

# 03, сентябрь 2019

УДК 621.396.2

## **Исследование помехоустойчивости многочастотной системы передачи информации с кодовым разделением каналов**

*Трубачёв Е. А., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Радиоэлектронные системы и устройства»  
[i.am.trial@gmail.com](mailto:i.am.trial@gmail.com)*

*Научный руководитель: Сенин А.И., доцент, к.т.н.  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Радиоэлектронные системы и устройства»  
[rl1@bmstu.ru](mailto:rl1@bmstu.ru)*

*Аннотация: В данной работе проводится исследование помехоустойчивости одного варианта построения многочастотной системы передачи информации с кодовым разделением каналов пользователей. Рассчитаны зависимости вероятности ошибок от среднего отношения сигнал-шум для случаев равномерного профиля многолучевой интенсивности. Проведено сравнение по помехоустойчивости исследуемой системы с одночастотной системой стандарта CDMA.*

*Ключевые слова: моделирование случайных величин (random variables modeling), множественный доступ с кодовым разделением каналов (code-division multiple-access), рэлеевские замирания (Rayleigh fading), многочастотная система передачи (multicarrier transmission system), помехоустойчивость (interference immunity), вероятность ошибки (error probability), межсимвольная интерференция (intersymbol interference).*

### **Введение**

Отличительная особенность нашего времени – непрерывно возрастающая потребность в передаче огромных объемов информации за короткие сеансы связи. Как следствие, к таким системам передачи информации (СПИ) предъявляются повышенные требования к скорости передачи.

Однако в высокоскоростных системах при передаче информации по многолучевым каналам возможна сильная внутрисимвольная интерференция, а если расширение задержки

канала превышает длительность информационной посылки, то и межсимвольная интерференция, что приводит к снижению помехоустойчивости СПИ.

\*\*\*

Для устранения внутрисимвольной и межсимвольной интерференции можно использовать методы снижения символьной скорости. Общим для таких методов является преобразование последовательного потока данных в параллельные потоки символов, передаваемых на разных несущих. При этом длительность информационной посылки пропорционально увеличивается, а межсимвольная интерференция уменьшается. Передача одного и того же символа на различных частотах, несущих позволяет эффективно бороться с замираниями в канале. В частности, этот метод реализован в многочастотных системах с кодовым разделением каналов (МС-CDMA) [1].

Структурная схема такой СПИ представлена на рисунке 1. Поток данных с длительностью информационных посылок  $T_b$  преобразуется в  $P$  параллельных потоков. После преобразования длительность посылок  $T_s$  увеличивается в  $P$  раз и становится равной  $P \cdot T_b$ , что уменьшает межсимвольную интерференцию.

