения, что является необходимым условием линейризации, описанной выше. В работе приведен пример применения метода для канала тангажа по причине ограниченности размера публикации. Были построены ЛАФЧХ, что позволило сделать вывод о том, что, с одной стороны, влияние перекрестных связей хорошо заметно, а с другой стороны, общий вид характеристик (амплитудных) близок. Полученные характеристики позволили так же судить об устойчивости объекта, то есть объект остался устойчивым при учете перекрестных связей. Имеются звенья, «компенсирующие» друг друга, а также звенья, соответствующие длиннопериодическому движению, что позволяет снизить порядок числителя и знаменателя, и, таким образом, упростить вид ПФ. ПФ, полученные с помощью описанного метода, можно использовать в исследованиях системы стабилизации, требующих высокого уровня точности результатов.

## Список литературы

1. Лебедев А.А., Карабанов В.А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами / под ред. А.А. Лебедева. М.: Машиностроение, 1965. 528 с.
2. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / под ред. А.А. Лебедева. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
3. Боднер В.А., Козлов М.С. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты / под ред. В.А. Боднера. М.: Оборонгиз, 1961. 508 с.
4. Кузовков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет): учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1976. 304 с.
5. Аксенов А.С., Воронов Е.М., Любавский К.К., Сычев С.И. Многокритериальная параметрическая оптимизация трехканальной системы стабилизации летательного аппарата с перекрестными связями // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 3. С. 16-36.