

01, январь 2016

УДК 004.942

Математическое моделирование угловых параметров пояснично-крестцового отдела позвоночника

*Никулина А.А., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Системы автоматизированного проектирования»*

*Научный руководитель: Жук Д.М., к.т.н.
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Системы автоматизированного проектирования»*

zhuk@bmstu.ru

Введение

Биомеханика – ключ к пониманию причин развития заболеваний позвоночника. Множество исследователей предлагали различные биомеханические модели позвоночника с целью прогнозирования и количественной оценки векторов силы и их эффектов на позвоночный столб [1,4,5,13-16]. Модели доказали свою полезность, однако представление поясничного отдела позвоночника в виде прямой линии является существенным недостатком большинства предложенных моделей. Кривизна поясничного отдела позвоночника является важнейшим фактором в поддержании позы и характере распределения нагрузок и, соответственно, векторов силы в позвоночном столбе [2,9,10].

Точное определение геометрических параметров поясничного отдела позвоночника является важным с точки зрения оценки сагиттального позвоночно-тазового баланса - нейтрального вертикального выравнивания позвоночника в сагиттальной плоскости. Достижение баланса позволяет снизить стрессовые нагрузки, которым подвергается позвоночный столб. В литературе описано множество не инвазивных способов оценки геометрии позвоночного столба [3,6-8,11,12,17,18]. Тем не менее, все эти методы нашли весьма ограниченное применение, как в биомеханике, так и в других областях медицинской науки из-за их низкой информативности относительно актуальной геометрии позвоночного столба, а так же введу ряда технических трудностей.

Оптимальный метод оценки геометрических параметров поясничного отдела позвоночника должен основываться на методике, применение которой возможно в

реальной рабочей среде, а так же легко воспроизводиться в экспериментальных условиях. Кроме того, методика должна быть недорогой и позволять в кратчайшие сроки выполнять точные измерения, что делает возможным её применение на больших группах.

Цель исследования: разработать математическую модель пояснично-крестцового отдела позвоночника, основанную на оценке зависимости угловых параметров пояснично-крестцового отдела позвоночника по данным методов медицинской визуализации.

Материалы и методы исследования

Предположим, что поясничный лордоз есть дуга окружности (L), проходящей через верхний передний угол $L1$ позвонка (точка A) и верхний передний угол $S1$ позвонка (точка B). Построим прямую, проходящую через точки A и B . Для дуги окружности (L) данная прямая есть хорда (c) окружности, отделяющая от окружности дугу (L), находящуюся между двумя крайними точками хорды. Часть круга, ограниченная дугой (L) и хордой (c) есть *круговой сегмент*. Разделим хорду на два равных отрезка, построив из данной точки перпендикуляр h от хорды к дуге окружности. Перпендикуляр h есть высота кругового сегмента. Зная высоту сегмента (h) и длину хорды (c) радиус окружности рассчитываем по формуле:

$$R = \frac{h}{2} + \frac{c^2}{8h}, \quad (1)$$

где R – радиус круга, мм; h – высота сегмента, мм; c – длина хорды, мм.

Далее, найдем угол сегмента окружности по формуле:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{c}{2R} \cdot \frac{180}{\pi}. \quad (2)$$

Длина дуги окружности определяется по формуле:

$$L = \alpha R \cdot \frac{\pi}{180}, \quad (3)$$

где L – длина дуги окружности, мм; α – угол сегмента.

Все угловые величины выражались в градусах. Помимо геометрических параметров, у всех пациентов определялись анатомические параметры позвоночно-тазового сагиттального баланса: угол лордоза, угол наклона крестца, угол отклонения крестца.

Угол лордоза β определялся как угол между верхней замыкательной пластинкой тела позвонка $L1$ и верхней замыкательной пластинкой тела позвонка $S1$.

Угол наклона крестца (SS от англ. *Sacral Slope*) – это угол между горизонтальной плоскостью и верхней замыкательной пластинкой позвонка $S1$.

Угол отклонения крестца (*SD* от англ. *Sacral Deviation*) – угол между перпендикуляром, опущенным от верхней замыкательной пластинки *S1* позвонка к вентральному краю диска *S1-S2* сегмента и вертикальной плоскостью.

Графическое отображение измеряемых параметров представлено на рис. 1.

