электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

 # 10, октябрь 2015

УДК 533.6.011.5

Расчет тепловых потоков на поверхности затупленных тел

Ожгибисова Ю.С., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

Научный руководитель: Котенев В.П., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,
кафедра «Вычислительной математики и математической физики»;
начальник отдела аэродинамики,
Россия, 143966, Московская обл., г. Реутов,
ОАО «ВПК «НПО машиностроения»
bauman@bmstu.ru

Введение

Существует два метода расчета параметров жидкости в пограничном слое. Первый способ заключается в численном решении системы дифференциальных уравнений пограничного слоя и основывается на использовании вычислительных машин. Второй способ состоит в нахождении методов приближенного расчета, которые позволяли бы получить необходимую информацию более простым путем. Такие решения можно получить, если отказаться от нахождения решений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям для каждой частицы, и вместо этого ограничиться отысканием решений, удовлетворяющих некоторым основным уравнениям для всего пограничного слоя и некоторым наиболее важным граничным условиям.

В рамках данной работы представлен метод расчета распределения величины теплопередачи Q_x в произвольной точке криволинейной поверхности вращения, отнесенной к тепловому потоку Q_0 в точке полного торможения. В основе указанных методов лежит применение универсальных формул для расчета давления повышенной точности, рассмотренные в работах [1] и [2], основные уравнения двумерного пограничного слоя, подробный вывод которых приведен в [3], а также метод К. Польгаузена, позволяющий получить их аналитическое решение. Приводится сравнение полученных результатов расчета тепловых потоков с численным решением уравнений Навье-Стокса, представленным в работе [4].

Построение математической модели.

Рассмотрим основные дифференциальные уравнения двумерного ламинарного пограничного слоя при установившемся течении сжимаемого совершенного газа, описанные в [3].

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\frac{dP}{dy} = 0, \text{ или } P = P_1 = \text{const}. \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u r^{\nu}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon r^{\nu}}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial h}{\partial y}\right), \tag{4}$$

$$P = \rho R T, \tag{5}$$

где u, υ - проекции скорости на ортогональные координаты x и y; ρ, P - плотность и давление; μ - коэффициент вязкости; r - цилиндрический радиус тела, для плоского течения $\nu = 0$, а для осесимметричного течения $\nu = 1$; h - энтальпия; λ - коэффициент теплопроводности; c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении, причем $c_p = \dfrac{\partial h}{\partial T}$; R - газовая постоянная; T - температура.

Общее решение уравнений (1-5) при произвольном градиенте давления dP/dx является очень сложным. Однако при определенных допущениях можно получить некоторые общие соотношения.

Также необходимо сформулировать граничные условия. Для непроницаемой стенки скорость должна удовлетворять главному граничному условию $u = \upsilon = 0$ при $y = 0$ (условие прилипания).

При $y = \delta$ задаются значения $u = u_1$, $T = T_1$, где u_1 и T_1 - скорость и температура внешнего потока.

Обозначим индексом «0» параметры потока на стенке, индексом «1» - параметры на границе.

Вместо расстояния от стенки y введем безразмерное приведенное расстояние

$$\xi \equiv x,\ \eta = \frac{\int_0^y \frac{\mu_1(x)}{\mu(x,y)} dy}{\delta_1}, \tag{6}$$

где $\delta_1 = \int_0^{\delta(x)} \frac{\mu_1}{\mu} dy$ есть приведенная толщина пограничного слоя, $\delta(x)$ есть то конечное расстояние от стенки, на котором пограничный слой смыкается с внешним течением. При этом справедливы следующие соотношения: $\eta(x,0) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x,0) \equiv 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial P}{\partial \eta}$. Можно считать, что давление в поперечном сечении пограничного слоя остается практически постоянным и равным давлению во внешнем потоке. Таким образом, второе уравнение движения может быть записано в виде

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0. \tag{7}$$

Запишем уравнения движения и неразрывности в пограничном слое в новых координатах

$$\rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \rho\upsilon\frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho u r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \rho\upsilon r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

I. Уравнение движения и неразрывности на стенке преобразуются к виду

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\mu_1^2}{\mu\delta_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{10}$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho\upsilon r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Продифференцировав (11) получим $\rho r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho r}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \rho r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$, т.е. при $r \neq 0$: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$. Или $\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = 0$, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, а $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu\delta_1}$. $\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = 0$ при сколь угодно малом r, а значит по непрерывности и на критической линии.

