

# 08, август 2017

УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗДЕЛИЯ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА

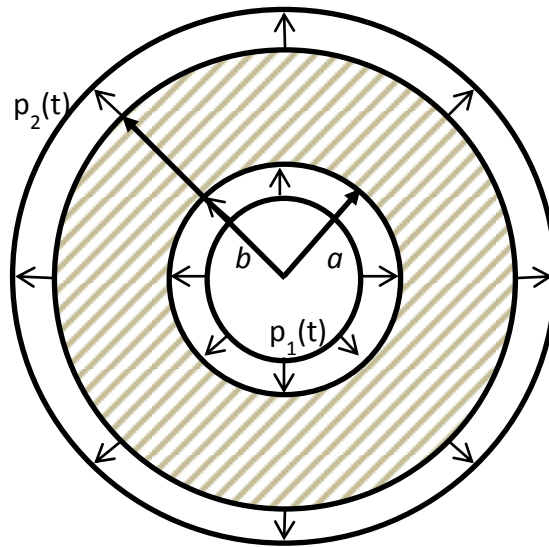
*Романов А. А., магистр 2 года*  
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,*  
*Кафедра «Прикладная математика»*  
[\*malimo93@gmail.com\*](mailto:malimo93@gmail.com)

*Научный руководитель: А.В. Манжиров, д.ф.-м.н., профессор,*  
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*  
[\*manzh@inbox.ru\*](mailto:manzh@inbox.ru)

*Аннотация:* В работе рассматривается одномерная задача механики растущих тел и предлагается метод ее решения на основе метода конечных элементов. Получены численные значения и аналитические зависимости для функций напряжений, деформаций и радиального перемещения. Рассмотрено влияние различных функций формы на численное решение.

*Ключевые слова:* Аддитивные технологии (additive manufacturing technologies), МКЭ (FEM), упругость (elasticity).

С развитием техники и технологий происходит увеличение количества функций устройств и их усложнение, вследствие чего значительно повышаются требования, предъявляемые к прочности и долговечности машин, конструкций и механизмов. Для обеспечения условий, позволяющих выполнять новые, более сложные задачи, необходимы методы точного расчета напряженного состояния и распределения различных полей в узлах машин и конструкций. Многие свойства, например, долговечность и прочность изделий зависят от процесса получения деталей. Одним из новых и перспективных способов изготовления изделий являются аддитивные технологии, поэтому изучение процессов, происходящих при их использовании, представляет собой важную задачу для развития техники. В литературе можно встретить считанное число публикаций, посвященных рассмотрению численной реализации моделей наращивания материала, и чаще всего используются модели статики или квазистатики упругого тела для описания подобных задач.



**Рис. 1.** К постановке задачи

В работе рассмотрена задача об осесимметричной деформации и наращивании цилиндра (рис. 1). Цилиндр имеет внутренний радиус  $a$  и внешний --  $b$ . Материал цилиндра полагается изотропным упругим с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ . Связь между напряжениями и деформациями в теле устанавливает закон Гука для плоско-деформированного состояния:

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}, \quad (2)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2G\varepsilon_{r\varphi},$$

где  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$  - компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}$  - компоненты тензора деформаций,  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ,  $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ . Сдвиговые напряжения и деформации отсутствуют, поэтому  $\sigma_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} = 0$ . Деформации в теле полагаются малыми, следовательно,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

где  $u_r$ - радиальное перемещение тела,  $u_\varphi$  - угловое перемещение тела,  $r, \varphi$  - координаты тела в пространстве. Наращивание тела происходит со скоростью  $v(t)$  по всей внешней поверхности цилиндра. Приток осаждающегося материала рассматривается с натягом или без. Во время роста давление на внутренней поверхности цилиндра изменяется по закону  $f(t)$ . После окончания роста может происходить дальнейшее нагружение цилиндра.

Решение задачи разбито на три части: в первой происходит предварительное нагружение цилиндра, во второй – одновременные наращивание материала и деформация, в третьей – дополнительное нагружение цилиндра.

