электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

**УДК 536.75**

# Анализ броуновского движения с учетом флуктуации коэффициента вязкого трения

***Зудилин А. И.***, *магистр*
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,*
*кафедра «Физики»*

*Научный руководитель: Морозов А. Н., д. ф.-м. н, профессор*
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,*
*кафедра «Физики»*
*bauman@bmstu.ru*

Изучение броуновского движения является одной из важных задач теоретической физики. Хорошо разработанная за последнее столетие теория броуновского движения и диффузии является приближенной [1,2]. Таким образом, уточнение теории броуновского движения становится актуальной задачей.

Было получено характеристическое уравнение, позволяющее описать броуновское движение с учетом флуктуации коэффициента вязкого трения.

$$m\frac{dv}{dt} + m\alpha v = F + \xi(t) - \eta(t)v. \qquad (1)$$

Слагаемое, учитывающее флуктуацию коэффициента вязкого трения $\eta(t)$.

$\xi(t)$ - случайный процесс, описывающий воздействие частиц среды на броуновскую частицу.

Представленное уравнение (1) в виде дифференциального уравнения Ито [3] имеет вид:

$$dV = F_m(t)dt - VdW_\gamma(t) + dW_\xi(t), \qquad (2)$$

где $W_\gamma(t)$ и $W_\xi(t)$ - процессы с независимыми приращениями.

Далее считается, что процесс $W_\gamma(t)$, описывающий флуктуации коэффициента вязкого трения представляет собой пуассоновский процесс с единичными приращениями [3], характеристическая функция которого имеет вид:

$$g_\gamma(\mu_\gamma, t) = \exp\left[\left(\exp\left(iD_\gamma\mu_\gamma\gamma\right) - 1\right)\nu_\tau t\right], \qquad (3)$$

где  $D_\gamma = \gamma_0 \tau_0$ – дисперсия пуассоновского процесса $W_\gamma(t)$, а $\nu_\tau$ - интенсивность этого процесса. Постоянная времени $\tau_0 = 1/\nu_\tau$ характеризует среднее время между очередными соударениями частиц среды с броуновской частицей.

Процесс $W_\xi(t)$ описывает случайные воздействия частиц среды на броуновскую частицу и в общем случае представляет собой обобщенный пуассоновский процесс, задаваемый характеристической функцией [3]

$$g_\xi(\mu_\xi, t) = \exp\left[\left(\exp\left(-\tfrac{1}{2} D_\xi \mu_\xi^2\right) - 1\right) \nu_\tau t\right], \qquad (4)$$

где $D_\xi = \frac{2\gamma_0}{\nu_\tau}\frac{kT}{m}$ – дисперсия пуассоновского процесса $W_\xi(t)$, характеризующая воздействие частицы среды на броуновскую частицу при единичном соударении.

Согласно [4] уравнение для характеристической функции в случае $F = 0$ имеет вид

$$g(\lambda) = \lambda^{a+\frac{1}{2}} Z_{a+\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{b}\lambda\right), \qquad (5)$$

где

$$a = \frac{\gamma_0}{\nu_\tau}$$

$$b = \frac{2\nu_\tau kT}{\gamma_0 m}.$$

Решением характеристической функции (12) является $Z_{a+\frac{1}{2}}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)$ - цилиндрическая функция [5].

Разложим функцию распределения по полиномам Эрмита. Функция распределения будет иметь вид

$$f(p) = \varphi(v) - \frac{k}{3!}\varphi^3(v) + \frac{\gamma}{4!}\varphi^4(v) + \cdots, \qquad (6)$$

где

$k$ - коэффициент асимметрии функции распределения

$\gamma$ – эксцесс функции расределения

$\varphi(v)$ - нормальная функция распределения

$$\varphi(v) = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Определим первые четыре момента функции распределения скорости броуновской частицы.