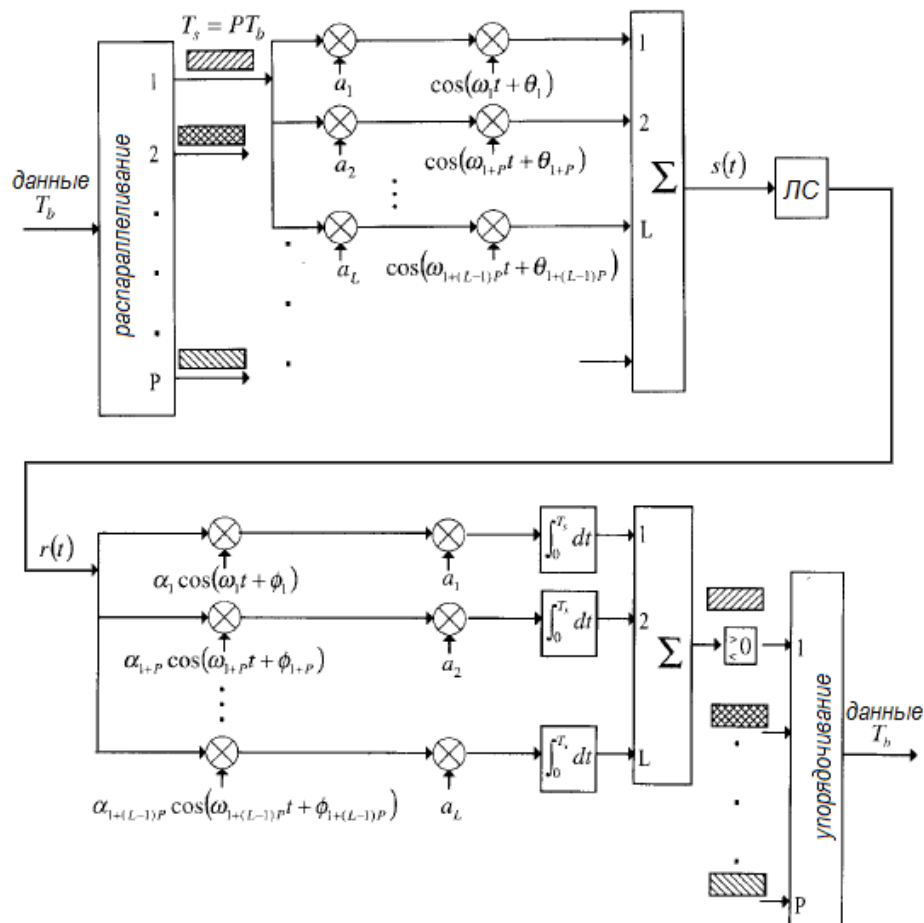


Рис. 1. Структурная схема МС-CDMA-системы

Информационный символ любого  $p$ -го потока,  $p=1, \dots, P$ , передается по  $L$  каналам на  $L$  несущих. Предварительно передаваемый символ в  $l$ -м канале перемножается с символом  $a_l$  кодовой последовательности  $\{c_l\}$ ,  $l=1, \dots, L$ , где  $L$  – длина кодовой последовательности. В качестве кодовой последовательности, являющейся адресом абонента, используется случайная последовательность символов.

Таким образом, в рассматриваемой СПИ одновременно передаются  $P$  информационных символов по  $L$  каналам каждый. Всего в СПИ используются  $P \cdot L$  несущих. Сформированные сигналы суммируются, образуя групповой сигнал, который поступает в линию связи.

Частоты несущих выбираются из условия ортогональности и определяются как

$$f_z = f_1 + (d - 1) \cdot \frac{1}{T}, \quad d = 1, \dots, P \cdot L.$$

Присвоение частот осуществляется таким образом, чтобы частотное разнесение между несущими, используемыми для передачи одного и того же бита данных, было бы максимальным. Это достигается, когда символы  $p$ -го потока данных ( $p=1, \dots, P$ ) передаются на  $L$  несущих с номерами  $\{p + (l - 1) \cdot P, l=1, \dots, L\}$ . При этом разнесение смежных частот между этими несущими равно  $\frac{P}{T_s}$ .

Приемное устройство состоит из  $P$  групп каналов. Каждая  $p$ -я группа включает  $L$  каналов, предназначенных для приема одного и того же  $p$ -го информационного символа. При этом выполняются следующие операции. Принятый сигнал перемножается с несущими, используемыми для передачи  $p$ -го символа, и с чипами кодовой последовательности  $\{c_l\}$ ,  $l=1, \dots, L$ . Результаты перемножения интегрируются и суммируются либо с одинаковыми весами, либо с весами, обеспечивающими максимум отношения сигнал-шум. Решение о переданном символе принимается путем сравнения взвешенной суммы напряжений с нулевым порогом. На выходе приемного устройства стоит преобразователь  $P$  параллельных потоков данных в один поток.

Заметим, что для формирования группового сигнала  $s(t)$  на передающей стороне нет необходимости в использовании большого числа модуляторов. Групповой сигнал получается, как результат применения обратного дискретного преобразования Фурье к сигналам  $P \cdot L$  ветвей. Соответственно, на приемной стороне выделение канальных сигналов осуществляется применением прямого дискретного преобразования Фурье.

Ниже излагается инженерная методика расчета помехоустойчивости системы MC-CDMA.