При постановке первой части задачи с учетом отсутствия массовых сил и осевой симметрии, получается следующая краевая задача (задача Ламе)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \\ \sigma_{rr}|_{r=a} = p_1, \\ \sigma_{rr}|_{r=b} = p_2. \end{cases} \quad (5)$$

Подставим уравнения (1), (2) в задачу (5).

$$2G \frac{d \varepsilon_{rr}}{dr} + \lambda \frac{d \varepsilon_{\varphi\varphi}}{dr} + (2G - \lambda) \frac{\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (6)$$

С учетом (3) и (4) выразим деформации в уравнении (6) через радиальное перемещение.

$$2G \left( \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u_r}{r} \right) \right) = 0. \quad (7)$$

Общее решение (7) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0(r) &= C_1^0 r + \frac{C_2^0}{r}, \\ C_1^0 &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{(2G + 2\lambda)(a^2 - b^2)}, \\ C_2^0 &= \frac{(p_1 - p_2)(ab)^2}{2G(a^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

Для решения задачи о непрерывном росте цилиндра (вторая часть) необходимо все уравнения записать в скоростях, т.к. с помощью уравнений статики можно решить только задачу о дискретном нагружении.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \dot{\sigma}_{rr} &= 2G \dot{\varepsilon}_{rr} + \lambda \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \\ \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} &= 2G \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \lambda \dot{\varepsilon}_{rr}, \\ \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \dot{\sigma}_{rr}|_{r=a} &= \dot{p}_1(t), \\ \dot{\sigma}_{rr}|_{r=b(t)} &= \dot{p}_2(t), \end{aligned}$$

где  $b(t)$  - подвижная внешняя граница цилиндра. Точкой обозначено дифференцирование по времени, т.е.  $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$ . Для восстановления величин по их скоростям используем следующее уравнение:

$$a(t) = a(\tau^*) + \int_{\tau^*}^t \dot{a} d\tau,$$

где  $\tau^*(r)$  – момент присоединения вещества к телу,  $a(\tau^*)$  – значение величины  $a$  в момент присоединения. На внешней поверхности цилиндра граничное условие будет следующим:

$$\dot{\sigma}_{rr}|_{r=b(t)} = \frac{v(t) * \tau(t)}{b(t)}.$$

На внутренней поверхности граничное условие

$$\dot{\sigma}_{rr}|_{r=a} = f(t).$$

Здесь  $\tau(t)$  – окружное напряжение возникающее в присоединяемом материале. Ненулевое значение  $\tau(t)$  отвечает наращивание с натягом, если же  $\tau(t) \equiv 0$ , то наращивание происходит без натяга (свободно). Общее решение для скорости перемещения будет иметь такой же вид, как и в первой части задачи:

$$\dot{u}_r = C_1^1 r + \frac{C_2^1}{r}.$$

Постоянные  $C_1^1$  и  $C_2^1$  определяются соотношениями

$$C_1^1 = \frac{f(t)a^2 - \tau(t)b(t)v(t)}{(2G + 2\lambda)(a^2 - b^2(t))},$$

$$C_2^1 = \frac{(f(t)b(t) - \tau(t)v(t))a^2 b(t)}{2G(a^2 - b^2(t))}.$$

Скорости деформаций и напряжений выражаются следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = C_1^1 - \frac{C_2^1}{r^2};$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = C_1^1 + \frac{C_2^1}{r^2};$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = (2G + \lambda)C_1^1 + (\lambda - 2G)\frac{C_2^1}{r^2};$$

$$\dot{\sigma}_{\phi\phi} = (2G + \lambda)C_1^1 + (2G - \lambda)\frac{C_2^1}{r^2}.$$

Если положить, что  $b(t) = b + v(t)t, v(t) = v = const, \tau(t) = \tau = const, f(t) = f = const$ , то постоянные  $C_1^1$  и  $C_2^1$  можно переписать в следующем виде:

$$C_1^1 = \frac{fa^2 - \tau(b + vt)v}{(2G + 2\lambda)(a^2 - (b + vt)^2)},$$

$$C_2^1 = \frac{(f(b+vt) - \tau v)a^2(b+vt)}{2G(a^2 - (b+vt)^2)}.$$

Третья часть задачи аналогична второй, за тем исключением, что нагружение происходит мгновенно и нет роста на внешней границе. Взамен условия на скорость радиального напряжения для растущего тела будет следующее условие:

$$\dot{\sigma}_{rr}|_{b(T)} = q,$$

где  $T$  – момент, в который заканчивается рост тела. Величины  $f(T)$  и  $q$  можно подобрать так, что тело после окончания роста и нагружения окажется самоуравновешенным, т.е. последняя нагрузка окажется разгружающей. В конечный момент времени  $T$  перемещения, деформации и напряжения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(\tau^*) + \int_{\tau^*(r)}^T \dot{u}_r d\tau, \\ \varepsilon_{ii} &= \varepsilon_{ii}(\tau^*) + \int_{\tau^*(r)}^T \dot{\varepsilon}_{ii} d\tau, \\ \sigma_{ii} &= \sigma_{ii}(\tau^*) + \int_{\tau^*(r)}^T \dot{\sigma}_{ii} d\tau. \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах  $u_r(\tau^*) = \varepsilon_{ii}(\tau^*) = \sigma_{ii}(\tau^*) = 0$ , если  $\tau^* \neq 0$  и  $u_r(\tau^*) = u^0$ ,  $\varepsilon_{ii}(\tau^*) = \varepsilon_{ii}^0$ ,  $\sigma_{ii}(\tau^*) = \sigma_{ii}^0$  если  $\tau^* = 0$ .

Для численного моделирования была написана программа в среде Matlab, реализующая метод конечных элементов (МКЭ). Для получения соотношений между перемещениями в узлах сетки использовался метод Ритца. Из МКЭ следует, что

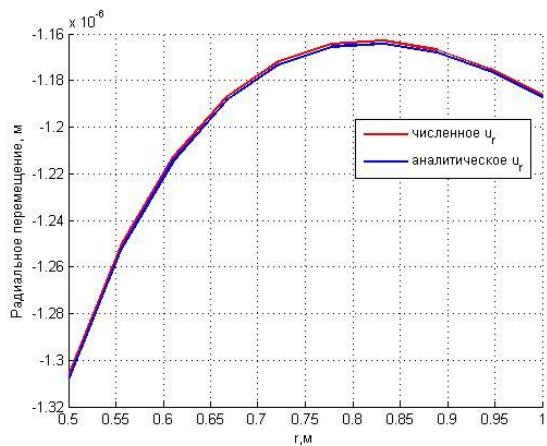
$$\tilde{u}_r = \sum_{i=1}^K N_i u_i,$$

где  $\tilde{u}_r$  – функция, аппроксимирующая радиальное перемещение,  $N_i$  – функция формы,  $u_i$  – значения в узлах сетки,  $K$  количество точек сетки. Функции формы рассматривались двух видов:

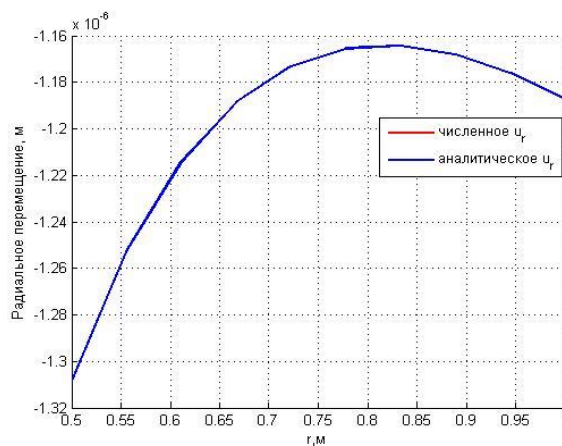
$$\begin{aligned} N_i^1 &= \begin{cases} C_1^i + C_2^i r, & \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & r \notin [x_i; x_{i+1}]; \end{cases} \\ N_i^2 &= \begin{cases} C_1^i r + \frac{C_2^i}{r}, & \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & r \notin [x_i; x_{i+1}]; \end{cases} \end{aligned}$$

Полученные результаты моделирования представлены на рисунках (2, а-е). На рисунках (2, а-е) показано сравнение численного и аналитического решения задачи Ламе; на рисунках (3, а-б) сравнение численного и аналитического решение для скоростей на 1-м и 10-м шагах наращивания. При моделировании использовались следующие значения