Дифференцируем уравнение движения с учетом того, что на стенке $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=0$. Получаем $-\frac{\mu_1{}^2}{\mu^2\delta_1{}^2}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\mu_1{}^2}{\mu\delta_1{}^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}=0$. То есть, $\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}=\frac{\dfrac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}$.

Будем считать, что $\mu = const\, h^{\omega}$ [3], тогда $\frac{\partial \mu}{\partial \eta}=const\, h^{\omega-1}\frac{\partial h}{\partial \eta}$, при этом $\omega \approx 0{,}7$, т.е. $\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}=\frac{\omega}{h}\frac{\partial h}{\partial \eta}$.

II. Перейдем к исследованию на стенке уравнения энергии. Запишем его в новых переменных:

$$\rho u\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\rho\upsilon\frac{\mu_1}{\mu\delta_1}\frac{\partial h}{\partial \eta}=u\frac{dP}{dx}+\frac{1}{\Pr}\frac{\mu_1{}^2}{\mu\delta_1{}^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}+\frac{\mu_1{}^2}{\mu\delta_1{}^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2. \qquad (12)$$

Используя граничное условие на стенке преобразуем соотношение (12) к следующему виду

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2=0, \qquad (13)$$

следовательно $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right)_0<0$.

При рассмотрении наиболее интересного с практической точки зрения случая $h_0=\text{const}$, тогда $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0=0$. Продифференцируем по η уравнение (12). Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{dP}{dx}+\frac{1}{\Pr}\frac{\mu_1{}^2}{\mu\delta_1{}^2}\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3}+2\frac{\mu_1{}^2}{\mu\delta_1{}^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \qquad (14)$$

III. Согласно методу Польгаузена, представим распределение скорости в пограничном слое полиномом четвертой степени

$$\bar{u}=\frac{u}{u_1(x)}=a\eta+b\eta^2+c\eta^3+d\eta^4. \qquad (15)$$

Вводим безразмерный параметр

$$\Lambda(x)=-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial \eta^2}=\frac{\mu\delta_1{}^2}{\mu_1{}^2}\rho_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\mu\delta_1{}^2}{\mu_1{}^2}\frac{1}{u_1}\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (16)$$

Используя граничные условия для скорости на стенке и на границе погранслоя, получаем систему уравнений для определения коэффициентов a, b, c, d

$$\begin{cases} -2b = \Lambda \\ a+b+c+d=1 \\ a+2b+3c+4d=0 \\ 2b+6c+12d=0 \end{cases} \qquad (17)$$

Решая систему (17), определяем вид полинома, описывающего распределение скорости в пограничном слое

$$\bar{u} = \left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\eta - \frac{\Lambda}{2}\eta^2 + \left(-2+\frac{\Lambda}{2}\right)\eta^3 + \left(1-\frac{\Lambda}{6}\right)\eta^4 .$$

Это и есть полином Польгаузена.

Согласно [3], для параметра Λ может быть введена оценка $-12 \le \Lambda \le 12$. Уточним её для случая $q > 0$, т.е. $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 > 0$. Из (17) следует, что $-\frac{6\left(-2+\frac{\Lambda}{2}\right)}{\Lambda} > 0$, следовательно, $0 < \Lambda < 4$.

Для коэффициента трения $\tau = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{\mu_1}{\delta_1}\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)u_1$, т.к. соответствующая производная $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}$ берется при $\eta = 0$.

IV. Следуя аналогии с методом Польгаузена, положим

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 + p\eta + q\eta^2 + s\eta^3 + t\eta^4 . \qquad (18)$$

Значение h_0 на стенке будем считать постоянным, что соответствует наиболее распространенной математической постановке задачи.