Сигнал  $r(t)$  на входе приемника рассматриваемой системы можно записать в виде:

$$r(t) = n(t) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2S} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \sum_{l=1}^L \beta_{k,d}(t) \cdot b_{k,p}(m) \cdot a_{k,l}(m) \cdot u_{T_s}(t - m \cdot T_s - \zeta_k) \cdot \cos(\omega_d t + \phi_{k,d}(t)),$$

где  $n(t)$  – помеха типа белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью мощности  $N_0$ ,  $m$  – номер символа в информационной последовательности,  $S$  – мощность сигнала, приходящаяся на одну несущую частоту,  $k$  – номер пользователя,  $K$  – количество пользователей,  $p$  – номер канала,  $P$  – количество каналов,  $l$  – номер ветви,  $L$  – количество ветвей в одном канале,  $\beta_{k,z}(t)$  – случайное замирание амплитуды, распределенное по закону Рэлея для  $d$ -й несущей частоты,  $d = p + (l - 1) \cdot P$ ,  $b_{k,p}(m)$  – последовательность информационных символов, принимающих значения  $\pm 1$ ,  $a_{k,l}(m)$  – элементы псевдослучайной периодической последовательности, принимающие значения  $\pm 1$ ,  $\alpha_{k,d}$  – весовые коэффициенты,  $u_{T_s}(t)$  – функция, принимающая значение 1 при  $t \in [0; T_s]$  и 0 в остальных случаях,  $T_s$  – длительность символа, передаваемого в каждом канале,  $\phi_{k,d}(t) = \theta_{k,d} + \varphi_{k,d}(t) - \omega_d \zeta_k$ ,  $\theta_{k,d}$  – случайная начальная фаза сигнала  $k$ -го пользователя, равномерно распределенная на интервале  $[0; 2\pi)$ ,  $\varphi_{k,d}(t)$  – фазовый сдвиг коэффициента передачи канала для  $k$ -го пользователя,  $\omega_d$  – несущая частота,  $\zeta_k$  – временное рассогласование сигнала  $k$ -го пользователя относительно сигнала 1-го пользователя, равномерно распределенное в интервале  $[0; T_s)$ .

Сигнал на выходе оптимального приемника первого пользователя при обработке текущего информационного символа  $b_{1,p}(0)$ , передаваемого по  $p$ -му каналу, определяется выражением:

$$U_p = V + I + J_p + \eta,$$

где

$$V = \sqrt{\frac{S}{2}} \cdot T_s \cdot b_{1,p}(0) \cdot \sum_{l=1}^L \beta_{1,d}(0) \cdot \alpha_{1,d}$$

– полезный сигнал;

$$I = \sum_{l=1}^L \sqrt{\frac{S}{2}} \cdot \sum_{k=2}^K \alpha_{1,d} \cdot \alpha_{1,l}(0) \cdot \beta_{k,d}(0) \cdot \cos(\phi_{k,d}(0) - \phi_{1,d}(0)) \\ [b_{k,p}(-1) \cdot a_{k,l}(-1) \cdot \zeta_k + b_{k,p}(0) \cdot a_{k,l}(0) \cdot (T_s - \zeta_k)]$$

– помеха от сигналов других пользователей на частотах, которые используются первым пользователем;

$$J_p = \sum_{l=1}^L \sqrt{\frac{S}{2}} \cdot \sum_{k=2}^K \sum_{q=1}^P \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq d}}^L \alpha_{1,d} \cdot a_{1,l}(0) \cdot \beta_{k,j}(0)$$

$$\left[ \int_0^{\zeta_k} b_{k,q}(-1) \cdot a_{k,h}(-1) \cdot \cos((\omega_d - \omega_j) \cdot t + \phi_{k,j}(0) - \phi_{1,d}(0)) \cdot dt + \right. \\ \left. + \int_{\zeta_k}^{T_s} b_{k,q}(0) \cdot a_{k,h}(0) \cdot \cos((\omega_d - \omega_j) \cdot t + \phi_{k,j}(0) - \phi_{1,d}(0)) \cdot dt \right]$$

– помеха от сигналов других пользователей на частотах, не совпадающих с частотами сигналов первого пользователя;

$\eta$  – помеха, обусловленная влиянием шума  $n(t)$  на входе приемника.