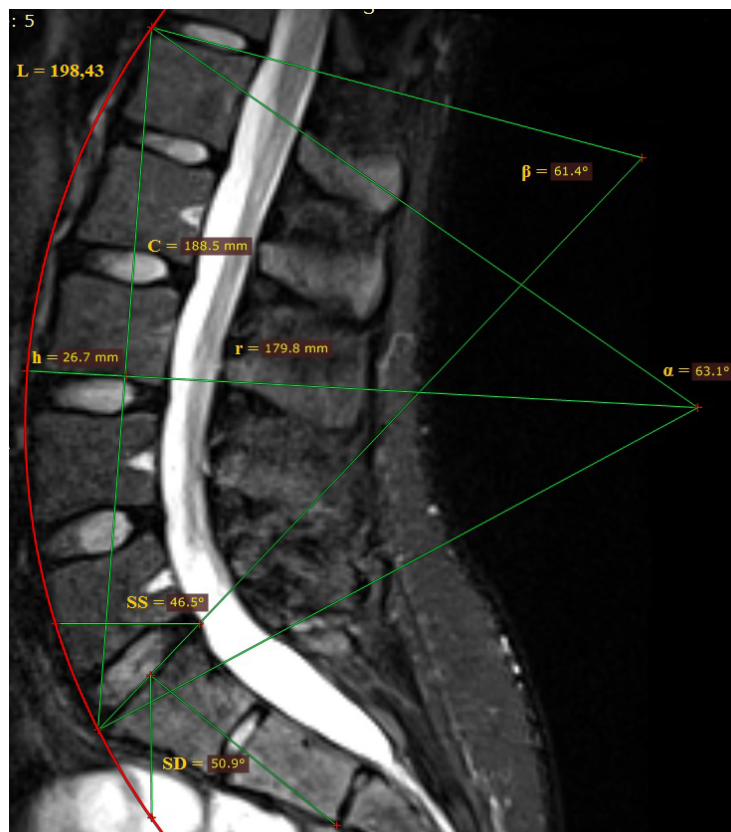


Рис. 1. Определение сагиттальных позвоночно-тазовых параметров

Большое значение также имеют следующие параметры [12]:

1. Отношение угла лордоза к центральному углу (поясничный коэффициент)

$$K_L = \frac{\beta}{\alpha}$$

2. Отношение угла наклона крестца к углу отклонения крестца (крестцовый коэффициент)

$$K_S = \frac{SS}{SD}$$

3. «Позвоночно-крестцовый баланс» (*LSB*, от англ. *Lumbo-Sacral Balance*) – модуль математической разности крестцового и поясничного коэффициентов:

$$LSB = |K_S - K_L|. \quad (4)$$

Определение взаимозависимости угловых параметров

В ходе исследования было обнаружено взаимовлияние углов, используемых в методе вычисления сагиттального позвоночно-тазового баланса.

Построим схематичное изображение углов β , SS и SD (рис. 2а) используя в качестве примера рис. 1. Проведем прямую GM , параллельную оси OY (рис. 2б).

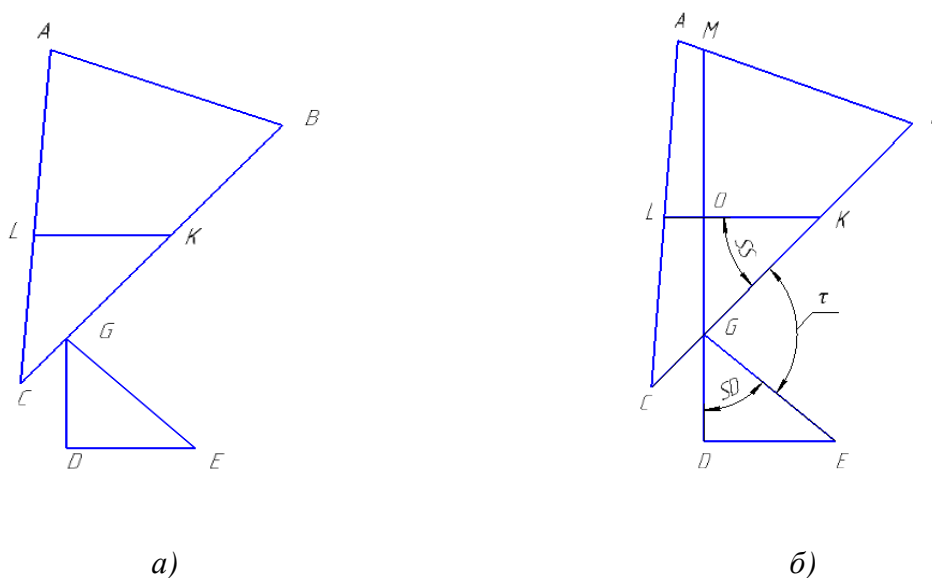


Рис. 2. Моделирование изменения и зависимости угловых параметров:
а) схематичное изображение углов β , SS и SD ; б) построение прямой GM