Запишем первые три производные данного выражения с учетом того, что на стенке $\eta = 0$, $u = \upsilon = 0$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 = p . \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0^2 = 2q . \qquad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3}\right)_0 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0 = 6s\,. \tag{21}$$

Преобразуем (13) с учетом граничных условий на стенке

$$\frac{\partial^2 \left(h + \frac{u}{2}\right)}{\partial \eta^2} = \left(1 - \Pr\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2. \tag{22}$$

Продифференцируем уравнение (12). С учетом (10), (13) и граничных условий на стенке выражение принимает следующий вид

$$3\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\Pr}\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} = 0\,. \tag{23}$$

Преобразуем последнее соотношение

$$\frac{\partial^3 \left(h + \frac{u}{2}\right)}{\partial \eta^3} = 3\left(1 - \Pr\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,. \tag{24}$$

Продифференцируем (8) с учетом того, что на границе $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. А так же $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$, т.к. $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. Получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta}u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\mu_1^{\,2}}{\mu \delta_1^{\,2}}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_1 = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\frac{dP}{dx}\,. \tag{25}$$

Согласно закону Бернулли можно определить статическую энтальпию $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$, при дифференцировании получаем $\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = -h\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}$. После преобразований имеем $-\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \eta}$. Следовательно, на границе справедливо соотношение $\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{\mu_1^{\,2}}{\mu \delta_1^{\,2}}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_1$. Запишем производную (18) применительно к границе пограничного слоя

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = p + 2q + 3s + 4t\,. \tag{26}$$

На теле справедливо $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}=\frac{\omega}{h_0}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_0=\frac{\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\eta^3}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta^2}\right)_0}=\frac{6c}{\omega 2b}=\frac{p}{h_0}$, откуда

$$p=\frac{h_0}{\omega}\frac{-12+3\Lambda}{-\Lambda}. \tag{27}$$

При дифференцировании полинома Польгаузена и учитывая граничные условия на стенке получаем $\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\right)_0=\frac{1}{u_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_0=\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)$, следовательно $\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_0=u_1\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)$. Учитывая (20) и граничные условия на стенке можем определить следующий коэффициент полинома (18)

$$q=\frac{(1-\Pr)}{2}u_1^2\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)^2. \tag{28}$$

Согласно (16) $\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta^2}\right)_0=-\Lambda(x)$. Следовательно $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)_0=-u_1\Lambda$. Для определения коэффициента s получаем соотношение

$$s=-\frac{(1-\Pr)}{2}u_1^2\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\Lambda. \tag{29}$$

Решаем систему, учитывая (27), (28), (29)

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_1=p+2q+3s+4t\\ H-h_0=p+q+s+t\end{cases} \tag{30}$$

$$3p+2q+s=4(H-h_0)-\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_1 \tag{31}$$

$$3\left[\frac{h_0}{\omega}\frac{-12+3\Lambda}{-\Lambda}\right]+2\left[\frac{(1-\Pr)}{2}u_1^2(x)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)^2\right]+\left[-\frac{(1-\Pr)}{2}u_1^2(x)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\Lambda\right]=$$

$$=4(H-h_0)-\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)_1. \tag{32}$$

На внешней границе пограничного слоя при установившемся течении справедлив интеграл Бернулли

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = H = \mathrm{const}\,, \tag{33}$$

где H - параметр, называемый полной энтальпией (или энтальпией торможения), связывающий энтальпию и кинетическую энергию.

Модуль скорости газа на линии тока не может превышать некоторого максимального значения $u_1 \le V_{\max}$, где

$$V_{\max}^2 = 2H\,. \tag{34}$$

Подставляя формулу (34) в (33), перепишем интеграл Бернулли в виде

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}\,. \tag{35}$$

Введем безразмерные параметры следующим образом

$$\overline{h_1} = \frac{h_1}{H} = \left(\frac{P_1}{P_0^{'}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{36}$$

Преобразуем (33) с учетом (36)

$$\frac{u_1^2}{H} = 2\left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0^{'}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right). \tag{37}$$

В качестве примера рассмотрим стенку с постоянным значением безразмерной энтальпии $\overline{h_0} = \dfrac{h_0}{H} = 0,2; 0,3; 0,5$.