Можно показать [2], что случайные величины  $I$ ,  $J_p$ ,  $\eta$  являются приблизительно гауссовскими с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями:

$$D_I = \frac{(K-1) \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot T_s^2}{3} \cdot \sum_{l=1}^L \alpha_{1,d}^2,$$

$$D_{J_p} = \frac{(K-1) \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot T_s^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{l=1}^L \alpha_{1,d}^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2},$$

$$D_\eta = \frac{N_0 \cdot T_s}{4} \cdot \sum_{l=1}^L \alpha_{1,d}^2.$$

В работе [2] среднюю вероятность ошибки в предположении, что символ  $b_{1,p}(0) = 1$ , определяют как:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{P} \cdot \sum_{p=1}^P \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} P_e \cdot W(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) \cdot d\beta_1 \cdot d\beta_2 \cdot \dots \cdot d\beta_L,$$

где  $P_e = \frac{1}{2} \cdot \Phi\left(\frac{V}{\sqrt{2 \cdot D[U_p]}}\right)$ ,  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$  – функция ошибок.

Отмечается, что для вычисления интеграла используется метод Монте-Карло.

Ниже приводится подробная методика для оценки помехоустойчивости. Рассмотрим сначала случай линейного сложения сигналов, т.е. случай, когда  $\alpha_{1,d} = 1$ . Введем случайную величину  $B = \sum_{l=1}^L \beta_{1,d}$ . Тогда, считая, что вероятность ошибки в каждом  $p$ -м канале одинакова, среднюю вероятность ошибки можно определить как:

$$P_{\text{ош}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \Phi \left( \frac{\frac{\sqrt{S} \cdot T_s \cdot B}{\sqrt{2 \cdot D[U_p]}}}{\sqrt{2 \cdot D[U_p]}} \right) \cdot W(B) \cdot dB, \quad (1)$$

где

$$D[U_p] = \frac{N_0 \cdot T_s \cdot L}{4} + (K - 1) \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot T_s^2 \cdot \left[ \frac{L}{3} + \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \cdot \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{P-L} \frac{1}{(d-j)^2} \right].$$

Интеграл (1) можно заменить суммой:

$$P_{\text{ош}} \cong \sum \frac{1}{2} \cdot \Phi \left( \frac{\sqrt{S} \cdot T_s \cdot B}{2 \cdot \sqrt{D[U_p]}} \right) \cdot P(B) \cdot \Delta B, \quad (2)$$

где  $P(B)$  – вероятность попадания значений случайной величины  $B$  в интервал  $(B, B + \Delta B)$ .

Таким образом, задача сводится к моделированию случайной величины  $B$  и построению гистограммы ее распределения.

Как правило, в реальных линиях связи замирования  $\beta_{k,d}$  коррелированы. Частотная корреляционная функция, описывающая эту корреляцию, связана с профилем многолучевой интенсивности, определяемым условиями распространения сигнала, преобразованием Фурье [3].

На практике часто встречается равномерный и экспоненциальный профили. Ниже в расчетах используется равномерный профиль многолучевой интенсивности, протяженность которого бралась равной  $\tau_0 = 4T_c$ , где  $T_c$  – длительность элементарного символа кодовой последовательности, используемой в одночастотной CDMA-системе. При условии, что скорость передачи информации и полоса частот, занимаемая CDMA-системой, такие же, как и в MC-CDMA-системе (необходимое условие при сравнении систем по помехоустойчивости), параметр  $T_c = \frac{T_b}{L}$ , тогда  $\tau_0 = \frac{4T_b}{L}$ .

Массив коррелированных случайных величин, распределенных по закону Рэлея, можно получить с помощью массива случайных величин, распределенных по закону Гаусса. Для этого сначала с помощью стандартных команд, встроенных в среду математического моделирования Matlab, генерируется массив некоррелированных гауссовских случайных величин. В качестве следующего шага получают массив коррелированных гауссовских случайных величин, для чего используется метод скользящего суммирования.