При $a = 1$ моменты будут иметь вид

$$D_1 = \frac{\partial g(\lambda)}{i\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = -e^{-38\lambda}\sqrt{19\pi}\lambda = 0,$$

$$D_2 = \frac{\partial^2 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^2}\bigg|_{\lambda=0} = e^{-38\lambda}\sqrt{19\pi}(-1+38\lambda) = -\sqrt{19\pi},$$

$$D_3 = \frac{\partial^3 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^3}\bigg|_{\lambda=0} = 76e^{-38\lambda}\sqrt{19\pi}(1-19\lambda) = 76\sqrt{19\pi},$$

$$D_4 = \frac{\partial^4 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^4}\bigg|_{\lambda=0} = 1444e^{-38\lambda}\sqrt{19\pi}(-3+38\lambda) = -4332\sqrt{19\pi},$$

которые, в свою очередь, позволяют найти первые четыре кумулянта:

$$K_1 = 0,$$

$$K_2 = -\sqrt{19\pi},$$

$$K_3 = 76\sqrt{19\pi},$$

$$K_4 = -4332\sqrt{19\pi}.$$

Кумулянты дают возможность вычислить ассиметрию функции распределения

$$k = 1.25$$

И эксцесс

$$\gamma = -563$$

Для случаев $a < 1$ не представляется возможным вычислить моменты. Первые моменты равны нулю, остальные моменты стремятся к бесконечности.

Ассиметрия полученной функции распределения уменьшается с увеличением дисперсии. С уменьшением массы частиц, различие между полученной функцией распределения и нормальной функцией становится менее заметным.

$$k = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

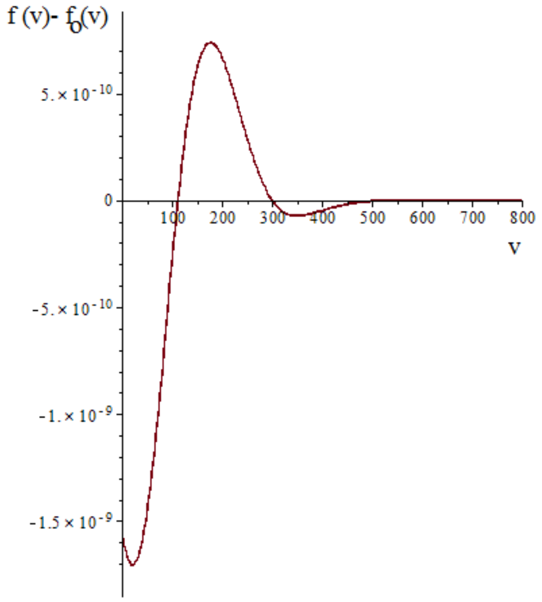
$k$ – коэффициент ассиметрии, $\mu_3 -$ центральный момент третьего порядка, $\sigma -$ среднеквадратичное отклонение.

Эксцесс полученной функции распределения отрицательный, это значит что пик «заострен» меньше, чем пик у нормальной функции распределения. С уменьшением массы частиц и увеличением дисперсии, коэффициент эксцесса уменьшается по абсолютной величине. Отличие полученной функции распределения от нормальной функции уменьшается.

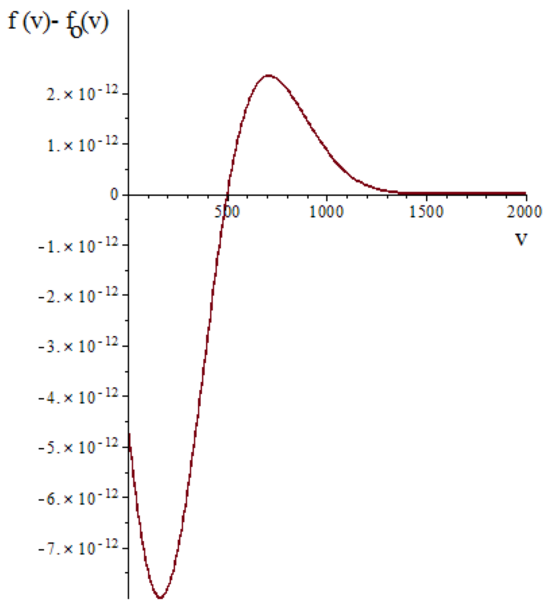
$$\gamma = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

$\gamma$ – коэффициент эксцесса, $\mu_4$ – четвертый центральный момент.