Получаем уравнение для определения $\Lambda(x)$

$$\left[4\left(1-\overline{h_0}\right) + \frac{9h_0}{\omega} - \overline{h_0}^{\,\omega}\tau^{1-\omega}\right]\Lambda - \frac{36\overline{h_0}}{\omega} + 12\overline{h_0}^{\,\omega}\tau^{1-\omega} =$$

$$= \frac{\Lambda}{9}\left(12+\Lambda\right)\left(6-\Lambda\right)\left(1-\mathrm{Pr}\right)\left(1-\tau\right). \tag{38}$$

V. Для использования соотношения (38) также необходимо знать распределение давления на всем участке между интересующей точкой и точкой полного торможения. Воспользуемся результатами работ [1] и [2], где приведены формулы для распределения давления, отнесенного к давлению торможения на поверхности затупленных тел

$$P(\sigma)=\frac{P_1}{P_0'}=\left[\frac{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\cdot\left(\frac{\sigma-\pi/2}{\sigma_*-\pi/2}\right)^2}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+3}\cdot\left(\frac{\sigma-\pi/2}{\sigma_*-\pi/2}\right)^2}\right]^{\lambda(\sigma)\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (39)$$

где σ_* - угол между осью тела и вектором скорости в звуковой точке, $\gamma=1,4$- показатель адиабаты.

Поясним, каким образом строится функция $\lambda(\sigma)$, входящая в формулу (39) для тел, отличных от сферы. Для случая сферы $\lambda(\sigma)\equiv 1$. Так как в звуковой точке должно выполняться равенство $P_*=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, то $\lambda(\sigma_*)\equiv 1$. Будем считать функцию $\lambda(\sigma)$ линейной. Пусть вторая точка x_0, через которую проходит прямая $\lambda(\sigma)$, лежит в небольшой окрестности σ_* и $\lambda(x_0)=\lambda_0$. Тогда $\lambda(\sigma)$ имеет вид

$$\lambda(\sigma)=1+\frac{1-\lambda_0}{\sigma_*-x_0}(\sigma-\sigma_*). \quad (40)$$

Положение точки x_0 определим эмпирически в зависимости от положения звуковой точки на поверхности тела из условия:

если $\sigma_{**}>\sigma_*$, то $x_0=1{,}15\sigma_*$; (41)

если $\sigma_{**}<\sigma_*$, то $x_0=0{,}85\sigma_*$, (42)

где σ_{**} определяет положение звуковой точки на сфере.

В небольшой окрестности звуковой точки для расчета давления с высокой точностью можно воспользоваться модификацией формулы Ньютона:

если $\sigma\ge\sigma_*$, то $P=\sin^2\sigma+\frac{P_*-\sin^2\sigma_*}{\cos^2\sigma_*}\cos^2\sigma$; (43)

если $\sigma<\sigma_*$, то $P=(P_*-P_\infty)\frac{\sin^2\sigma}{\sin^2\sigma_*}+P_\infty$. (44)

Величину λ_0 будем искать из равенства давления, рассчитываемого по формуле (39), давлению, рассчитываемому по формулам (43) или (44) в точке x_0. Таким образом, в любой точке тела можно вычислить значение $\lambda(\sigma)$, а значит и давление по формуле (39).

Для определения положения звуковой точки σ_{**} на поверхности сферы используем формулу работы [1]

$$\sigma_{**} = \begin{cases} \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{P_* - 1/\left(1+\gamma M^2\right)}{1 - 1/\left(1+\gamma M^2\right)}}\right) \text{ при } M < 2{,}5; \\ 90^\circ - \left(34^\circ + 40^\circ \kappa\right) \text{ при } M \geq 2{,}5. \end{cases} \quad (45)$$

Здесь $\kappa = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \dfrac{2}{\gamma + 1}\dfrac{1}{M^2}$, M - число Маха набегающего потока.

Для затупленных тел вращения, отличных от сферы, при нахождении σ_* использовалась теория контурных функций

$$f = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{r\rho V},$$

которая описана в [5], [6], [7]. Данные функции удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вдоль контура тела

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + f = \frac{\partial R}{\partial \psi},$$

где ψ - специальным образом введенная динамически-адаптивная переменная. Суть указанного метода состоит в том, что каждая точка произвольного контура аппроксимируется некоторой окружностью радиуса $R(\sigma)$ (радиус кривизны контура), что дает возможность составить целевое уравнение

$$\left(\frac{f''}{f}\right)_* = \left(\frac{f''}{f}\right)_{**}.$$

Перейдем к основной задаче, рассматриваемой в статье, определению теплового потока на поверхности тела.