Для рассматриваемого случая нормированная частотная корреляционная функция имеет вид:

$$R(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\tau_0}{2} \cdot \omega\right)}{\frac{\tau_0}{2} \cdot \omega}.$$

Получить массив гауссовских случайных величин с такой частотной корреляционной функцией можно с помощью метода скользящего суммирования [4]:

$$\xi[n] = \sum_{i=-z}^z C_i \cdot x[n-i],$$

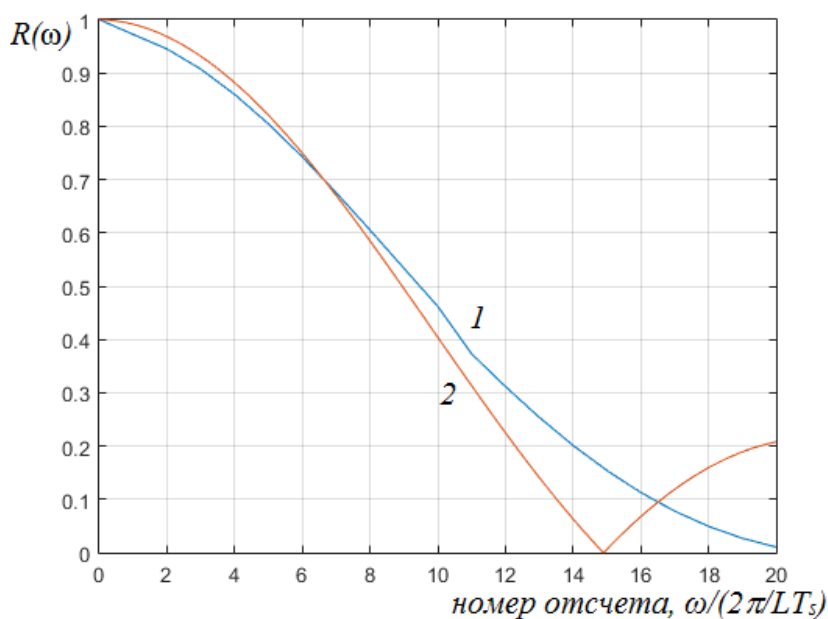
где  $\xi[n]$  – элемент массива коррелированных гауссовских случайных величин,  $x[n]$  – элемент массива исходных некоррелированных гауссовских случайных величин,  $z$  – размах скользящего суммирования,  $C_i$  – коэффициент скользящего суммирования:

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{\gamma_0}{2}}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\gamma_0}{2} \cdot i\right)}{i},$$

$$\gamma_0 = \tau_0 \cdot \Delta\omega, \Delta\omega = \frac{2\pi}{L \cdot T_s}.$$

В дальнейшем при расчетах значение  $z$  бралось равным 15.

На рисунке 2 приведены частотные корреляционные функции смоделированного массива случайных величин и теоретическая. Если учесть, что частотные корреляционные функции целесообразно сравнивать только в пределах полосы частот, где значение  $R(\omega) \geq 0,5$  [5], можно убедиться, что результат моделирования близок к требуемому.



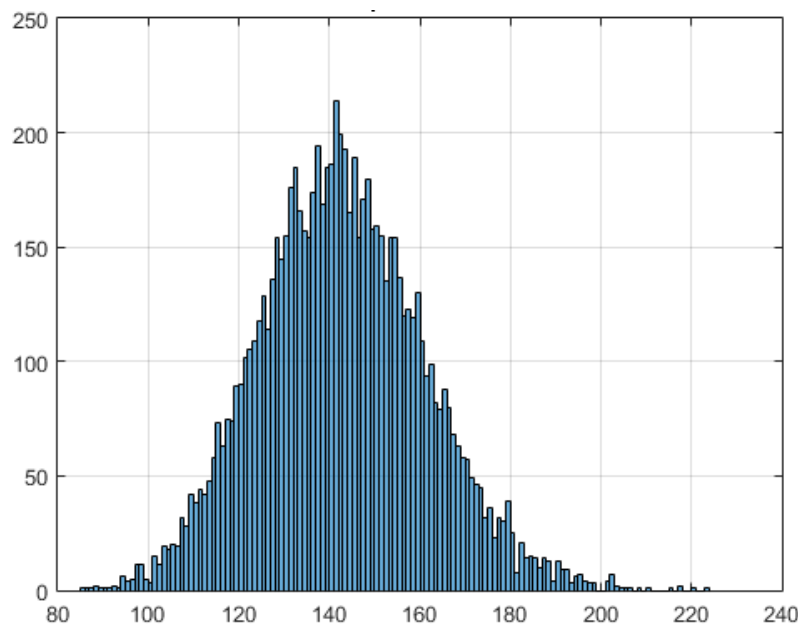
**Рис. 2.** Сравнение частотных корреляционных функций смоделированного массива случайных величин (1) и теоретической (2)

Используя массив коррелированных гауссовских случайных величин, можно сформировать массив коррелированных рэлеевских случайных величин:

$$\xi[n] = \sqrt{\xi_1^2[n] + \xi_2^2[n]},$$

где  $\xi[n]$  – последовательность рэлеевских случайных величин,  $\xi_1[n], \xi_2[n]$  – две независимые последовательности коррелированных гауссовских случайных величин.