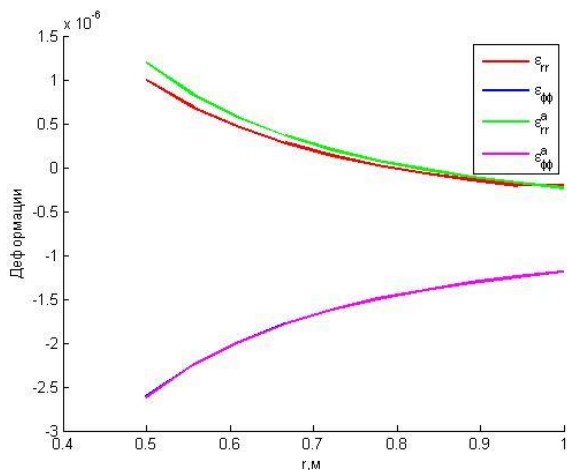
параметров:  $a = 0.5$  м;  $b = 1$  м;  $E = 2e11$  Па;  $\mu = 0.3$ ;  $p_1 = 2e4 + 400t$  Па;  $p_2 = 2e5$  Па;  $\nu = 0.01 \frac{M}{c}$ ;  $t \in [0,20]$ ;  $\Delta t = 0.1$  с;  $(K - 1) = 20$ .



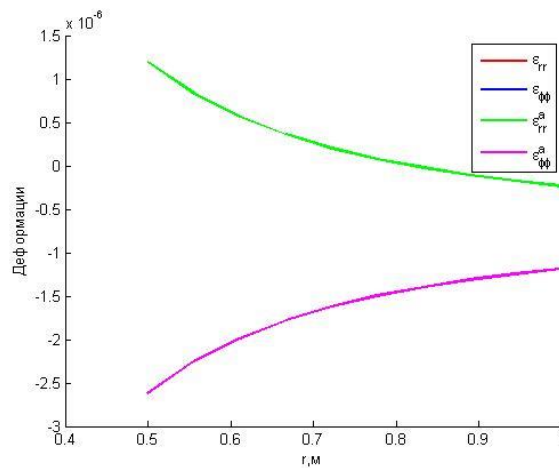
а)



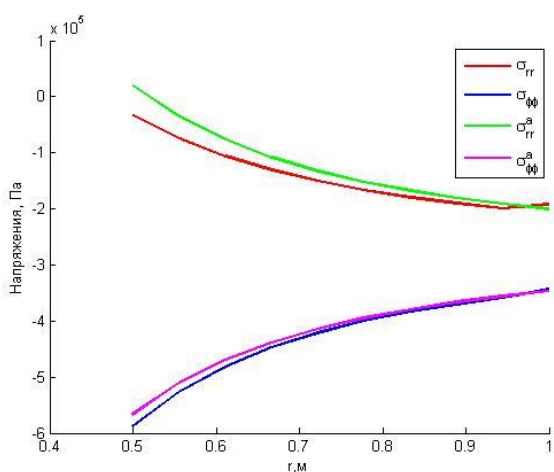
б)



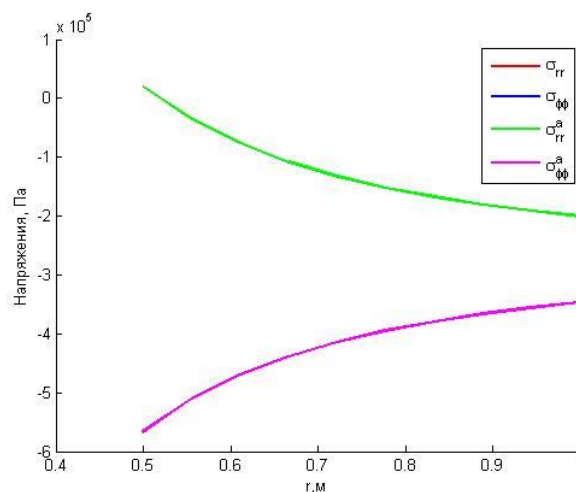
в)



г)