С увеличением массы частиц, различие между полученной функцией распределения и нормальной растет в абсолютном (рис. 1.) и относительном значении (рис. 2.).

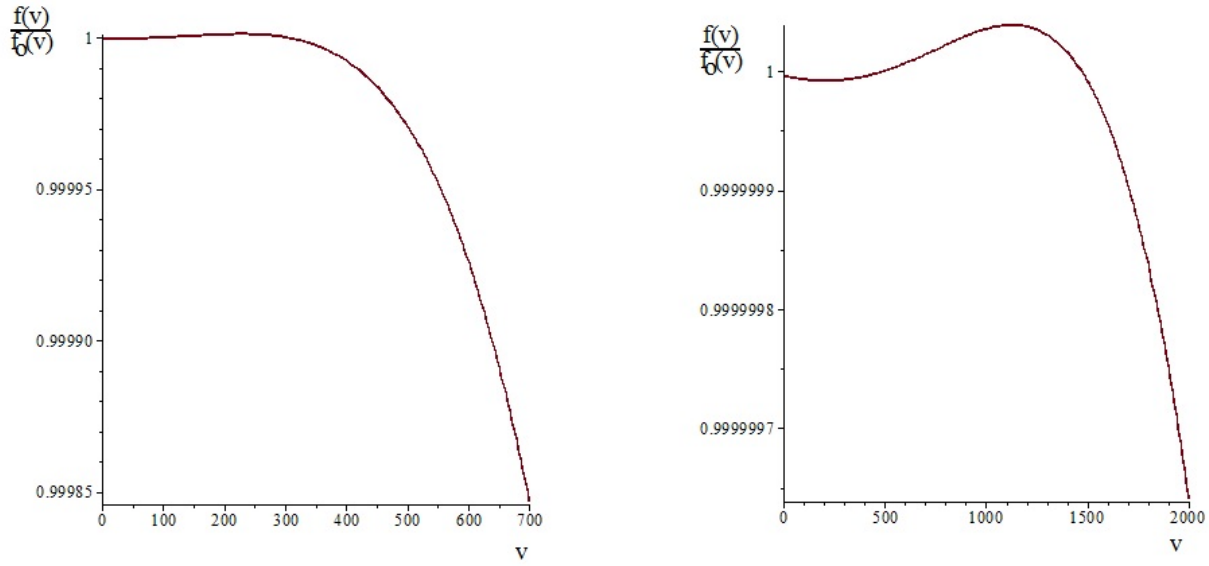



а)




б)