Из полученного массива коррелированных рэлеевских случайных величин  $\beta_{1,d}$  получают массив случайных величин  $B = \sum_{l=1}^L \beta_{1,d}$ . Гистограмма массива случайных величин  $B$  показана на рисунке 3.



**Рис. 3.** Гистограмма массива случайных величин  $B$

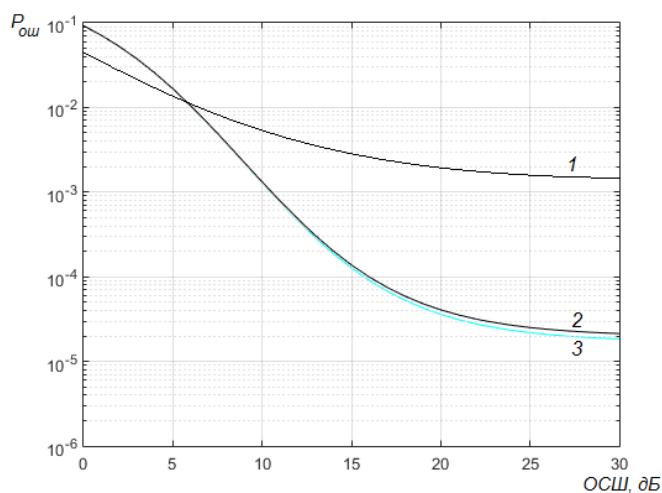
Используя гистограмму, по формуле (2) находим зависимость средней вероятности ошибки на бит информации от отношения сигнал-шум для CDMA-системы (1), MC-CDMA-системы (2), MC-CDMA-системы с использованием аппроксимации распределения случайной величины  $B$  гауссовским законом (3). Найденная зависимость представлена на рисунке 4 (кривая (2)). На нем же представлена зависимость средней вероятности ошибки на бит для систем DS-CDMA (кривая (1), заимствованная из работы [6]). Отношение сигнал-шум вычисляется по формуле:

$$\text{ОСШ} = \frac{S \cdot T_s}{N_0 \cdot L} M\{B^2\}.$$

Система MC-CDMA выигрывает у системы CDMA по помехоустойчивости. При отношении сигнал-шум 20 дБ средняя вероятность ошибки на бит для системы MC-CDMA –  $0,4 \cdot 10^{-4}$ , для системы CDMA –  $0,2 \cdot 10^{-2}$ .

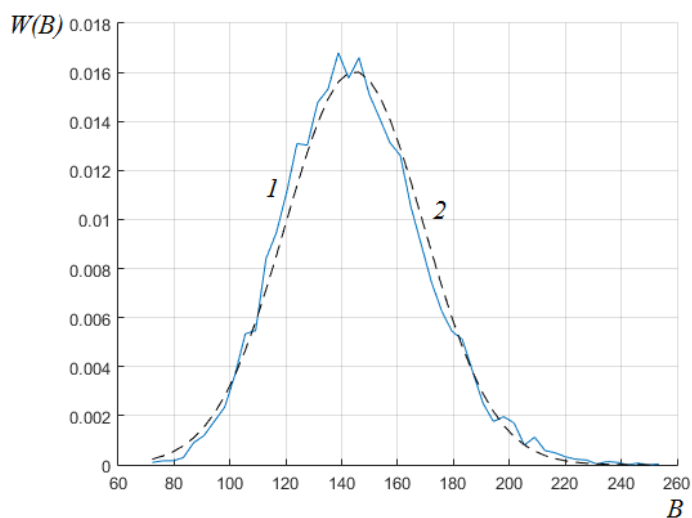


Заметим, что распределение случайной величины  $B$ , как показано на рисунке 5, при достаточно большом значении  $L$  близко к нормальному.