Примем $EGB = \tau$. Величина угла EGB является постоянной, так как крестцовые позвонки являются сросшимися и их взаиморасположение не изменяется [9].

$$OGK = 180^\circ - \tau - SD \quad (1)$$

Следовательно:

$$SS = GKO = 90^\circ - OGK = \tau + SD - 90^\circ. \quad (2)$$

Отсюда следует, что изменение углов SS и SD происходит на одинаковую величину с одинаковыми знаками. Все угловые величины приведены в градусах.

Рассмотрим теперь углы α и β (рис. 3а). В качестве примера так же воспользуемся рис. 1. Проведем прямые CS и SA (рис. 3б)

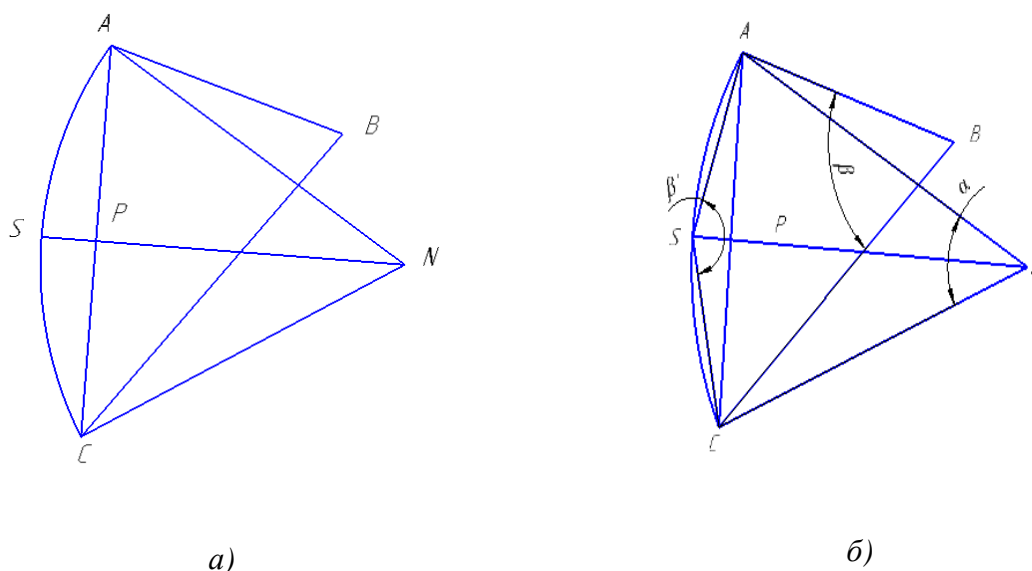


Рис. 3. Моделирование изменения и зависимости угловых параметров:
 а) схематичное изображение углов α и β ; б) построение прямых CS и SA

Величина углов BCS и SAB так же является постоянной с учетом анатомического строения позвоночного столба [9], при условии отсутствия клиновидной деформации позвонков (в данной методике не рассматривается). Рассмотрим четырехугольник $CSAB$: CSA и ABC (β) синхронно изменяются на одну и ту же величину, но с разным знаком, поскольку два оставшихся угла являются постоянными. Примем $CSA = \beta'$. Выведем длину дуги окружности CSA (мм) через углы α и β' . Через угол β' : по формуле Гюйгенса:

$$\widetilde{CSA} = 2CS + \frac{2CS - AC}{3} \quad (3)$$

По теореме косинусов для равнобедренного треугольника:

$$AC = \sqrt{CS^2 + SA^2 - 2 \cdot CS \cdot SA \cdot \cos \beta'} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$\widetilde{CSA} = 2CS + \frac{2CS - CS\sqrt{2-2\cos\beta'}}{3} = CS \frac{8 - \sqrt{2-2\cos\beta'}}{3} \quad (5)$$

Через угол α :

$$\widetilde{CSA} = \frac{\pi}{180^\circ} CN \cdot \alpha \quad (6)$$

Рассмотрим треугольник CSN , и по теореме синусов:

$$\frac{CS}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{CN}{\sin \frac{\beta'}{2}}$$

$$CS = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot CN}{\sin \frac{\beta'}{2}}, \quad (7)$$

где CS и SA – прямые, расположенные внутри сегмента, мм; CN – радиус, мм; AC – хорда, мм.