VI. Для определения тепловых потоков используется следующая формула

$$Q = \frac{\mu_0}{\Pr}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\Pr}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\Pr}\frac{h_0}{\omega}\frac{\mu_1}{\delta_1}\frac{12 - 3\Lambda}{\Lambda}, \quad (46)$$

где $\dfrac{\mu_1}{\delta_1} = \sqrt{\dfrac{\rho_1 \dfrac{du_1}{dx}\mu_0}{\Lambda}}$. Здесь $\dfrac{du_1}{dx} = -\dfrac{1}{R(\sigma)}\dfrac{du_1}{d\sigma}$, $\dfrac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\dfrac{P_1}{P_0'}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, где ρ_0 - плотность в точке торможения.

При вычислении $\frac{Q}{Q_0}$ отношение $\frac{\frac{du_1}{d\sigma}}{\left(\frac{du_1}{d\sigma}\right)_0}$ принимается тем же, что и на сфере.

Результаты.

Сравним результаты применения полученных формул (38) и (46) для определения тепловых потоков на поверхности эллипсоида с точным численным решением.

Рассмотрим применение формулы (46) для расчета тепловых потоков на эллиптической поверхности при различных числах Маха набегающего потока, исследование которых также приведено в [4]. На рис. 1-2 сплошной линией представлены полученные результаты, а крестиками – результаты расчета в рамках уравнений Навье – Стокса [4].

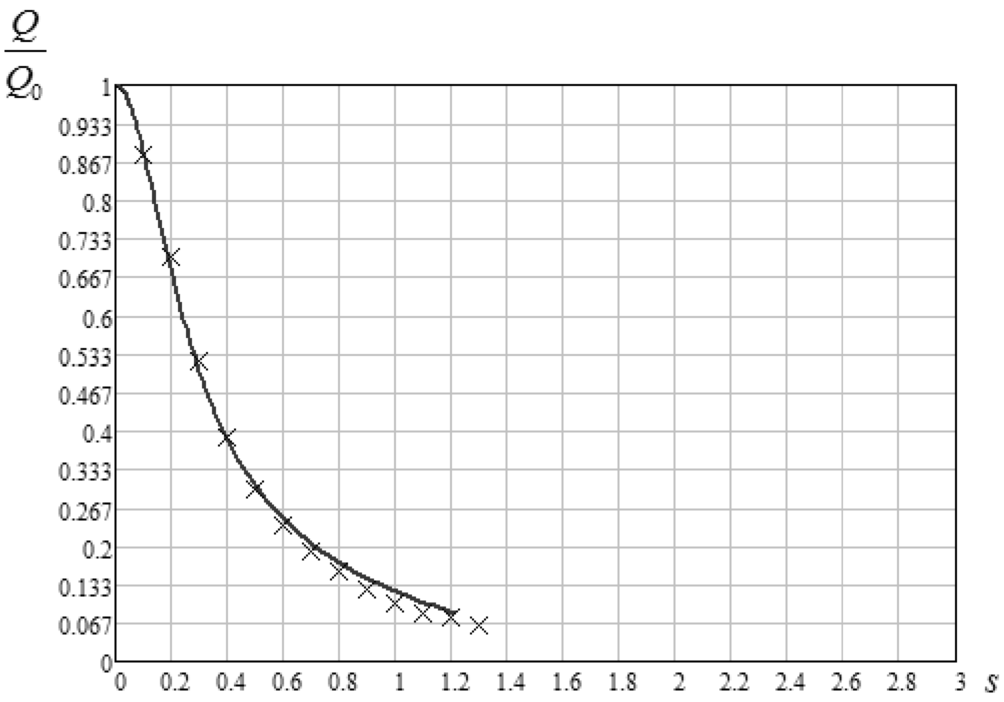

Рис. 1. Зависимость Q/Q_0 для эллиптической поверхности при $\overline{h_0} = 0{,}16$; $\Pr = 0{,}7$, $\omega = 0{,}7$, $n = 1/2$, $M = 10$.