**Рис. 4.** Зависимость средней вероятности ошибки на бит от отношения сигнал-шум

Поэтому при расчете вероятности ошибки можно непосредственно воспользоваться формулой (1). Математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $B$  находятся из гистограммы (рисунок 3).



**Рис. 5.** Нормированная гистограмма массива случайных величин  $B$  (1) и ее аппроксимация гауссовским законом распределения (2)

На рисунке 4 (кривая (3)) представлена средняя вероятность ошибки на бит информации при аппроксимации распределения случайной величины  $B$  гауссовским законом.

Использование аппроксимации распределения случайной величины  $B$  гауссовским законом дает результаты, незначительно отличающиеся от полученных при использовании массива случайных величин  $B$ .

Рассмотрим схему когерентного сложения с весовыми коэффициентами  $\alpha_{1,d} = \beta_{1,d}$ .

Интеграл (1) можно заменить следующей суммой:

$$P_{\text{ош}} \cong \sum \frac{1}{2} \cdot \Phi \left( \frac{\sqrt{S} \cdot T_s \cdot B2}{2 \cdot \sqrt{D[U2_p]}} \right) \cdot P(B2) \cdot \Delta B2, \quad (3)$$

где  $B2 = \sum_{l=1}^L \beta_l^2$  – случайная величина, сформированная по аналогии со случайной величиной  $B$  в схеме линейного сложения,  $P(B2)$  – вероятность попадания значений случайной величины  $B2$  в интервал  $(B2, B2 + \Delta B2)$ ,

$$D[U2_p] = \frac{N_0 \cdot T_s}{4} B2 + (K - 1) \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot T_s^2 \cdot \left[ \frac{1}{3} B2 + \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2} \right], \quad (4)$$

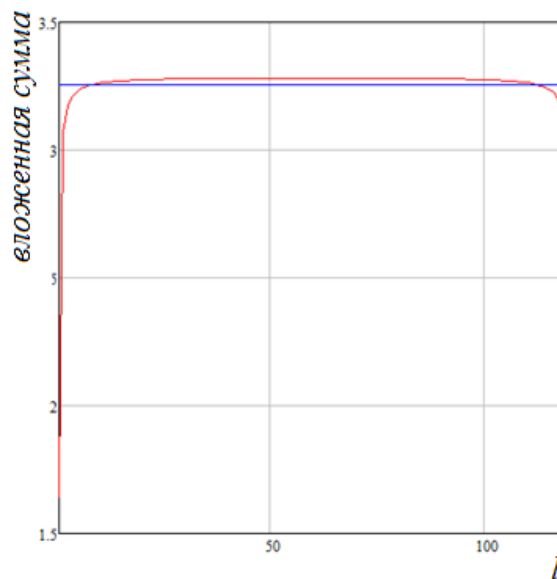
$$d = p + (l - 1) \cdot P.$$

В выражении (4) присутствует элемент  $\sum_{l=1}^L \left( \beta_l^2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2} \right)$ , который нельзя представить в виде произведения двух независимых сумм:

$$\left( \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right) \cdot \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2} \right),$$

поскольку одна сумма вложена в другую, а это усложняет использование случайной величины  $B2$ .

Однако для данной проблемы имеется приближенное решение. Можно оценить значения, принимаемые вложенной суммой  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2}$ , в зависимости от значения  $l$  внешней суммы  $\sum_{l=1}^L \beta_l^2$ . Результаты оценки приведены на рисунке 6 для случая  $L = 119, p = 1$ .