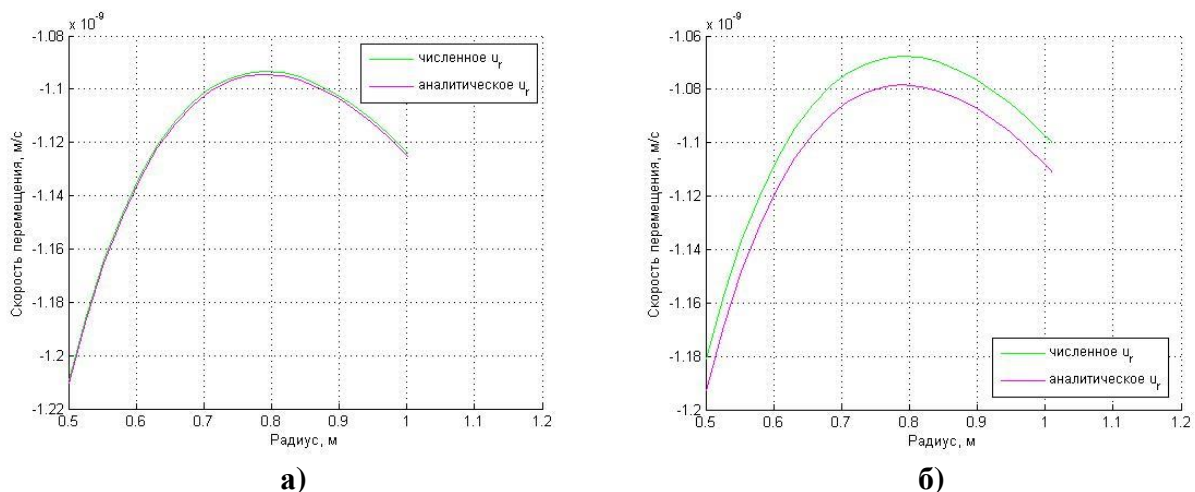


д)



е)

**Рис. 2.** Сравнение численного и аналитического решений для различных функций форм: **а)** – сравнение с радиальным перемещения для первой функции формы; **б)** – для второй; **в)** – сравнение деформаций для первой функции формы; **г)** – для второй; **д)** – сравнение напряжений для первой функции формы; **е)** – для второй



**Рис. 3.** Сравнение численного и аналитического распределения скоростей перемещений: **а)** на первом шаге, погрешность  $< 1\%$ ; **б)** на 10-м, погрешность  $\sim 1\%$

В ходе работы получены численные значения в конечном наборе точек и аналитические зависимости для функций напряжений, деформаций и радиального перемещения. Решение, полученное в ходе моделирования, численно равно аналитическому, что показывает высокую сходимость метода. Следовательно, можно предположить, что рассматриваемый подход применим для расчета и более сложных задач. Представлены графики напряжений, деформаций и радиального перемещения, на которых видно, что функции формы  $N_i^2$  лучше чем  $N_i^1$  аппроксимирует напряжения и деформации в задаче Ламе. Это также справедливо и в случае наращивания. Рассмотрено влияние различных функций формы на численное решение. Для расчетов использовалась среда Matlab, а также была написана программа на языке C++ для более быстрого поиска решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00712).

### Список литературы

- [1]. Manzhirov A.V. Mechanics of Growing Solids: New Track in Mechanical Engineering. ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Montreal, Quebec, 2014, vol. 9, pp. V009T12A039-V009T12A039.
- [2]. Manzhirov A.V. Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies. Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of the World Congress on Engineering. London, 2015, vol. II, pp. 710 – 714.
- [3]. Epstein M., Maugin G.A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. International Journal of Plasticity, 2000, no. 7, vol. 16, pp. 951 – 978.

- [4]. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides par G. Lamé. Gauthier-Villars. 1866.
- [5]. Yavari A. A geometric theory of growth mechanics. *Journal of Nonlinear Science*, 2010, no. 6, vol. 20, pp. 781-830.
- [6]. Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of surface growth for cylindrical and spherical elastic bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 98, pp. 12 –48.
- [7]. Manzhurov A.V. A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts. *Transactions on Engineering Technologies*, 2016, pp. 223 – 235.
- [8]. Zabaras N., Liu S. A theory for small deformation analysis of growing bodies with an application to the winding of magnetic tape packs. *Acta mechanica*, 1995, no. 1, vol. 111, pp. 95 – 110.