Подставим (7) в (5) и приравняем к (6):

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot CN}{\sin \frac{\beta'}{2}} \cdot \frac{8 - \sqrt{2 - 2 \cos \beta'}}{3} = \frac{\pi}{180^\circ} CN \cdot \alpha.$$

$$\frac{8 - \sqrt{2 - 2 \cos \beta'}}{3 \sin \frac{\beta'}{2}} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}},$$

где $\beta' = 360^\circ - SAB - BCS - \beta$.

Измерим углы SAB и BCS :

$$\frac{8 - \sqrt{2 - 2 \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta)}}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (8)$$

Для решения полученного уравнения, составим еще одно равенство, определив отрезок AC через углы α и β' . По теореме косинусов для равнобедренного треугольника:

$$AC = \sqrt{CS^2 + SA^2 - 2 \cdot CS \cdot SA \cdot \cos \beta'} \quad (9)$$

$$AC = \sqrt{AN^2 + CN^2 - 2 \cdot AN \cdot CN \cdot \cos \alpha} \quad (10)$$

Приравняем (5) с (6) и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$CS^2 + SA^2 - 2 \cdot CS \cdot SA \cdot \cos \beta' = AN^2 + CN^2 - 2 \cdot AN \cdot CN \cdot \cos \alpha$$

$$CS^2 - CS^2 \cdot \cos \beta' = CN^2 - CN^2 \cdot \cos \alpha \quad (11)$$

Подставим (7) в (11):

$$\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot CN}{\sin \frac{\beta'}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot CN}{\sin \frac{\beta'}{2}}\right)^2 \cdot \cos \beta' = CN^2 - CN^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta'}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta'}{2}}\right)^2 \cdot \cos \beta' = 1 - \cos \alpha$$

$$\frac{1 - \cos \beta'}{\left(\sin \frac{\beta'}{2}\right)^2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1 - \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta)}{\left(\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)\right)^2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad (12)$$

Путем выполнения математических преобразований при любых значениях α получим:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 2. \quad (13)$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{8 - \sqrt{2 - 2\cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta)}}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1 - \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta)}{\left(\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)\right)^2} = 2 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{8 - \sqrt{2(1 - \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta))}}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \\ 1 - \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)\right)^2 \end{cases}$$

Так как угол β острый (исходя из особенностей анатомии), то β' - тупой и не превышает π , следовательно:

$$\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right) > 0$$

$$\frac{8 - \sqrt{2(1 - \cos(360^\circ - SAB - BCS - \beta))}}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{8 - \sqrt{4 \cdot \left(\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)\right)^2}}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{8 - 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)\right|}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{8}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3 \sin\left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2}\right)} = \frac{3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{540^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$3 \sin \left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2} \right) = \frac{4320 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \left(\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2} \right) = \frac{4320 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \left(3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$\frac{360^\circ - SAB - BCS - \beta}{2} = \left(\frac{4320 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \left(3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = 360^\circ - SAB - BCS - \left(\left(\frac{4320 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \left(3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \right) \cdot \frac{360}{\pi} \right). \quad (15)$$

Объединим формулы (2), (15) в одну систему уравнений. Тогда имеем:

$$\begin{cases} SS = \tau + SD - 90 \\ \beta = 360^\circ - SAB - BCS - \left(\left(\frac{4320 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \left(3\pi \cdot \alpha + 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \right) \cdot \frac{360}{\pi} \right), \end{cases} \quad (16)$$

где угол τ – известен, и не изменяется.

Все угловые величины представлены в градусах. Исходя из анатомического строения позвоночника человека, а так же данных рис. 3б, можно полагать, что разброс разности изменений углов до и после операции находятся приблизительно в одном коридоре значений. Следовательно, можно говорить о пропорциональном изменении углов β , SS и SD на одинаковую величину, как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения, что отражает взаимосвязь компонентов единой биологической системы, которым является позвоночный столб.

Заключение

Для достижения целей данного исследования была поставлена задача исследования зависимости угловых параметров с учетом анатомических особенностей позвоночного столба и автоматизации расчета угловых величин для достижения значения позвоночно-тазового баланса в пределах допустимых значений.