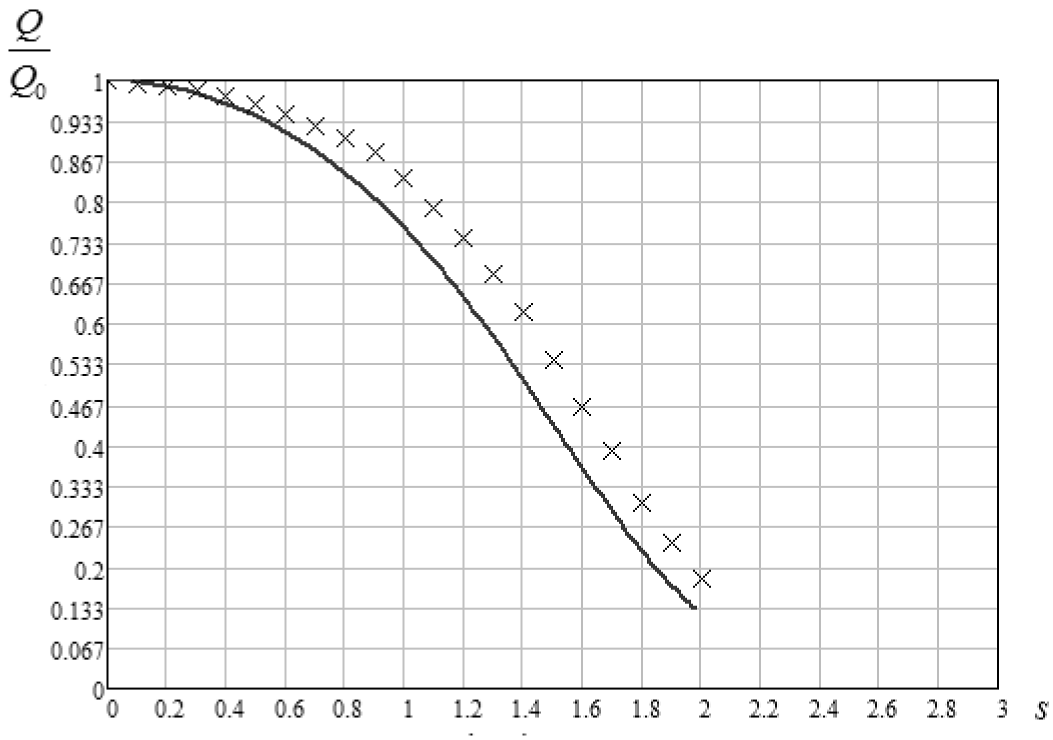

Рис. 2. Зависимость Q / Q_0 для эллиптической поверхности при $\overline{h_0} = 0{,}16$; $\Pr = 0{,}7$, $\omega = 0{,}7$, $n = 3/2$, $M = 10$.

Заключение

Метод, рассмотренный в рамках данной работы, был применен для расчёта величины теплопередачи в произвольной точке поверхности, отнесенной к величине теплового потока в точке полного торможения на поверхности эллипсоида. Применение модифицированного метода Польгаузена позволило получить зависимости в простой аналитической форме для описания процесса обтекания сверхзвуковым потоком газа. Модификация метода состояла в том, что энтальпия представлялась в виде полинома четвертой степени, как и скорость в оригинальном методе Польгаузена.

Для сравнения результатов расчета по предложенному методу использовалось точное решение, полученное в рамках уравнений Навье-Стокса [4]. Относительная погрешность результатов не превышает 20%. Таким образом, полученные данные могут использоваться на начальной стадии проектирования летательных аппаратов.

Список литературы

1. Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 141-148.

2. Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Т. 1. № 1-1. С. 68-81.
3. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
4. Брыкина И.Г. Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса: автореф. дис... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2013. 38 с.
5. Котенев В.П. Уравнения двумерных течений газа в динамических переменных // Информационные технологии. 2007. № 1. С. 37-41.
6. Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 280 с.
7. Котенев В.П., Сысенко В.А. Уточненный метод быстрой оценки давления на поверхности гладких затупленных тел // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. Спец. вып. «Математическое моделирование». № 3. 2012. С. 64-74.