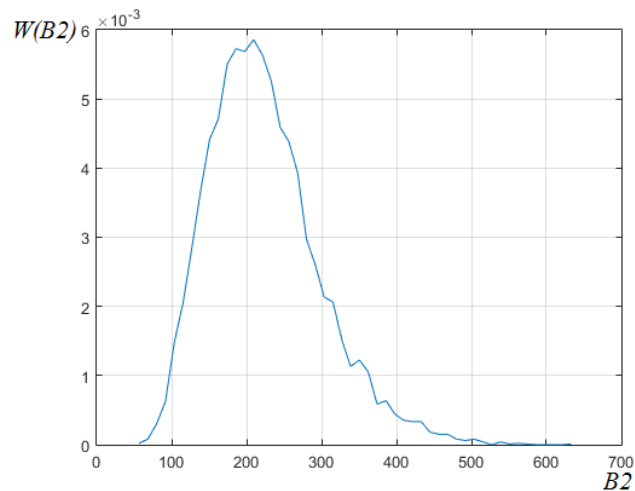


**Рис. 6.** Зависимость значения вложенной суммы от  $l$

Для  $L = 119$  вложенная сумма  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq d}}^{P \cdot L} \frac{1}{(d-j)^2} \approx 3,25$  и практически не зависит от  $l$ . Это позволяет упростить выражение (4) до следующего вида:

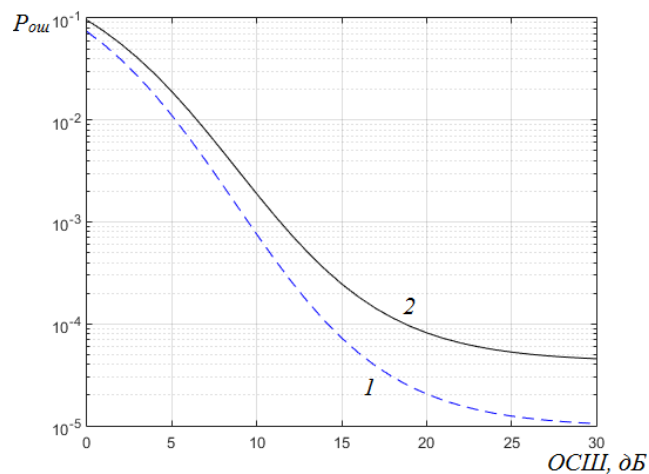
$$D[U_{2p}] = \left[ \frac{N_0 \cdot T_s}{4} + (K - 1) \cdot S \cdot \sigma^2 \cdot T_s^2 \cdot \left[ \frac{1}{3} + \frac{3,25}{4 \cdot \pi^2} \right] \right] B_2.$$

Таким образом, решение задачи для случая когерентного сложения с весовыми коэффициентами аналогично решению для случая линейного сложения и сводится к моделированию случайной величины  $B_2$ . Ее распределение приведено на рисунке 7.



**Рис. 7.** Распределение случайной величины  $B_2$

Найденная зависимость средней вероятности ошибки на бит информации от отношения сигнал-шум для схемы когерентного сложения с весовыми коэффициентами представлена на рисунке 8 (кривая (1)). На нем же представлена аналогичная зависимость для схемы линейного сложения (кривая (2)).



**Рис. 8.** Зависимость средней вероятности ошибки на бит от отношения сигнал-шум для МС-CDMA-системы

Схема когерентного сложения с весовыми коэффициентами выигрывает у схемы линейного сложения по помехоустойчивости. При отношении сигнал-шум 20 дБ средняя вероятность ошибки на бит для схемы когерентного сложения с весовыми коэффициентами –  $0,2 \cdot 10^{-4}$ , для схемы линейного сложения –  $0,8 \cdot 10^{-4}$ .

### **Заключение**

Таким образом, в работе приведена инженерная методика расчета помехоустойчивости MC-CDMA-системы с различными схемами сложения сигналов в ветвях приемника.

### **Список литературы**

- [1]. Fazel K., Kaiser S. Multi-Carrier and Spread Spectrum Systems: from OFDM and MC-CDMA to LTE and WiMAX. Singapore, Markono Print Media Pte, Ltd., 2008. 360 p.
- [2]. Gui X., Ng T.S. Performance of asynchronous orthogonal multicarrier CDMA system in frequency selective fading channel // IEEE Transaction on communication. 1999. Vol. 47. P. 1084-1091.
- [3]. Прокис Дж. Цифровая связь: пер. с англ. / под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с. [Proakis J.G. Digital Communications. New York: Mc Graw-Hill, 1995.]
- [4]. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Советское радио, 1971. 328 с.
- [5]. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970. 728 с.
- [6]. Sourour E.A., Nakagawa M. Performance of orthogonal multicarrier CDMA in a multipath fading channel // IEEE Transaction on communication. 1996. Vol. 44. P. 356-366.