Методика позволяет точно оценивать положение позвоночного столба и ориентацию относительно крестца, используя индивидуальные антропометрические особенности и геометрические построения.

Впервые была установлена четкая математическая зависимость между угловыми параметрами пояснично-крестцового отдела позвоночника, подтверждающаяся пропорциональностью изменений угловых величин при сравнении результатов до и после оперативного лечения у 33 пациентов.

Список литературы

- [1] Anderson J.A.D., Sweetman B.J. A combined flexi-rule/ hydrogoniometer device for measurement of lumbar spine and its sagittal movement // *Rheumatol Rehabil.* 1975. Vol. 14. P. 173-179.
- [2] Aspden R.M. The spine as an arch: a new mathematical model // *Spine.* 1989. Vol. 14. P. 266-274.
- [3] Bryant J.T., Reid J.G., Smith B.L., Stevenson J.M. Method for determining vertebral body positions in the sagittal plane using skin markers // *Spine.* 1989. Vol. 14. P. 258-265.
- [4] Burton A. Regional lumbar sagittal mobility: Measurements by flexi-curvs. // *Clin. Biomech.* 1986. Vol. 1. P. 20-26.
- [5] Chen Y.L., Lee Y.H. A non-invasive protocol for the determination of lumbosacral vertebral angle // *Clin. Biomech.* 1997. Vol. 12. P. 185-189.
- [6] Chiou W.-K., Chen W.-J., Lee M.-Y., Lin Y.H. Predictive model of intersegmental mobility of lumbar spine in the sagittal plane from skin markers // *Clin. Biomech.* 1995. Vol. 10. P. 413-420.
- [7] Chiou W.-K., Lee Y.H., Chen W.-J., Lin Y.H. A non-invasive protocol for the determination of lumbar spine mobility // *Clin. Biomech.* 1996. Vol. 11. P. 474-480.
- [8] Davis P.R., Troup J.D.G., Burnard, J.H. Movements of the thoracic and lumbar spine when lifting: A chrono-cyclophotographic study // *J. Anat.* 1965. Vol. 99. P. 13-26.
- [9] Jorgensen M.J., Marras W.S., Gupta P. Cross-sectional area of the lumbar back muscles as a function of torso flexion // *Clin. Biomech.* 2003. Vol. 18. P. 280-286.
- [10] Jorgensen M.J., Marras W.S., Gupta P., Waters T.R. Effect of torso flexion on the lumbar torso extensor muscle sagittal plane moment arms // *The Spine J.* 2003. Vol. 3. P. 363-369.
- [11] Kumar S. A study of spinal motion during lifting // *Irish Journal of Medical Science.* 1974. Vol. 143. P. 86-95.
- [12] Lee Y.-H., Chiou W.-K., Chen W.-J., Lin Y.H. Predictive model of intersegmental mobility of lumbar spine in the sagittal plane from skin markers // *Clin. Biomech.* 1995. Vol. 10. P. 413-420.

- [13] Letts M., Quanbury A., Gouw G., Kolsun W., Letts E. Computerized ultrasonic digitization in the measurement of spinal curvature // *Spine*. 1988. Vol. 13. P. 1106-1110.
- [14] McGill S.M., Kippers V. Transfer of loads between lumbar tissues during the flexion-relaxation phenomenon // *Spine*. 1994. Vol. 19. P. 2190-2196.
- [15] Nelson J.M., Walmsley R.P., Stevenson J.M. Relative lumbar and pelvic motion during loaded spinal flexion/extension // *Spine*. 1995. Vol. 20. P. 199-204.
- [16] Nordin M., Greenidge N., Tauber C., Ngai J. Spinal configuration during lifting // *Bull Hosp Jt Dis Orthop Inst*. 1986. Vol. 46, no. 1. P. 31-36.
- [17] Sicard C., Gagnon M. A geometric model of the lumbar spine in the sagittal plane // *Spine*. 1993. Vol. 18. P. 646-658.
- [18] Stokes I.A.F., Bevins M., Lunn R.A. Back surface curvature and measurement of lumbar spine motion // *Spine*. 1987. Vol. 12. P. 355-361.
- [19] Макиров С.К., Джахаф М.Т., Юз А.А. Методика оценки параметров сагиттального позвоночно-крестцового баланса // 6-ая международная конференция Science4Health 2015 (Москва, 17-18 апреля 2015 г.). Москва, 2015. С. 163-164.