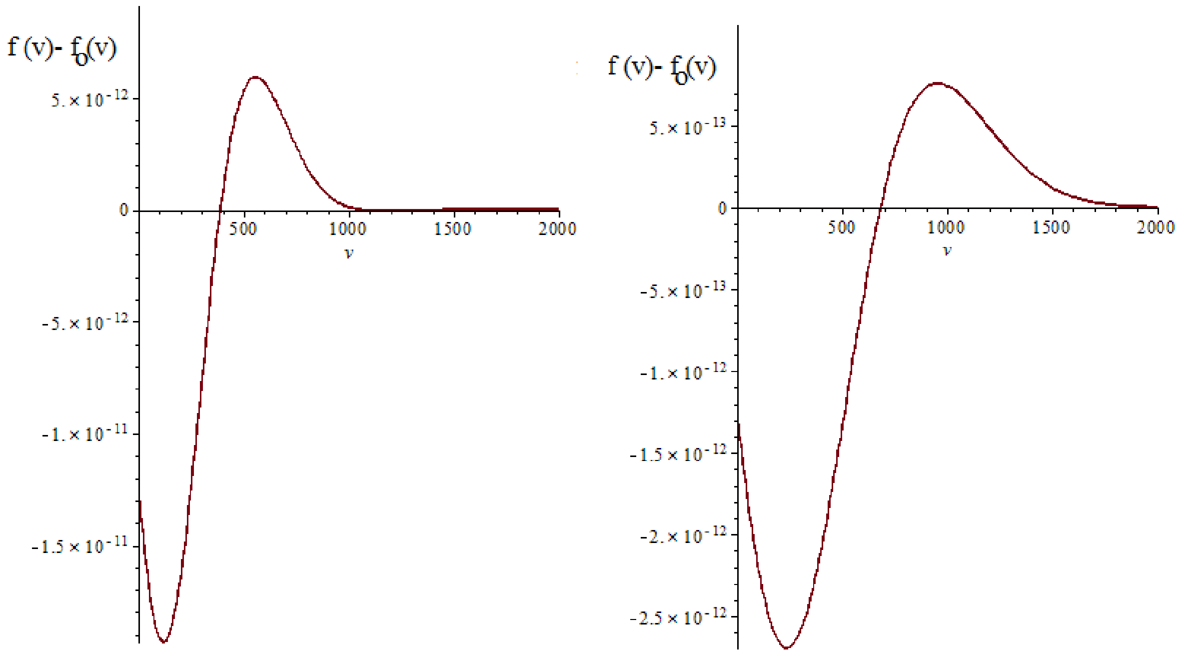
Рис. 1. Разница между полученной функцией распределения и нормальной а) для атома Au массой 196 а. е.; б) для атома F массой 19 а. е.




а) б)

Рис. 2. Отношение полученной функции распределения к нормальной а) для атома Au массой 196 а. е.; б) для атома F массой 19 а. е.

С увеличением температуры, максимальная разница между полученной функцией распределения и нормальной уменьшается, но происходит «растекание» вдоль оси скоростей (рис 3.).




а) б)

Рис. 3. Разница между полученной функцией распределения и нормальной а) для атома F при T=200; б) для атома F при T=400;

Очевидно, что мера Кульбака процесса, описываемого уравнением (7), растет с увеличением температуры среды (рис. 8). Чем больше температура среды, тем больше описываемый процесс отличается от равновесного. Аналогичная зависимость меры Кульбака от массы броуновских частиц. С ростом массы броуновских частиц, процесс все больше отличается от равновесного.

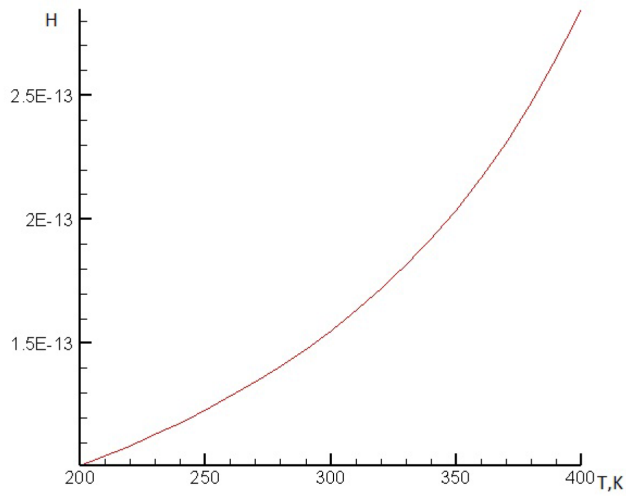



Рис. 8. Зависимость Меры Кульбака от температуры окружающей среды при постоянном значении массы броуновских частиц

Таким образом, различие между полученной функцией распределения и нормальной растет с увеличением массы броуновской частицы и температуры окружающей среды.

## Список литературы

1. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
2. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
4. Морозов А.Н. Стационарные распределения флуктуаций скорости броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 26-38.
5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
6. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.

7. Морозов А.Н. Функция распределения скоростей броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.  2012. Спец. вып. № 5. С. 39-43.
8. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Движение сферической броуновской частицы в вязкой среде как немарковский процесс // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 4. С. 3–14.